

## 16<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures

### Méthode spectrale de représentation et d'appariement de nœuds de deux maillages.

A.Ferhat<sup>1</sup>, C.Remacha<sup>2</sup>, H.Proudhon<sup>1</sup>, D. RYCKELYNCK<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centre des matériaux, France, {amelia.ferhat,henry.proudhon,david.ryckelynck}@mines-paristech.fr

<sup>2</sup>Safran Tech, France, clement.remacha@safrangroup.com

---

#### Résumé —

Dans cet article, nous proposons une méthode spectrale d'appariement entre des nœuds d'un maillage d'une pièce théorique, réalisée par une conception assistée par ordinateur (CAO) d'un noyau d'une aube de turbine et des nœuds d'un maillage de la pièce réelle produite à la suite du processus de fabrication. Nous utilisons une approche modale basée sur l'opérateur de Laplace Beltrami. En effet, les vecteurs propres associés aux petites valeurs propres de cet opérateur nous permettent de définir une nouvelle métrique pour la recherche des correspondances entre les deux maillages.

**Mots clefs** — : Laplacien Beltrami ; Tomographie ; Appariement de nuages de points ; Méthodes spectrales ; Simulations numériques.

## 1. Introduction

Les aubes de turbines hautes pressions subissent durant leur procédé de fabrication des pressions élevées et des températures au-dessus de la température de fusion du matériau ce qui pourrait provoquer des écarts géométriques vis-à-vis de la pièce CAO (Conception Assistée par Ordinateur) dessinée en bureau d'études. Ces variations peuvent apparaître sous différentes formes (sur/sous épaisseurs locales, position des points et axe de perçage ...etc.) Une solution possible pour capter ces écarts géométriques est de tomographier les pièces fabriquées. La tomographie permet de faire une reconstruction d'une 3D dans un tenseur dont la valeur des points dépend de la densité et du facteur d'absorption du matériau.

Aujourd'hui, les simulations numériques par éléments finis sont réalisées sur les données géométriques théoriques, CAO. La variabilité présente en production n'est pas prise en compte. De plus, la géométrie théorique peut être éloignée de la géométrie réelle, ainsi les grandeurs calculées peuvent se retrouver assez éloignées de la réalité. Et pour réaliser des simulations physiques d'une pièce réelle, un maillage 3D (Tomo) issu de la tomographie est pertinent, mais un ensemble de conditions limites doit être appliqué. La difficulté est que la définition de ces conditions limites est très coûteuse en temps et en ressource informatique. Par exemple, plus de 500 conditions limites sont définies lors d'un calcul de durée de vie d'une aube.

Mes travaux de thèse ont pour objectif de développer une méthode qui permettrait de faire des simulations de procédés plus proches de la réalité en prenant en compte les variations et les écarts géométriques qui apparaissent entre la pièce nominale, issue de la conception (CAO), et la pièce fabriquée. Par conséquent, accélérer les dérogations réalisées sur les pièces produites. En effet, lorsqu'une pièce présente une géométrie différente de la définition, en dépassant des critères de qualité géométrique fixés, un calcul thermomécanique doit être réalisé pour pouvoir décider si l'on peut livrer

cette pièce. L'automatisation de cette étape permettrait un gain conséquent du temps de fabrication. Notre méthode d'appariement de deux nuages de points CAO et Tomo se base sur une signature locale, en chaque point, calculée grâce au spectre de l'opérateur Laplacien Beltrami sur les deux nuages de points. Le spectre de cet opérateur relatif à la géométrie CAO, nous permet par un algorithme de spectral clustering [1] de sélectionner, de façon uniforme, sur la géométrie quelques points d'intérêt qui seront appariés aux nœuds du maillage Tomo. Nous avons défini des nouvelles métriques qui tiennent en compte à la fois des coordonnées euclidiennes des nœuds et de leurs coordonnées dans les bases spectrales. Ceci permet de chercher pour chaque point CAO, sélectionné, son correspondant sur la géométrie Tomo en minimisant la distance selon la métrique choisie. Les coordonnées spectrales ajoutent de l'information aux coordonnées euclidiennes dans le cas où l'appariement entre CAO et Tomo en distance euclidienne échoue. Par exemple, dans le cas de parois minces sur les géométries. Cet article est organisé comme suit : la section 2 : définit l'opérateur Laplacien Beltrami et l'intérêt de l'utilisation de ce dernier, la section 3 : traite de l'appariement des nuages de points, et pour conclure la section 4

## 2. L'opérateur Laplace-Beltrami

### 2.1 Définition

L'opérateur de Laplace Beltrami  $\Delta$  est un opérateur différentiel du second ordre défini sur une variété riemannienne (détails [2]) tel que :

$$\Delta := \text{div}(\text{grad}) \quad (1)$$

Le problème aux valeurs propres du Laplacien Beltrami s'écrit :

$$\Delta v = \lambda v \quad (2)$$

Avec  $\lambda$  une valeur propre de l'opérateur et  $v$  son vecteur propre (mode) associé.

