

Algorithme prédicteur-correcteur pour la simulation de comportements élastoplastiques sans modèle de comportement

H. Dandin, A. Leygue, L. Stainier

Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, F-44000 Nantes, France
{heloise.dandin,adrien.leygue,laurent.stainier}@ec-nantes.fr

Résumé — La méthode Data-Driven Computational Mechanics (DDCM), pour la résolution de problèmes sans modèle de comportement, permet de simuler des comportements anélastiques. Le comportement du matériau peut alors être représenté par un graphe matériau, qui encode à la fois les états et les relations thermodynamiques qui les lient. Cependant, les résultats obtenus sont pollués par la présence de minima locaux. On présente ici un algorithme amélioré en deux étapes, une prédiction non dissipative suivie d'une correction dissipative, pour remédier à ce problème.

Mots clés — Data-Driven Computational Mechanics, plasticité computationnelle, théorie des graphes, prédicteur-correcteur.

1 Introduction

La méthode Data-Driven Computational Mechanics (DDCM) a été introduite en 2016 par Kirchdoerfer et Ortiz [6] pour la résolution de problèmes aux conditions aux limites sans modèle de comportement. Dans cette approche, le comportement du matériau est échantillonné par un ensemble discret de points, appelé base de données matériau, au lieu d'une expression mathématique explicite. Le problème de minimisation de distance à résoudre met en jeu des états mécaniquement équilibrés et des états représentatifs du comportement du matériau. Les bases de données matériau peuvent évoluer au cours d'une simulation incrémentale, par exemple pour enrichir une base de données peu dense [7], ou en raison de l'irréversibilité du comportement [4]. Dans ce dernier cas, le solveur doit, en chaque point de la structure et pour chaque point d'intégration, contrôler l'irréversibilité et proposer un ensemble de points admissibles, la base de données matériau locale.

Dans cette étude, on s'appuie sur un graphe orienté pour représenter la comportement anélastique du matériau. Le graphe matériau encode directement les relations thermodynamiques, réversibilité ou irréversibilité, entre les points [3]. Cette méthode, contrairement aux alternatives existantes [2, 1], se base sur la dissipation et permet de conserver un espace constitutif de dimensionnalité minimale pour la résolution du problème. Cette hypothèse est fondamentale dans le cadre de la DDCM, méthode qui repose sur une minimisation de distance, dont la définition se dégrade en grande dimension. Le graphe matériau permet d'extraire directement les bases de données locales via un algorithme de parcours, et une simulation pseudo-élastique peut ensuite être effectuée à chaque pas de chargement avec l'algorithme DDCM initial. Cependant, la complexité combinatoire de la DDCM, ajoutée à la richesse de la base de données anélastique qui ne garantit pas l'unicité de la solution, conduit l'algorithme dans des minima locaux.

Dans cette étude, on présente donc un algorithme optimisé, dit de prédicteur-correcteur, qui tire parti des informations thermodynamiques encodées dans le graphe matériau pour simuler la réponse de la structure. Une première section rappelle le cadre mathématique de la DDCM en anélasticité et la définition du graphe matériau. On détaille également la procédure optimisée pour le calcul de structures. Une deuxième section présente une simulation numérique de treillis en élastoplasticité, avec et sans prédicteur-correcteur. On montre que la méthode peut prédire la réponse du système aux échelles globale et locale.

2 Méthodes

2.1 Data-Driven Computational Mechanics pour les comportements anélastiques : rappel du cadre mathématique

Cette section rappelle le cadre mathématique de la DDCM pour l'anélasticité introduit par Kirchdoerfer et Ortiz [6] et Eggersmann *et al.* [4].

On considère la représentation discrète d'un corps anélastique composée de N noeuds et M points d'intégration, soumise à des déplacements $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_a\}_{a=1}^N$ et des efforts $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_a\}_{a=1}^N$. Dans un cadre temporel discret, on cherche à approximer les solutions aux instants $\{t_0, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots\}$. L'état interne du système est caractérisé par des couples déformation-contrainte $\{(\boldsymbol{\varepsilon}_{e,k+1}, \boldsymbol{\sigma}_{e,k+1})\}_{e=1}^M$, avec $\boldsymbol{\varepsilon}_{e,k+1}, \boldsymbol{\sigma}_{e,k+1} \in \mathbb{R}^{m_e}$ et m_e la dimension des tenseurs au point d'intégration e en cinématique linéarisée. Dans un cadre 3D, $m_e = 6$ en notation de Voigt, tandis que $m_e = 1$ pour des barres. Un état local est défini par $z_{e,k+1} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{e,k+1}, \boldsymbol{\sigma}_{e,k+1}) \in \mathcal{Z}_{e,k+1}$ avec $\mathcal{Z}_{e,k+1} = \mathbb{R}^{m_e \times m_e}$ l'espace constitutif local, et $z_{k+1} = \{z_e\}_{e=1}^M$ est un point de l'espace constitutif global $\mathcal{Z}_{k+1} = \bigotimes_{e=1}^M \mathcal{Z}_{e,k+1}$, avec \bigotimes qui désigne le produit tensoriel d'espaces.

