

# Réduction de modèles en dynamique non-linéaire pour la simulation de structures soumises à une famille de chargements

A. Daby-Seesaram<sup>†,‡</sup>, A. Fau<sup>†</sup>, P-É. Charbonnel<sup>§</sup>, D. Néron<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France. {alexandre.daby-seesaram, amelie.fau, david.neron}@ens-paris-saclay.fr

<sup>‡</sup>LMS, École Polytechnique / CNRS / Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau, France

<sup>§</sup>Inria, M $\Xi$ DISIM Team, Inria Saclay-Ile de France, Palaiseau, France

<sup>§</sup>DES - Service d'Études Mécaniques et Thermiques (SEMT), CEA, Université Paris-Saclay

**Résumé** — Cet article propose une stratégie multi-query utilisant l'information calculée lors de premières simulations pour accélérer les calculs suivants. Cette stratégie repose sur le caractère non-incrémental de la méthode LATIN en proposant une initialisation judicieuse du solveur non-linéaire. Afin de tirer au mieux parti de la redondance entre les simulations, cette méthode s'appuie sur une technique de réduction de modèles. Enfin, cette méthode a été dotée d'un cadre multi-fidélité lors de son application à la prédiction de probabilité de défaillance de structures soumises à des chargements incertains.

**Mots clés** — Dynamique, Multi-query, Réduction de modèles, Méthode LATIN-PGD, Endommagement

## 1 Introduction

L'objectif de ce papier est de proposer une stratégie efficace visant à calculer l'évolution d'une variable d'endommagement sous chargement dynamique pour un grand nombre de configurations de chargement [4]. Les méthodes de réduction de modèles offrent un moyen de diminuer le coût de calcul associé à chacune des configurations de chargement. À l'inverse des méthodes dites *a posteriori*, la Proper Generalised Decomposition (PGD) permet à cet effet de générer une base réduite (sur laquelle projeter le problème) à la volée conjointement à la résolution du problème courant sans nécessiter de calculs coûteux préalables. La première brique de la méthode proposée consiste donc à réduire le coût d'appel au solveur utilisé à l'aide de la méthode PGD qui, puisque l'étude est non-linéaire, est utilisée de pair avec la méthode LATIN. Les avantages de cette dernière s'ajoutent aux bénéfices offerts par une résolution des équations dynamiques dans le domaine fréquentiel [3].

Dans le cas de résolutions multiples de problèmes non-linéaires proches, les avantages liés à la réduction de modèles peuvent être couplés à une initialisation judicieuse des schémas de résolution de chaque problème non-linéaire [2] afin de tirer parti de la redondance d'un calcul à l'autre, permettant ainsi de diminuer le coût total de l'étude. Une fois un certain nombre de calculs effectué, l'utilisation d'une base réduite précédemment calculée comme base initiale pour un nouveau calcul est triviale. L'utilisation d'une solution précédemment convergée comme solution initiale pour le calcul courant nécessite en revanche de plus amples aménagements. En effet, les conditions de chargement et les déplacements imposés étant différents d'un cas de chargement à l'autre, les différentes solutions ne partagent pas l'admissibilité. Il est alors proposé de superposer la correction inélastique homogène d'un calcul précédent judicieusement choisi appelé *simulation parent* (PS) à la solution élastique courante pour initialiser le schéma de résolution du problème non-linéaire.

L'étude multi-requête consiste en un grand nombre de simulations non-linéaires pour des chargements non paramétrés fournis comme listes de séries temporelles indexées. Ici, les configurations de chargement désignent donc un ensemble de  $n$  conditions aux limites de type Dirichlet  $\{\mathbf{u}_d^{(i)}(t)\}_{i \in \llbracket 1, n_s \rrbracket}$ . Le choix de la PS comme meilleur candidat pour accélérer le calcul courant ne peut s'appuyer sur une distance entre les valeurs de paramètres du chargement. Aussi, nous proposons de calculer l'ensemble des solutions élastiques associées à chaque configuration de chargement, puis de sélectionner la PS correspondant au calcul précédent menant à une solution élastique la plus proche de la solution élastique du calcul courant. Le sens donné à la proximité entre deux solutions élastiques est détaillé plus loin. Le

choix de l'ordre dans lequel sont chaînés les calculs est ensuite calculé par un algorithme génétique, en se basant sur la connaissance de cette distance entre toutes les solutions élastiques.

Cette méthode, étendue à une étude multi-fidélité, a été appliquée à la prédiction de probabilité de défaillance de structures soumises à des chargements incertains.