L'opérateur  $\Delta$  est semi défini positif, On note par ordre croissant :

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad (3)$$

### 2.2 Représentation spectrale d'une géométrie :

Les modes du Laplacien Beltrami calculés sur un maillage d'une pièce sont une signature spectrale qui permet de représenter la géométrie de la pièce et de décomposer le maillage dans une base modale.

Les modèles CAO et Tomo sont très similaires, leurs signatures spectrales seront proches. La comparaison entre ces deux modèles se feront grâce à leurs modes spectraux.

Nous prenons un exemple d'un maillage surfacique CAO d'un noyau d'aube de turbine (Noyau type Prototuba de Safran). On note  $N = 26798$  le nombre de nœuds du maillage.

Soit  $k \in N$  avec  $k \leq N$ , la restriction aux  $k$  premiers vecteurs propres de l'opérateur Laplace Beltrami calculé sur ce maillage donne des coordonnées spectrales pour chaque point du maillage :

$$p_s = (v_0(p_s), v_1(p_s), \dots, v_k(p_s)) \quad \text{avec } s \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4)$$

La figure 1 montre la représentation surfacique d'un noyau Prototuba avec les modes spectraux du Laplacien Beltrami sur cette géométrie, pour différentes valeurs de  $k$  :

$$k = 100, 200, 500, 1000, 2000$$

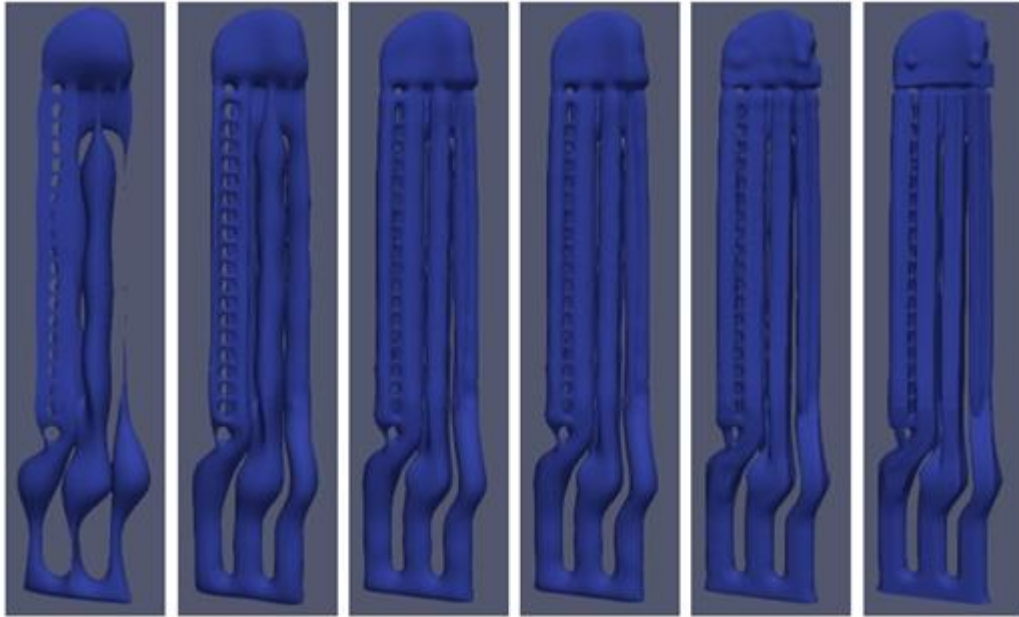


Figure1 - La représentation surfacique d'un noyau Prototuba avec, de gauche à droite : 100,200,500,1000,2000 modes du Laplacien Beltrami. La pièce à droite est la CAO de la pièce.

Il est possible de fixer  $k$  selon la précision et la tolérance de représentation souhaitée. Il est remarquable que plus  $k$  est grand plus la précision de la représentation géométrique augmente.

### 2.3 Comparaison de Laplace Beltrami et Laplace du graphe :

Dans ce paragraphe nous allons illustrer que les modes du Laplace Beltrami ne dépendent pas de la densité des maillages. Ce qui est très important pour nous puisque en général, les maillages des pièces CAO et Tomo sont différents.

Ci-dessous une visualisation du mode 10 du Laplace Beltrami sur une géométrie simple maillée avec différentes densités de nœuds