L'admissibilité mécanique d'un état dépend du matériau et est donnée par les contraintes de compatibilité et d'équilibre à l'instant t_{k+1} :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{e,k+1} = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_{k+1}, \forall e = 1 \dots M, \quad (1a)$$

$$\sum_{e=1}^M w_e \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_{e,k+1} = \mathbf{f}_{k+1}, \quad (1b)$$

avec w_e les poids aux points d'intégration et \mathbf{B}_e la matrice opérateur cinématique discrétisé relative au point d'intégration e . Ces relations définissent l'ensemble des contraintes mécaniques,

$$\mathcal{E}_{k+1} = \{z \in \mathcal{Z} \mid \text{Eqs. (1a) et (1b)}\} \subset \mathcal{Z}_{k+1}.$$

La réponse du matériau est décrite par un ensemble d'états obtenus par des essais expérimentaux ou des simulations numériques à plus petite échelle. Ces bases de données matériau locales, notées

$$\mathcal{D}_{e,k+1} = \{y_i = (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\sigma}_i) \in \mathcal{Z}_{e,k+1}, i = 1 \dots N^* \mid \text{histoire locale}\} \subset \mathcal{Z}_{e,k+1},$$

pour les comportements anélastiques, avec N^* le nombre de couples déformation-contrainte, constituent la base de données matériau globale à l'instant t_{k+1} tel que $\mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{D}_{1,k+1} \times \dots \times \mathcal{D}_{M,k+1} \subset \mathcal{Z}_{k+1}$.

La norme suivante est définie dans l'espace constitutif local :

$$\|z_{e,k+1}\|_{\mathbb{C}} = \left[\frac{1}{2} (\mathbb{C}_{e,k+1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{e,k+1}) : \boldsymbol{\varepsilon}_{e,k+1} + \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{e,k+1}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{e,k+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{e,k+1} \right]^{1/2}, \quad (2)$$

avec \mathbb{C} un tenseur d'ordre 4 défini positif qui est indépendant des propriétés du matériau et peut être adapté en cours de simulation. Enfin, la distance au carré entre deux états de l'espace global $z_{k+1}, y_{k+1} \in \mathcal{Z}_{k+1}$ est :

$$d_{\mathbb{C}}^2(z_{k+1}, y_{k+1}) = \sum_{e=1}^M w_e \|z_{e,k+1}, y_{e,k+1}\|_{\mathbb{C}}^2.$$

Le problème DDCM est ainsi reformulé en un problème de double minimisation, dont la solution est donnée par :

$$\mathcal{S} = \arg \min_{z_{k+1} \in \mathcal{E}_{k+1}} \min_{y_{k+1} \in \mathcal{D}_{k+1}} d_{\mathbb{C}}^2(z_{k+1}, y_{k+1}),$$

i.e. la paire (z_{k+1}, y_{k+1}) d'états, respectivement mécaniquement admissible et issu de la base de données matériau réduite par l'histoire, les plus proches au sens de la distance $d_{\mathbb{C}}$. La solution est obtenue par minimisation alternée sur des variables continues (z) et discrètes (y), basée sur l'itération de point fixe suivante :

$$z_{k+1}^{(i+1)} = P_{\mathcal{E}_{k+1}} P_{\mathcal{D}_{k+1}} z_{k+1}^{(i)}, \quad (3)$$

où i est l'itération, $y_{k+1}^{(i)} = P_{\mathcal{D}_{k+1}} z_{k+1}^{(i)}$ la projection sur \mathcal{D}_{k+1} et $P_{\mathcal{E}_{k+1}} y_{k+1}^{(i)}$ la projection d'un état matériau sur \mathcal{E}_{k+1} . La nature discrète de la base de données matériau conduit à une complexité combinatoire élevée quand M et N^* augmentent. La proportion de minima locaux augmente alors, ce qui implique une plus grande probabilité pour le solveur de converger vers un minimum local éloigné du minimum global [5].

2.2 Graphe matériau pour encoder le comportement dépendant de l'histoire

Dans cette section, on généralise la notion de base de données matériau à celle de graphe matériau, à partir duquel on extrait les bases de données locales $\mathcal{D}_{e,k+1}$, comme défini dans [3].