## 2 Problème de référence

Considérons une structure occupant un domaine spatial  $\Omega$  au cours d'un intervalle de temps  $I = [0, T]$ . Cette structure est soumise à des efforts surfaciques sur le domaine  $\partial\Omega_2$  et à des efforts volumiques  $\mathbf{f}_d$  sur le domaine  $\Omega$ . Un champ de déplacement  $\mathbf{u}_d$  est de plus imposé sur  $\partial\Omega_1$  avec  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$ . La structure présente un comportement ductile, présentant donc un endommagement piloté par la plasticité.

### 2.1 Comportement non-linéaire dynamique

Les équations pilotant l'équilibre du problème s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_d = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ and } \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_d \text{ on } \partial\Omega_1, \\ \sigma \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \text{ on } \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\sigma$  la contrainte de Cauchy et  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement. Les vecteurs  $\dot{\mathbf{u}}$  et  $\ddot{\mathbf{u}}$  étant respectivement les dérivées premières et secondes du déplacement. La masse volumique de la structure est quant à elle notée  $\rho$ , et  $\mathbf{n}$  désigne la normale sortante unitaire à  $\partial\Omega$ .

Le comportement non-linéaire de la structure, quant à lui, dérive du comportement ductile décrit dans [3]. La résolution du problème de dynamique non-linéaire s'effectue à l'aide d'un solveur spécifique basée sur des méthodes de réduction de modèles et alternant entre résolutions dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel.

### 2.2 La méthode de réduction de modèles hybride fréquence-temps LATIN-PGD

Afin d'utiliser la PGD, une méthode de réduction *a priori* visant à réduire le coût de résolution des équations globales, le problème de dynamique non-linéaire est résolu à l'aide de la méthode LATIN [8]. Cette méthode correspond à un schéma itératif à deux directions de recherche alternées qui approxime à chaque itération la solution sur l'ensemble de l'espace-temps. Pour cela, deux variétés  $\mathcal{A}_d$  et  $\Gamma$  sont définies par l'ensemble des champs mécaniques qui vérifient l'admissibilité dynamique du problème pour  $\mathcal{A}_d$  et les équations de comportement pour  $\Gamma$ . La solution exacte du problème de dynamique non-linéaire se trouve, quant à elle, à l'intersection de ces deux variétés puisqu'elle vérifie à la fois les équations d'admissibilité et de comportement.

Le schéma itératif est initialisé avec une solution  $s_0 \in \mathcal{A}_d$  vérifiant l'admissibilité du problème, *i.e.* les équations eq. (1). Cette solution initiale est classiquement choisie comme la solution élastique  $s_e$  du problème bien que d'autres choix puissent être préférés [7]. Les itérations suivantes se composent d'une succession d'étapes locales et d'étapes globales.

Une version hybride temps-fréquence de la LATIN-PGD est employée. Cette dernière combine les avantages numériques de la réduction de modèles avec les bénéfices d'une résolution fréquentielle du problème de dynamique. Cette dernière est brièvement décrite dans les sous-sections suivantes et est détaillée dans [3].

#### 2.2.1 Étape locale pour résoudre le comportement non-linéaire

À partir d'une solution  $s_n \in \mathcal{A}_d$ , l'étape locale consiste à trouver une solution  $s_{n+1/2} \in \Gamma$  vérifiant le comportement matériau de la structure considérée. Le comportement, dépendant de l'histoire et résumé par l'expression  $\sigma^\delta = \mathcal{H}(\varepsilon(\mathbf{u}))$ , est résolu à chaque point d'intégration indépendamment.

## 2.2.2 Étape globale pour résoudre l'équilibre mécanique avec réduction de modèles

L'étape globale approxime une solution  $s_{n+1}$  qui vérifie l'admissibilité dynamique donnée par les équations eq. (1) à partir de la connaissance de l'itéré précédent  $s_{n+1/2} \in \Gamma$ . Chaque itération de l'étape globale apporte une correction telle que le déplacement à l'étape globale  $n+1$  s'écrive

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} \Delta \mathbf{u}_j}_{\Delta \mathbf{u}} \quad (2)$$

où  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$  décrit l'initialisation du champ de déplacement correspondant à la solution  $s_0$  et l'opérateur  $\Delta \square_j$  est défini comme la correction inélastique entre deux itérations successives à l'étape globale, i.e.  $\Delta \square_j = \square_j - \square_{j-1}$ .

Le déplacement initial  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$  (classiquement choisi comme étant le déplacement élastique), vérifie l'admissibilité ainsi que les conditions aux limites du problème. Le terme de correction  $\Delta \mathbf{u}_j$  est ensuite admissible à zéro, i.e., il s'agit d'une correction de déplacement calculée pour des conditions de Dirichlet homogènes.