Un graphe orienté G (abbr. digraphe) consiste en une paire $(V(G), A(G))$, ou (V, A) , avec V un ensemble de nœuds et A un ensemble d'arcs disjoint de V . Une fonction Ψ_G relie chaque arc à une paire ordonnée de nœuds dans V :

$$\begin{aligned}\Psi_G : A &\mapsto (V, V) \\ a &\rightarrow (uv),\end{aligned}$$

Un coût $c(a)$ est associé à chaque arc $a \in A$.

On note $G = (V, A)$ le digraphe qui encode le comportement du matériau, illustré Fig. 1. Ses nœuds sont les états matériau et ses arcs sont les transitions thermodynamiquement admissibles entre ces états, tel que G ne contienne pas de nœud isolé. Soit un arc $(y_i y_j) \in A$ liant les nœuds $y_i, y_j \in V$, le coût $c_D(y_i y_j)$ est le coût dissipatif de la transition de l'état y_i à y_j :

$$c_D(y_i y_j) = D_{i \rightarrow j},$$

avec $D_{i \rightarrow j}$ le niveau dissipatif de la transition. Ainsi, une transition non-dissipative ou réversible est encodée par deux arcs symétriques, tandis qu'une transition irréversible est représentée par un seul arc orienté tel que $D_{i \rightarrow j} > 0$.

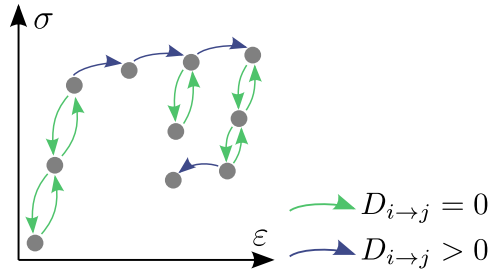


FIGURE 1 – Un digraphe G pour un matériau élastoplastique soumis à une charge et une décharge.

L'histoire d'un état matériau est ainsi encodée dans le graphe G associé à la base de données matériau globale. Ainsi, sélectionner les bases de données locales $\mathcal{D}_{e,k+1}$ revient à chercher les états admissibles dans la base de données matériau, ou, de manière équivalente, à chercher des chemins existant dans le graphe matériau.

En théorie des graphes, un arbre, noté $T = (V(T), A(T))$, est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle. Construit à partir d'une racine $r \in V(G)$, un arbre $T(r)$ contient tous les nœuds de G accessibles à partir de r et les arcs y menant.

Soit un graphe matériau G , qui encode les transitions thermodynamiquement admissibles entre les états de \mathcal{D} , et une racine $y_{e,k}$. Comme illustré Fig. 2, la base de données locale $\mathcal{D}_{e,k+1}$ contient tous les états correspondant aux nœuds de $T(y_{e,k})$:

$$\mathcal{D}_{e,k+1} = \{y_i, \forall y_i \in V(T(y_{e,k}))\}.$$

2.3 Description de l'algorithme amélioré de prédicteur-correcteur

La formulation du problème basée sur la nouvelle définition de la notion de base de données locale ne garantit pas l'unicité de la solution, même lorsque les lois de la mécanique et de la thermodynamique sont respectées. Selon la densité de la base de données matériau (en particulier, le nombre de chemins de décharge), et à cause de la sensibilité de l'algorithme de minimisation alternée aux minima locaux, le solveur DDCM initial ne permet pas de retrouver les solutions de référence d'un problème combinatoire aux échelles globale et locale, comme illustré Section 3.2. Pour plus de détails sur les phénomènes en jeu et l'intérêt du prédicteur-correcteur, le lecteur intéressé peut se référer aux travaux publiés dans [3].

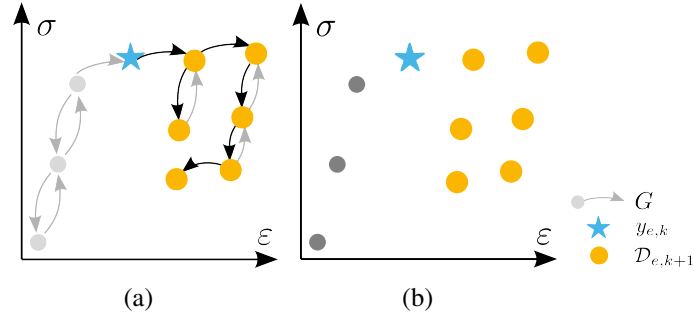


FIGURE 2 – (a) Arbre $T(y_{e,k})$ construit à partir de G (Fig 1). (b) Base de données matériau, racine $y_{e,k}$ et base de données locale $\mathcal{D}_{e,k+1}$.