Une variante hybride temps-fréquence de la méthode LATIN-PGD illustrée en Figure 1, est utilisée [3]. L'alternance entre les étapes locales et globale se traduit également en une alternance entre les résolutions dans le domaine temporel et les calculs dans le domaine fréquentiel. En effet, le comportement non-linéaire du matériau est résolu au niveau local dans le domaine temporel, tandis que le problème d'admissibilité dynamique linéaire homogène est résolu dans le domaine fréquentiel. La PGD est introduite en utilisant une séparation espace-fréquence des variables. Par conséquent, la correction de déplacement  $\Delta \mathbf{u} \approx \sum_{j=1}^{n+1} \Delta \mathbf{u}_j$  est considérée comme une somme de produits de fonctions spatiales  $\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})$  et de fonctions de fréquence  $\lambda_i(\omega)$ . Par exemple, avec  $m$  modes PGD, la correction de déplacement s'écrit

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega) \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Il est important de noter que du fait des non-linéarités en jeux, des déplacements résiduels sont attendus en fin de simulation, empêchant ainsi la structure étudiée de revenir à son état initial. De fait la position finale de la structure diffère de sa position initiale ce qui occure l'apparition de phénomènes de Gibbs lors de la résolution dans le domaine fréquentiel. Pour palier à ce problème, un problème auxiliaire basée sur l'utilisation d'amortissement artificiel est employé comme étape intermédiaire de résolution avant de retrouver par post-traitement la solution exacte initialement recherchée [3]. Aussi, la stratégie est robuste et s'adapte aux simulations pour lesquels l'état final diffère de l'état initial, que ce soit dû à la présence de non-linéarités telles que la plasticité, ou à un faible amortissement de la structure.

Une simulation LATIN commence généralement avec une base initiale vide  $\mathcal{B}_0 = \emptyset$  de fonctions spatiales. Après qu'une fonction spatiale a été générée, la correction du déplacement est d'abord recherchée en mettant à jour uniquement les modes de fréquence tout en gardant les fonctions spatiales inchangées. À l'itération  $n+1$ , par exemple, si  $m$  modes sont déjà dans la base réduite, les modes de fréquence  $\{\lambda_i(\omega)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  sont mis à jour tandis que les  $\{\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  restent inchangés. Si elle est suffisante, cette étape de mise à jour réduit les coûts de calcul car elle évite de calculer de nouveaux modes spatiaux et donc de résoudre des systèmes globaux d'équations. Dans le cas contraire, la base spatiale est étendue par le calcul d'une nouvelle paire comprenant un mode spatial et un mode de fréquence, de sorte que  $\Delta \mathbf{u}_{n+1} = \lambda_{m+1}(\omega) \bar{\mathbf{u}}_{m+1}(\mathbf{x})$ . Chaque étape LATIN suivante commence par une mise à jour des fonctions de fréquence. L'algorithme augmente ainsi la dimension de la base réduite PGD de manière adaptative.

## 2.3 Cadre de l'étude multi-query

Le problème qui nous intéresse concerne les situations où les forces prescrites  $F_d$  sur  $\partial\Omega_2$  ou les configurations de déplacements  $\mathbf{u}_d$  sur  $\partial\Omega_1$  sont incertaines ou nombreuses. Ici, l'objectif n'est pas de réduire le nombre de simulations requises pour l'étude multi-requêtes, mais de calculer efficacement un ensemble donné de simulations dynamiques non-linéaires. La méthode proposée est conçue pour les calculs associés à un ensemble de conditions aux limites de Dirichlet avec une distribution spatiale fixe, ce qui signifie que la surface  $\partial\Omega_1$  est commune à tous les calculs. L'incertitude en termes de conditions