On suggère d’implémenter un algorithme en deux étapes, basé sur une prédiction non dissipative suivie d’une correction dissipative, inspiré par les méthodes de résolution utilisées pour les modèles de comportement élasto-plastiques (return-mapping). On définit pour cela deux bases de données locales :

- une base de données locale non dissipative pour la prédiction, $\mathcal{D}_{e,k+1}^{\text{pred}} \subset \mathcal{D}_{e,k+1}$, qui contient seulement les états tels que le coût dissipatif d’un quelconque chemin issu de la racine $y_{e,k}$ vers un état de $\mathcal{D}_{e,k+1}^{\text{pred}}$ soit nul, ou de manière équivalente, $\mathcal{D}_{e,k+1}^{\text{pred}}$ contient seulement des états appartenant au même domaine élastique que la racine,
- une base de données locale dissipative pour la correction, $\mathcal{D}_{e,k+1}^{\text{corr}} = \mathcal{D}_{e,k+1}$, obtenue comme défini dans la section précédente en prenant l’état matériau issu de l’étape de prédiction comme racine, c’est-à-dire $y_{e,k+1}^{\text{pred}}$.

Une itération data-driven s’effectue alors en deux étapes illustrées Fig. 3. D’abord, une étape non dissipative, appelée prédiction, où la résolution se fait en prenant $\mathcal{D}_{e,k+1}^{\text{pred}}$ avec la racine $y_{e,k}$ jusqu’à convergence. Ensuite, un calcul dissipatif, ou correction, effectué avec $\mathcal{D}_{e,k+1}^{\text{corr}}$, obtenue en construisant l’arbre de racine $y_{e,k+1}^{\text{pred}}$. En outre, les états matériau de l’étape de correction sont initialisés avec les états issus de la prédiction. Les états corrigés constituent la solution finale de l’incrément de chargement. Cette modification de l’algorithme DDCM n’implique pas d’hypothèse ou de paramètre supplémentaire et est basée uniquement sur la physique.

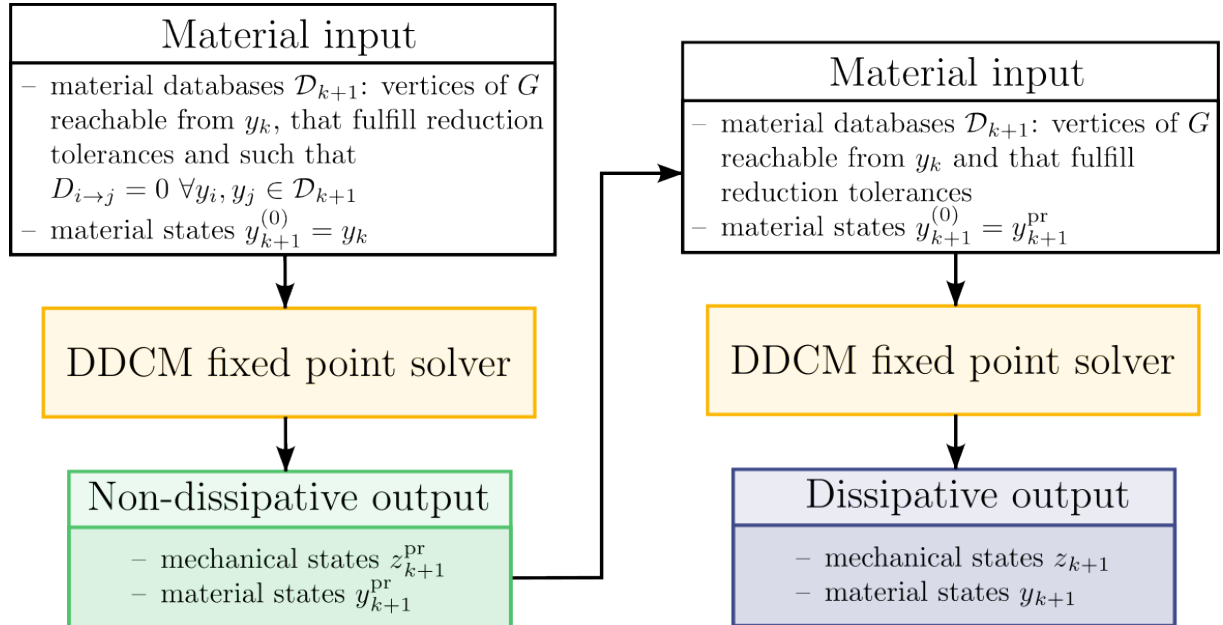


FIGURE 3 – Illustration de l’algorithme DDCM prédicteur-correcteur

3 Résultats et discussion

3.1 Description du problème

La géométrie étudiée est un carré de côté 1 m troué en son centre par un cercle de rayon 0.5 m. La discrétisation est effectuée avec des éléments barres de manière à obtenir un treillis en 2D, illustré Fig. 4a et composé de 102 nœuds et 252 éléments. Les bords supérieur et de gauche sont fixes, les deux autres bords sont soumis au même déplacement allant de 0 à 7 mm, suivis par une décharge jusqu'à 6 mm en 135 incréments, comme illustré Fig. 4b.