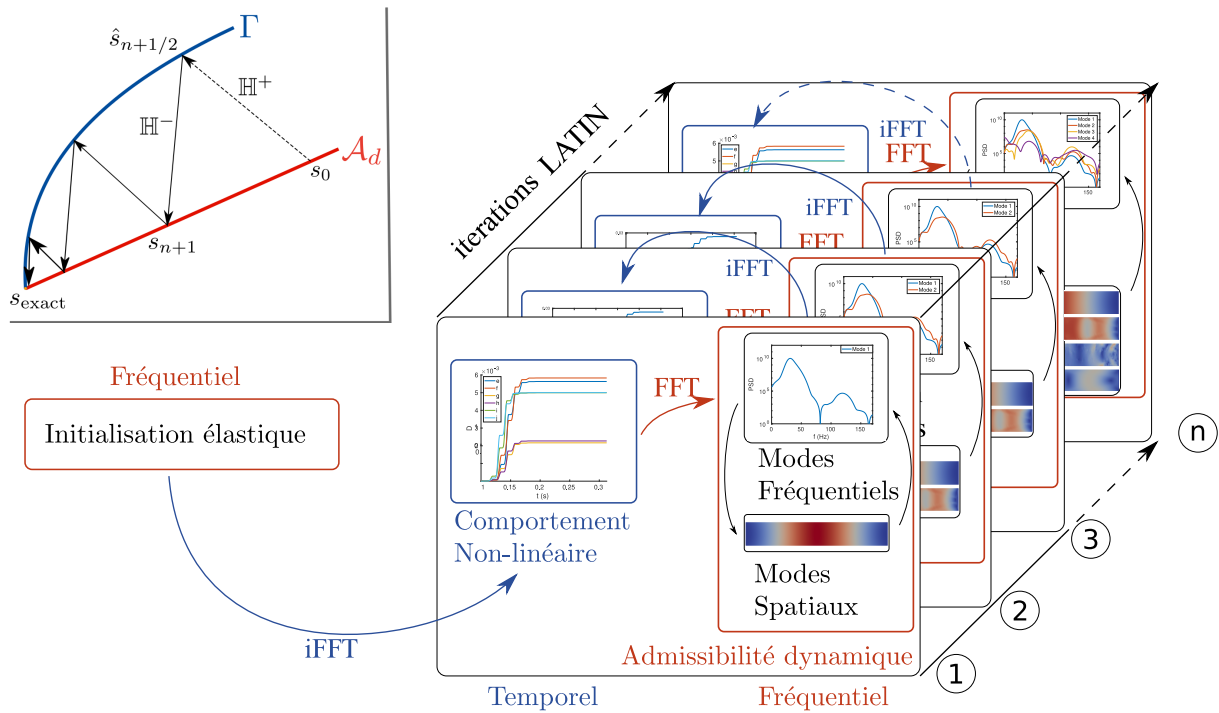


FIGURE 1 – Représentation graphique du solveur hybride temps-fréquence

de déplacement peut être exprimée sous la forme d'un ensemble d'échantillons  $\{\mathbf{u}_d^{(i)}(t)\}$  avec  $i \in \llbracket 1; n_s \rrbracket$  et  $n_s$  le nombre d'expériences incluses dans le plan d'expériences, ou sous la forme d'un déplacement paramétré  $\mathbf{u}_d(t, \alpha^{(i)})$  avec  $\{\alpha^{(i)}\}$  un ensemble d'échantillons de paramètres.

### 3 Stratégie multi-requêtes

Le premier aspect de la stratégie proposée consiste à tirer parti de la similarité d'un calcul à l'autre en initialisant les nouveaux calculs et la base réduite de départ à partir d'informations précédemment générées.

#### 3.1 Initialisation à partir d'un calcul précédent

Le calcul ( $k$ ) est le calcul actuel de LATIN-PGD qui peut être alimenté par la simulation précédente ( $j$ ). Deux perspectives sont utilisées pour réduire le coût de calcul de ( $k$ ) comme proposé dans [2] pour des paramètres matériaux. Tout d'abord, la LATIN-PGD pour le calcul actuel ( $k$ ) est initialisée avec une solution admissible améliorée par les corrections non-linéaires du calcul parent dénoté ( $j$ ). Deuxièmement, la base PGD construite pour le calcul ( $j$ ) est utilisée comme base initiale pour le calcul ( $k$ ). On espère que ces deux ingrédients fourniront une initialisation plus proche de la solution que l'initialisation naïve. L'initialisation de la base réduite est identique à la proposition faite dans [2]. En revanche, puisque les conditions aux limites de Dirichlet sont modifiées d'un calcul à l'autre, il est nécessaire de modifier l'initialisation de la solution LATIN afin de conserver l'admissibilité de cette dernière.

La méthode LATIN-PGD est une approche spatio-temporelle qui doit être initialisée avec un champ de déplacement admissible sur l'ensemble du domaine spatio-temporel. À la place de la traditionnelle solution dynamique élastique, le calcul ( $k$ ) commence à partir du champ de déplacement  $\mathbf{u}_0^{(k)}$  défini comme suit

$$\mathbf{u}_0^{(k)}(x, t) = \mathbf{u}_e^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(j)}, \quad (4)$$

où  $\mathbf{u}_e^{(k)}$  est la solution élastique correspondant à la configuration de chargement ( $k$ ) et  $\Delta \mathbf{u}^{(j)}$  désigne les corrections inélastiques de la solution précédente. Comme la solution élastique  $\mathbf{u}_e^{(k)}$  est cinématiquement admissible et que la correction inélastique  $\Delta \mathbf{u}^{(j)}$  est cinématiquement admissible à zéro, le champ de