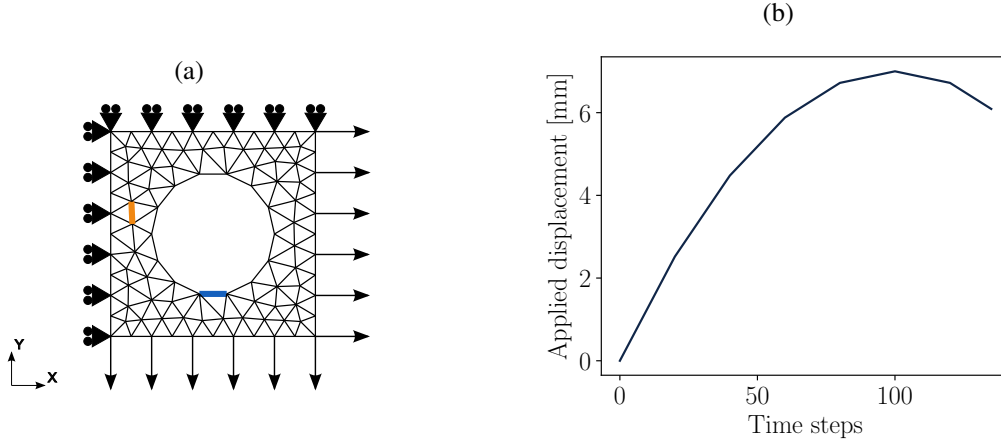


FIGURE 4 – Maillage et conditions aux limites

Une base de données matériau est construite artificiellement à l'aide d'un modèle de comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire. Le critère de plasticité utilisé est :

$$f(\sigma, \varepsilon^p) = |\sigma - H\varepsilon^p| - \sigma_y \quad (4)$$

avec le module d'écrouissage $H = 1$ GPa, la limite élastique $\sigma_y = 250$ MPa et la déformation plastique ε^p . Le module d'Young est $E = 217.5$ GPa et la métrique data-driven est $C = E$.

On construit une base de données régulière qui représente la réponse du matériau soumis à une charge élastoplastique suivie d'une décharge élastique. L'incrément de déformation dans le domaine élastique non écroui et dans la partie dissipative est de 0.001 %. Les chemins de décharge sont générés avec un incrément de déformation plastique de $\Delta\varepsilon^p = 0.04$ % et de déformation élastique $\Delta\varepsilon^e = 0.006$ %.

On définit les arcs du graphe matériau comme suit :

- les domaines élastiques, ou ensembles d'états pouvant être représentés par des graphes complets (toutes les transitions existent), sont encodées comme un graphe couvrant de poids minimum en termes de distance data-driven (Eq. 2), c'est-à-dire tels que tous les nœuds soient connectés dans les deux sens et avec les arcs qui minimisent la distance data-driven cumulée de chaque domaine élastique,
- les domaines élastiques sont liés par des arcs dissipatifs qui encodent l'irréversibilité, c'est-à-dire tels que

$$\int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt > 0.$$

Le graphe matériau final est similaire à celui présenté Fig. 1.

3.2 Résultats préliminaires en élastoplasticité

Cette section vise à illustrer les limites de l'algorithme DDCM original et motive l'introduction du prédicteur-correcteur. On présente donc dans un premier temps les résultats obtenus par le simple algorithme de point fixe (Eq. 3).

Les états mécaniques et matériau, ainsi que les solutions de référence calculées par éléments finis (EF) obtenus à chaque pas de temps pour deux éléments du maillage déformés plastiquement sont illustrés Fig. 5. Bien que la prédiction soit satisfaisante pour l'élément orange, celle calculée pour l'élément

bleu ne correspond pas du tout à la réponse élastoplastique attendue. Un « glissement » est observé pour

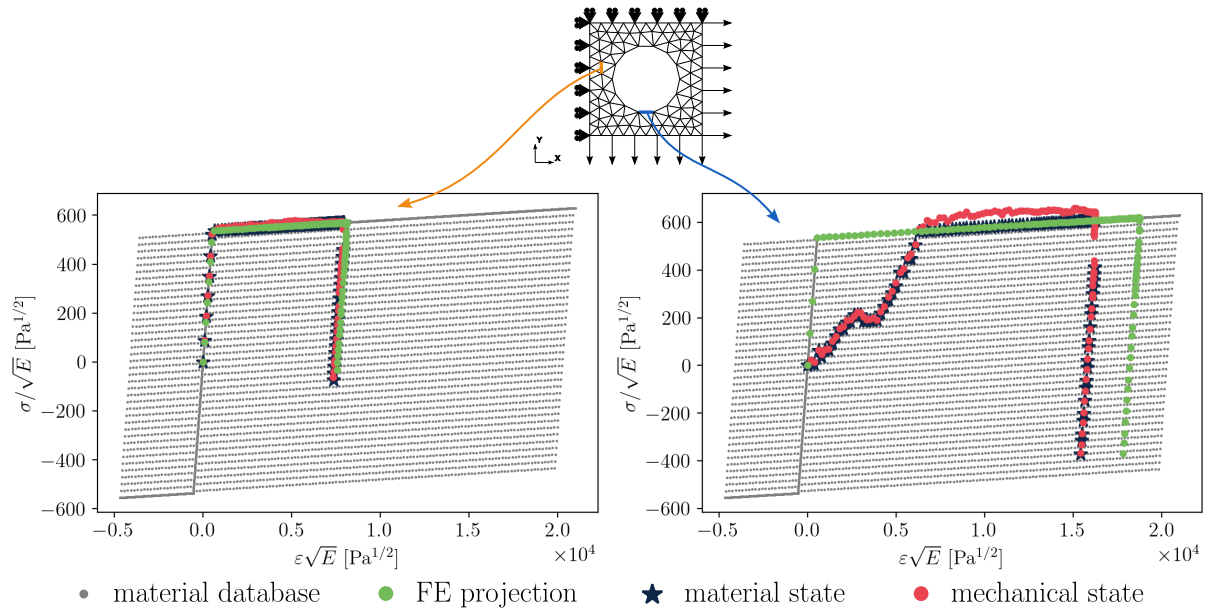


FIGURE 5 – Evolution des états mécaniques, matériau et de la solution EF pour les éléments orange et bleu au cours du chargement

des déformations comprises entre $0 \text{ Pa}^{1/2}$ et $6 \times 10^3 \text{ Pa}^{1/2}$, et la DDCM sous-estime la déformation maximale, bien que l’allure globale du chargement soit correcte. Ces effets sont liés à la discrétisation de l’espace constitutif avec de petits incréments de déformation associés à un choix de métrique qui accorde un poids plus important aux déformations dans le calcul de la distance Eq. 2.

3.3 Résultats avec l’algorithme de prédicteur-correcteur

Le problème de treillis est maintenant résolu avec l’algorithme amélioré. La graphique de gauche de la Fig. 6 montre la solution DDCM pour l’élément orange et est globalement similaire à celle obtenue Fig. 5, mis à part pour la décharge où elle est légèrement surestimée. Le graphique de droite montre les états obtenus pour l’élément bleu : la solution est considérablement améliorée comparativement au calcul précédent. La réponse matériau est bien prédite dans la partie réversible du chargement, bien que le solveur tende toujours à sous-estimer les déformations dans la partie dissipative, ce qui conduit à une anticipation de la décharge. Ces résultats sont dus à la nature même du problème de complexité combinatoire et à la méthode de résolution utilisée. L’amélioration de l’algorithme de minimisation alternée a été étudiée par exemple par Weinberg et coauteurs [8], dont l’approche est basée sur la théorie des jeux et pourrait être implémentée dans le futur.

D’autre part, la Fig. 7a met en évidence les valeurs médianes des erreurs relatives en déformation et en contrainte, calculées comme suit :

$$\text{err}_\varepsilon = |\varepsilon_{e,k} - \varepsilon_{e,k}^{\text{proj}}| / \varepsilon_{e,k}^{\text{proj}},$$

$$\text{err}_\sigma = |\sigma_{e,k} - \sigma_{e,k}^{\text{proj}}| / \sigma_{e,k}^{\text{proj}}.$$

La différence de magnitude entre les médianes des erreurs relatives en déformation et en contrainte est cohérente avec les discrétisations correspondantes de l’espace des phases : avec la distance data-driven, qui devient la distance euclidienne dans l’espace $(\varepsilon\sqrt{E}, \sigma/\sqrt{E})$, la plage des contraintes est plus faible que celle des déformations, et leur discrétisation est plus fine.