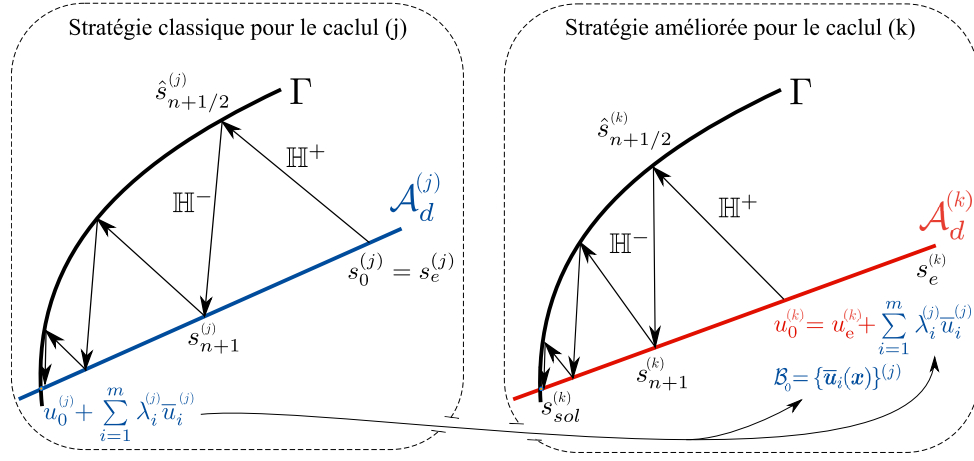


FIGURE 2 – Illustration de la stratégie d'initialisation du calcul courant

déplacement  $u_0^{(k)}(x, t)$  est cinématiquement admissible, même si les conditions aux limites des calculs  $(j)$  et  $(k)$  diffèrent. En utilisant l'initialisation basée sur le calcul  $(k)$ , on espère que l'itéré initial est plus proche de la solution exacte que la solution élastique. Par conséquent, le nombre d'itérations pour atteindre la convergence devrait être réduit. Cette stratégie est illustrée sur la Figure 2.

Dans le contexte multi-requêtes, plusieurs calculs non-linéaires sont disponibles pour améliorer le calcul  $(k)$ . Il est donc nécessaire de décider quelle simulation précédente est la mieux adaptée pour initialiser le calcul actuel, c'est-à-dire pour être le calcul parent (PS).

### 3.2 Choix de la simulation parent

Dans la pratique, à partir d'un ensemble de  $k - 1$  configurations pour lesquelles les réponses non-linéaires sont déjà résolues, il faut sélectionner le meilleur calcul parent (PS)  $(j)$  qui fournira à la fois la base réduite et la solution initiale pour le calcul  $(k)$ . Un indicateur basé sur les réponses élastiques dynamiques est proposé pour déterminer le calcul parent  $(j)$  correspondant à la réponse linéaire la plus proche parmi l'ensemble des configurations de chargement  $k - 1$  de celle du problème d'intérêt  $(k)$ . L'hypothèse sous-jacente est qu'une proximité des réponses élastiques donne un meilleur aperçu de la proximité des corrections non-linéaires que la seule proximité des chargements. La solution non-linéaire  $(j)$  est utilisée pour initialiser le champ de déplacement et la base réduite pour le schéma de calcul non-linéaire  $(k)$  comme exposé dans la section précédente.

Les distances entre les réponses non-linéaires associées à diverses configurations de chargement sont estimées à partir de la distance entre les réponses élastiques dynamiques de la structure sous ces chargements. En effet, la réponse élastique de la structure contient un riche contenu mécanique contrairement aux signaux de chargement bruts non filtrés. Chaque réponse élastique est factorisée à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières. Un indicateur de proximité entre les simulations basé sur les angles principaux entre les espaces engendrés par les vecteurs singuliers des SVDs est ensuite calculé. Afin de prendre en compte l'amplitude des réponses élastiques comparées, ces angles sont pondérés par les valeurs singulières issues des SVDs.

Le champ de déplacement élastique associé à la charge  $(k)$ , représenté par une matrice  $U_e^{(k)}$ , est décomposé comme

$$U_e^{(k)} \approx S_\Omega^{(k)} \Sigma^{(k)} S_t^{(k)T}, \quad (5)$$

où  $\Sigma^{(k)}$  est une matrice  $\ell \times \ell$  contenant les  $\ell$  premières valeurs singulières de  $U_e^{(k)}$ . Les matrices  $S_\Omega^{(k)}$  et  $S_t^{(k)}$  contiennent  $\ell$  vecteurs singuliers de  $U_e^{(k)}$  à gauche et à droite, respectivement. La décomposition est effectuée efficacement à l'aide d'une SVD randomisée [6, 1]. Le coût de calcul très faible est crucial, car le nombre de décompositions est égal au nombre de configurations de chargement, qui peut être élevé.