Fig. 7b montre la répartition des erreurs relatives dans le maillage à un pas de temps donné de la phase de chargement. Les éléments en abscisse sont classés par déformation croissante. Etant donnée la nature bijective de la réponse matériau en chargement, déformation et contrainte devraient augmenter ensemble. Or, pour quelques éléments labellisés entre 180 et 252, les niveaux de contrainte sont inférieurs à ceux attendus, ce qui correspond à des sous-estimations locales. D’autre part, les erreurs relatives les plus élevées sont cantonnées à des éléments peu déformés : seulement 11 % des éléments présentent des

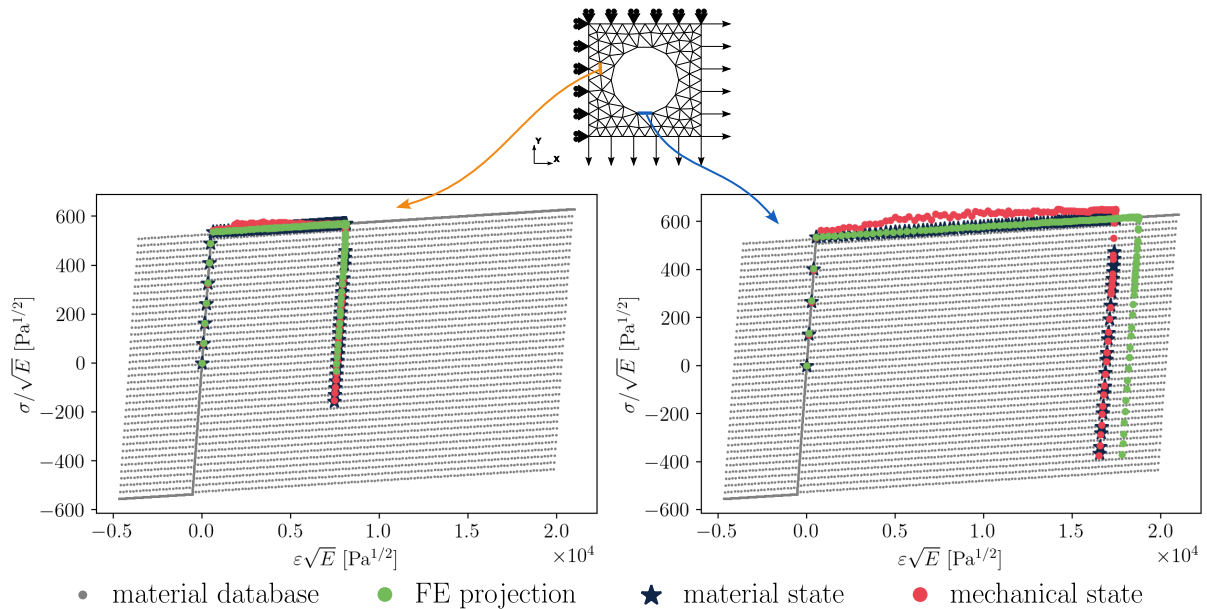


FIGURE 6 – Evolution des états mécaniques, matériau et de la solution EF pour les éléments orange et bleu avec l’algorithme de prédicteur-correcteur

erreurs relatives en déformation supérieures à 100 %, la moitié d’entre eux atteignant des niveaux de déformation inférieurs à $500 \text{ Pa}^{1/2} \approx 0.1 \%$. Enfin, la réponse macroscopique du maillage, évaluée par