La proximité entre les espaces engendrés par les vecteurs singuliers est évaluée à l'aide du vecteur  $\Theta_{(k)}^{(j)}$  contenant les *angles principaux* entre les sous-espaces de dimension  $\ell$  engendrés par les vecteurs singuliers des solutions élastiques  $(k)$  et  $(j)$ , respectivement.

Une fois les angles principaux introduits, l'indicateur de proximité entre les réponses élastiques des calculs  $(k)$  et  $(j)$  est estimé par la norme  $L^2$  suivante

$$d_{(k)}^{(j)} \triangleq \left\| \left| \text{diag} \left( \tilde{\Sigma}^{(j)} \right) \odot \exp \left( i \Theta_{(k)}^{(j)} \right) - \text{diag} \left( \Sigma^{(k)} \right) \right\|_2, \quad (6)$$

où  $\odot$  représente le produit de Hadamard et l'opérateur désigné par  $|\bullet|$  donne un vecteur contenant le module de chaque composante du vecteur argument. Nous remarquons que la norme  $L^2$  du vecteur  $\Theta_{(k)}^{(j)}$  fournit la distance de Grassmann [5, 9] notée  $d_{Gr}$ .

$$\left\| \Theta_{(k)}^{(j)} \right\|_2 = d_{Gr} \left( \mathcal{S}^{(k)}, \mathcal{S}^{(j)} \right) \quad (7)$$

entre les sous-espaces  $\mathcal{S}^{(k)} = \text{Vect}(\mathcal{S}_\Omega^{(k)})$  et  $\mathcal{S}^{(j)} = \text{Vect}(\mathcal{S}_\Omega^{(j)})$ .

La distance de Grassmann donne un aperçu de la proximité modale de deux solutions élastiques, mais ignore la similitude ou l'écart de magnitude entre les deux solutions. Au contraire, l'indicateur de distance proposé, défini par l'équation (6), combine les informations provenant des valeurs singulières, c'est-à-dire les vecteurs  $\text{diag}(\tilde{\Sigma}^{(j)})$  et  $\text{diag}(\Sigma^{(k)})$  et les valeurs singulières. On peut noter que l'indicateur de proximité est basé sur des solutions élastiques, quel que soit le chargement. Il peut donc traiter des chargements paramétrés ou des chargements aléatoires générés sans paramètres apparents.

Le calcul parent est alors choisi dans le sous-ensemble des calculs non-linéaires qui ont déjà été effectués, c'est-à-dire parmi les configurations (1) à  $(k-1)$ , comme étant le calcul minimisant la distance à la simulation courante. Ainsi, la pertinence du calcul parent dépend de l'ordre dans lequel les  $n$  configurations de chargement sont résolues. En effet, plus la distance  $d_{(k)}^{(j)}$  entre le calcul courant  $(k)$  et le calcul parent  $(j)$  est petite, plus le calcul parent  $(j)$  est censé améliorer efficacement le calcul  $(k)$ . Par conséquent, nous cherchons à minimiser la distance entre les calculs successifs en concevant un ordre adéquat pour les simulations. Ce problème correspond au "problème du voyageur de commerce", où l'objectif est de déterminer l'itinéraire le plus court de manière à ce que la distance totale passant par chaque ville une et une seule fois pour un nombre donné de villes soit minimale.

L'obtention de la solution exacte à ce problème peut être très coûteuse en temps de calcul. Notre étude utilise un AG proposé par Zhang et al. [10], incorporant des opérateurs de croisement récemment proposés et démontrant d'excellentes performances de convergence. Il convient de noter que la séquence entière est conçue par l'algorithme, y compris le choix du calcul initial.

## 4 Résultats numériques

Le problème consiste en une poutre fixe à encoche de longueur  $L_b = 9$  m et de largeur  $W = 80$  cm. Tous les nœuds de la section de droite sont soumis à des conditions aux limites de Dirichlet dans la direction  $e_y$ , qui consistent en des cycles dont la fréquence et l'amplitude peuvent varier.

L'étude multi-requêtes proposée pour illustrer la méthode consiste à trouver la réponse de la structure pour un ensemble de 600 paires de paramètres. L'espace des paramètres est échantillonné uniformément dans une grille de 20 échantillons pour les amplitudes et de 30 échantillons pour les fréquences. Une paramétrisation a été utilisée par souci de simplicité, mais les signaux générés seront considérés comme indexés et non paramétrés dans la suite; les paramètres ne seront pas exploités dans la méthodologie. L'amplitude de chargement va de 2 mm à 60 mm. Dans ce contexte, le nombre de calculs est fixe et égal à 600.

### 4.1 Stratégie d'initialisation dans le cadre the multi-requêtes

L'ensemble de la méthodologie est présenté dans cette section, où l'initialisation et la réutilisation des bases réduites contribuent à réduire le coût de calcul.