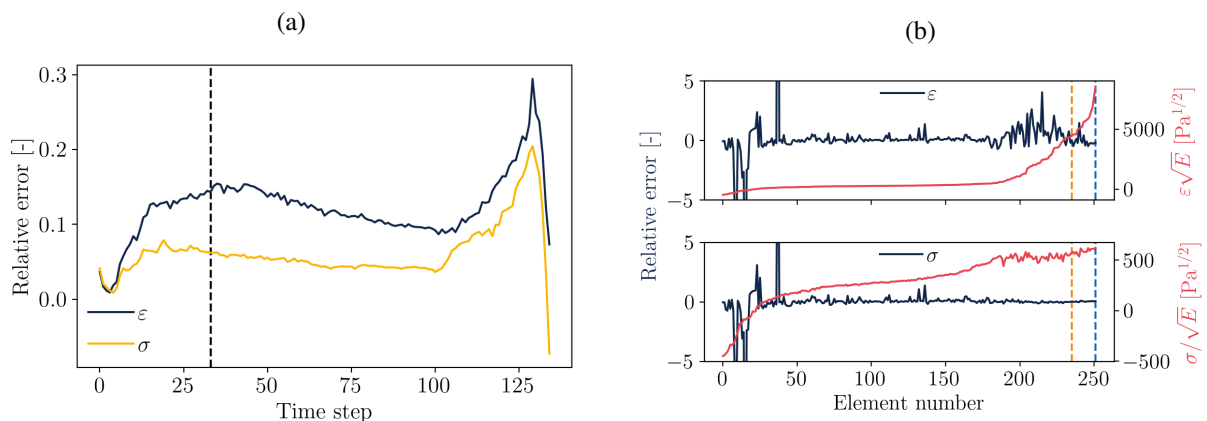


FIGURE 7 – (a) Médianes des erreurs relatives entre états mécaniques et solution EF avec l’algorithme de prédicteur-correcteur. (b) Erreurs relatives au pas de temps 33 (ligne pointillée noire sur le graphique (a)) entre états mécaniques et solution EF, les lignes pointillées orange et bleue réfèrent aux éléments correspondants du maillage Fig. 4a

la résultante des efforts (somme des efforts nodaux) sur le bord droit en fonction du déplacement imposé Fig. 8, est similaire à la solution de référence.

4 Conclusion

Le solveur DDCM standard est fortement affecté par la complexité combinatoire des problèmes de treillis et conduit à des résultats erronés en élastoplasticité. On a ici tiré parti du graphe matériau, utilisé pour représenter le comportement, pour proposer un algorithme de résolution optimisé. A chaque incrément de chargement, la simulation est découpée en une étape de prédiction, effectuée à partir d’une base de données locale iso-dissipative, suivie d’une étape de correction avec la base de données thermodynamiquement admissible. Cette méthode permet d’améliorer sensiblement les résultats tant à l’échelle locale qu’à l’échelle globale.

Il est à noter que l’intégralité de la procédure est indépendante de toute variable interne, ce qui

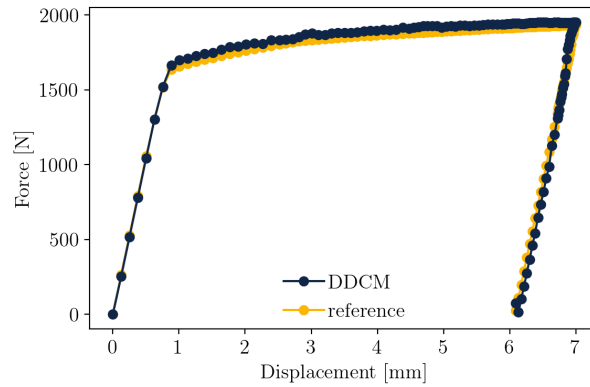


FIGURE 8 – Evolution de la résultante des efforts en fonction du déplacement imposé

permet de l’appliquer à n’importe quel type d’érouissage et possiblement à d’autres comportements anélastiques, moyennant une adaptation de l’espace constitutif.

Fondamentalement, il n’y a a priori aucun obstacle théorique à l’extension de la méthode à l’élasto-plasticité 2D et 3D. Cependant, cette extension implique une augmentation conséquente de la dimensionnalité de l’espace constitutif, et un plus grand nombre de points sera nécessaire pour représenter précisément le comportement du matériau. Le nombre de chemins dissipatifs possibles augmentera encore plus rapidement et le graphe matériau devra nécessairement échantillonner les transitions possibles. La théorie des graphes offre une large gamme d’outils qui permettraient d’établir une description efficace du graphe matériau dans ce contexte.

Références

- [1] T. Bartel, M. Harnisch, B. Schweizer, A. Menzel. *A data-driven approach for plasticity using history surrogates : Theory and application in the context of truss structures*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (414) 116138, 2023.
- [2] K. Ciftci, K. Hackl. *Model-free data-driven simulation of inelastic materials using structured data sets, tangent space information and transition rules*, *Comput. Mech.*, (70) 425–435, 2022.
- [3] H. Dandin, A. Leygue, L. Stainier. *Graph-based representation of history-dependent material response in the Data-Driven Computational Mechanics framework*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (419) 116694, 2024.
- [4] R. Eggersmann, T. Kirchdoerfer, S. Reese, L. Stainier, M. Ortiz. *Model-Free Data-Driven inelasticity*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (350) 81-99, 2019.
- [5] Y. Kanno. *Mixed-integer programming formulation of a data-driven solver in computational elasticity*, *Optimization Letters*, 13(7) :1505–1514, 2019.
- [6] T. Kirchdoerfer, M. Ortiz. *Data-driven computational mechanics*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (304) 81-101, 2016.
- [7] A. Platzler. *Finite strain data-driven computational mechanics. From tailored data to adaptive solvers for multiscale simulations*, Thèse de l’Ecole Centrale de Nantes, 2020.
- [8] K. Weinberg, L. Stainier, S. Conti, M. Ortiz. *Data-driven games in computational mechanics*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (417) 116399, 2023.