La figure 3a montre qu'alors que le nombre de modes générés croît indéfiniment pour la méthode LATIN-PGD standard, où tous les calculs sont effectués indépendamment, il stagne rapidement à un faible nombre lorsque l'on utilise la méthode LATIN-PGD proposée. Une amélioration significative est également apparente lorsque nous examinons le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence des 600 calculs. En effet, la figure 3b montre que le LATIN-PGD améliorée conduit à 2,9 fois

moins d'itérations, diminuant ainsi de manière significative le coût de calcul de l'étude multi-requêtes. Il convient de noter ici que plusieurs calculs conduisent à des solutions élastiques pour lesquelles le cadre proposé ne présente aucun avantage. Les 170 premiers calculs des simulations présentées dans la Figure 3b, par exemple, sont totalement élastiques et aboutissent donc au même résultat pour la méthode améliorée et la méthode standard. Restreindre les résultats aux seuls calculs inélastiques mettrait en évidence de meilleurs résultats en termes d'accélération.

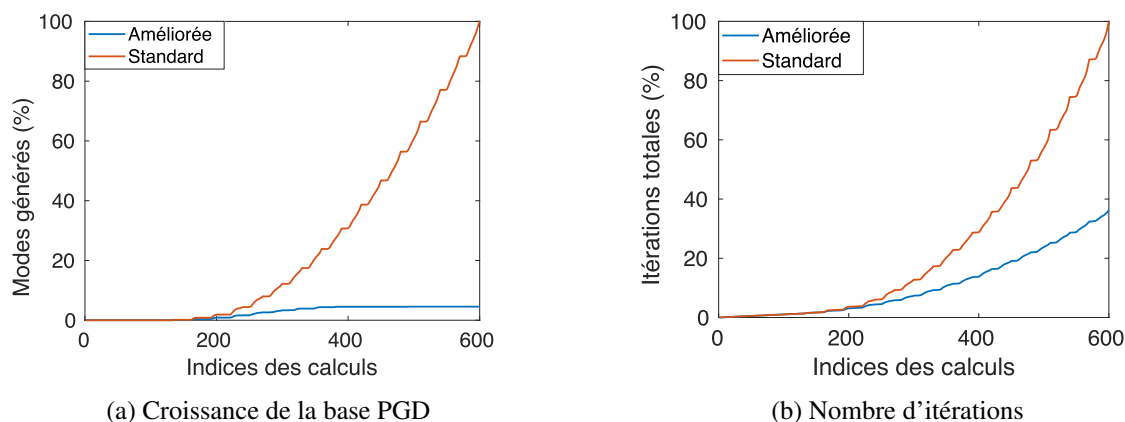


FIGURE 3 – Comparaison de la méthode standard avec la stratégie améliorée.

## 4.2 Extension multi-fidélité

Alors que dans la section précédente, l'ensemble des simulations est calculé jusqu'à une convergence fine, le cadre proposé peut être étendu à une étude de classification où des solutions grossières suffisent pour certaines des simulations, pour lesquelles une légère erreur sur le résultat n'aurait aucun impact. En effet, lors du calcul de la probabilité de défaillance d'une structure par exemple, seule une information binaire visant à classer les simulations en deux catégories : celles menant à la ruine de la structure et celles laissant la structure saine, est nécessaire. Il n'est alors pas utile de calculer précisément l'ensemble des réponses de la structure à chacune des sollicitations. En effet, seuls les calculs menant à un endommagement proche d'un seuil  $D_c$  sont critiques. Pour ces derniers, une légère erreur sur l'estimation de l'endommagement maximal dans la structure peut conduire à une erreur de classification. Dans les cas non critiques, une erreur raisonnable quant à l'endommagement conduirait tout de même à une classification correcte et n'induirait donc pas d'erreur sur l'estimation de la probabilité de défaillance. Aussi, afin d'assurer une classification précise à moindre coût, une approche multi-fidélité a été utilisée, dans laquelle des calculs fins sont effectués uniquement pour des simulations décisives et des simulations plus grossières sont utilisées ailleurs. Cette extension est directe grâce aux outils développés dans la section précédente et permet d'obtenir d'importants avantages numériques sans compromettre l'intégrité du résultat de classification.

Les bénéfices d'une telle approche sont par exemple visibles sur la Figure 4 qui met en avant le passage d'un speed-up d'un facteur 3 à un facteur 4 en passant de la méthode améliorée comportant uniquement des simulations fines à la méthode multi-fidélité dans un contexte où seule une classification binaire entre défaillance ou non des simulations est souhaitée.

## 5 Conclusion et perspectives

Dans un premier temps un solveur dynamique non-linéaire a été proposé. Ce dernier tire parti de la réductibilité des problèmes traités grâce à l'utilisation de la PGD afin de diminuer le coût de chacune des résolutions numériques. Les avantages numériques liés au faible nombre de modes PGD requis pour atteindre des solutions convergées est couplé aux avantages offerts par une résolution fréquentielle des équations de mouvement permettant une parallélisation pour chaque pas de fréquence des calculs. Dans un second temps, un cadre multi-requête pour la dynamique non-linéaire a été proposé. Une attention particulière a été accordée à l'adaptation de la méthode aux cas où une paramétrisation explicite du

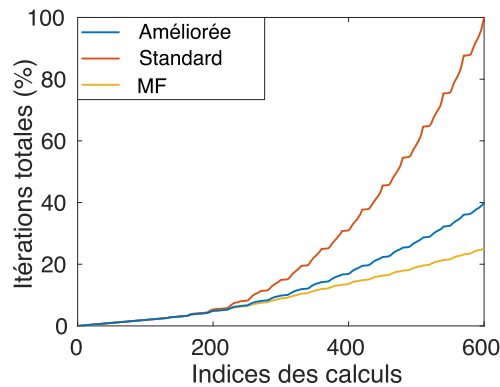


FIGURE 4 – Comparaison de l’extension multi-fidélité à la méthode améliorée et à la méthode standard

problème n’est pas facilement disponible. Ce cadre tire parti des similitudes entre les calculs pour réduire de manière significative le coût de calcul d’une étude sur de multiples configurations de chargements. Il s’est avéré efficace pour diminuer le nombre d’itérations nécessaires pour atteindre la convergence pour un grand nombre de calculs effectués séquentiellement. De même, la stratégie proposée offre des gains de calcul significatifs en diminuant le nombre de modes générés. Une étape supplémentaire de conception d’une séquence optimale de calculs a été proposée pour aboutir à un cadre robuste dont les performances sont optimales. La méthodologie mise en place n’étant pas basée sur une paramétrisation *a priori* des entrées, elle s’applique aussi bien aux études paramétriques qu’à des études pour lesquelles une telle paramétrisation n’est pas disponible. Enfin, cette méthode peut-être étendue à des études multi-fidélités lors d’applications pour lesquelles toutes les solutions ne nécessitent pas d’être connues avec précision.

## Références

- [1] S. Alameddin, A. Fau, D. Néron, P. Ladevèze, U. Nackenhorst. Toward optimality of proper generalised decomposition bases. *Mathematical and Computational Applications*, 24(1), 2019. doi: [10.3390/mca24010030](https://doi.org/10.3390/mca24010030).
- [2] P. A. Boucard, L. Champany. A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1259–1281, 2003. doi: [10.1002/nme.724](https://doi.org/10.1002/nme.724).
- [3] A. Daby-Seesaram, A. Fau, P.-E. Charbonnel, D. Néron. A hybrid frequency-temporal reduced-order method for nonlinear dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 111(15):13669–13689, août 2023. doi: [10.1007/s11071-023-08513-8](https://doi.org/10.1007/s11071-023-08513-8).
- [4] A. Daby-Seesaram, D. Néron, P.-E. Charbonnel, A. Fau. Enhanced multi-query reduced-order modelling framework for non-linear dynamics simulations with multiple non-parametrised loading configurations for damage assessment. [*Manuscript submitted for publication*], 2024.
- [5] F. Deutsch. The Angle Between Subspaces of a Hilbert Space. S. P. Singh, éd.. *Approximation Theory, Wavelets and Applications*, NATO Science Series, p. 107–130. Springer Netherlands, Dordrecht, 1995.
- [6] N. Halko, P. G. Martinsson, J. A. Tropp. Finding Structure with Randomness : Probabilistic Algorithms for Constructing Approximate Matrix Decompositions. *SIAM Review*, 53(2):217–288, jan. 2011. doi : [10.1137/090771806](https://doi.org/10.1137/090771806). Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [7] C. Heyberger, P.-A. Boucard, D. Néron. Multiparametric analysis within the proper generalized decomposition framework. *Computational Mechanics*, 49(3):277–289, 2012.
- [8] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation*. Mechanical engineering series. Springer, New York, 1999.
- [9] J. Miao, A. Ben-Israel. On principal angles between subspaces in  $R^n$ . *Linear Algebra and its Applications*, 171:81–98, juil. 1992. doi: [10.1016/0024-3795\(92\)90251-5](https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90251-5).
- [10] P. Zhang, J. Wang, Z. Tian, S. Sun, J. Li, J. Yang. A genetic algorithm with jumping gene and heuristic operators for traveling salesman problem. *Applied Soft Computing*, 127:109339, sept. 2022. doi : [10.1016/j.asoc.2022.109339](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2022.109339).