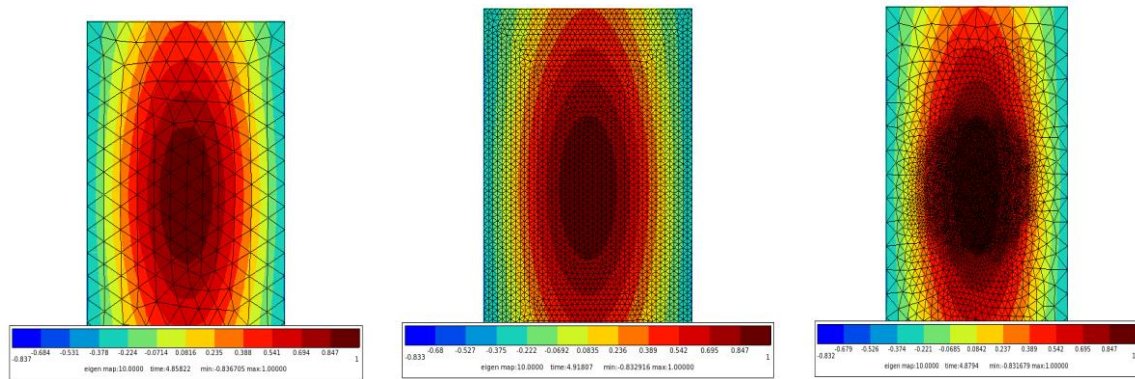


Figure 2 - Projection du mode 10 du Laplace Beltrami calculé sur 3 maillages différents de la même géométrie (de gauche à droite : 662, 10168 et 13715 nœuds).

Nous visualisons les mêmes valeurs du mode sur les 3 maillages ce qui montre que l'opérateur Laplace Beltrami n'est pas sensible aux densités des maillages.

Le Laplacien du graphe [2] est un autre opérateur qui est une discrétisation du Laplace Beltrami mais contrairement à ce dernier il dépend de la densité de maillage comme nous pouvons le voir sur la figure 3.

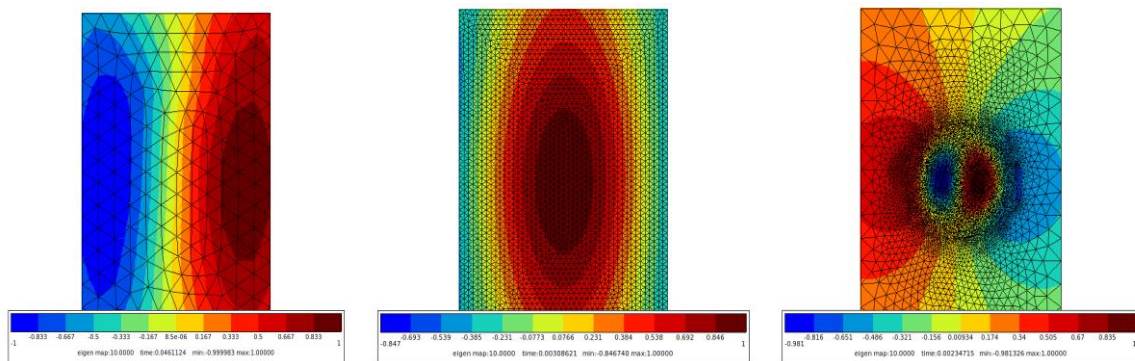


Figure 3 - Projection du mode 10 du Laplacien du graphe calculé sur 3 maillages différents de la même géométrie (de gauche à droite : 662, 10168 et 13715 nœuds).

D'autres opérateurs et des variantes du Laplacien du graphe ont été proposées et comparées entre elle dans l'article [3]

### 3. Appariement des nœuds des maillages CAO et Tomo :

Dans cette section nous montrons des résultats d'appariement entre des nœuds d'un maillage CAO et d'un maillage Tomo du noyau Prototuba de la section 2.

On pose  $n = 36045$  le nombre de nœuds du maillage Tomo.

Notre méthode d'appariement consiste à sélectionner  $k$  points,  $CAO_F = [p_1, p_2, \dots, p_k]$ , sur le maillage CAO, par un algorithme de spectral clustering [1], en utilisant les vecteurs propres de l'opérateur Laplacien Beltrami,  $V_{CAO}$ , et ensuite trouver pour chaque point  $p_i$  de cette sélection son point correspond,  $tomo_j$ , du maillage Tomo en minimisant une distance qui prend en compte les coordonnées euclidiennes et spectrales des nœuds des maillages :

La méthode d'appariement est résumée dans l'algorithme de « matching points » suivant :

---

**Algorithm** matching points algorithm

---

**Require:**  $CAO_F = [p_1, \dots, p_k]^T \in \mathbb{R}^{k \times 3}$ ,  $t = [t_1, \dots, t_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ ,  $V_{Cao}$ ,  $V_{tomo}$

**Ensure:**  $tomo_k = [tomo_1, \dots, tomo_k]$

**for**  $i \leftarrow 1$  to  $k$  **do**

$p_i = (x_{p_i}, y_{p_i}, z_{p_i}, V_{Cao}[p_i, 1 : m])$ ; avec  $m \leq k$

$j = \operatorname{argmin}_{h \in \{1, \dots, n\}} \|p_i - (x_{t_h}, y_{t_h}, z_{t_h}, V_{tomo}[t_h, 1 : m])\|$

$tomo_j = t_j$

**end for**

---

La figure 4 illustre l'algorithme de « matching points » entre des nœuds du maillage CAO sélectionnés par l'algorithme de spectral clustering et des nœuds du maillage Tomo dans le cas de la géométrie Noyau Prototuba, avec  $m = 20$ .

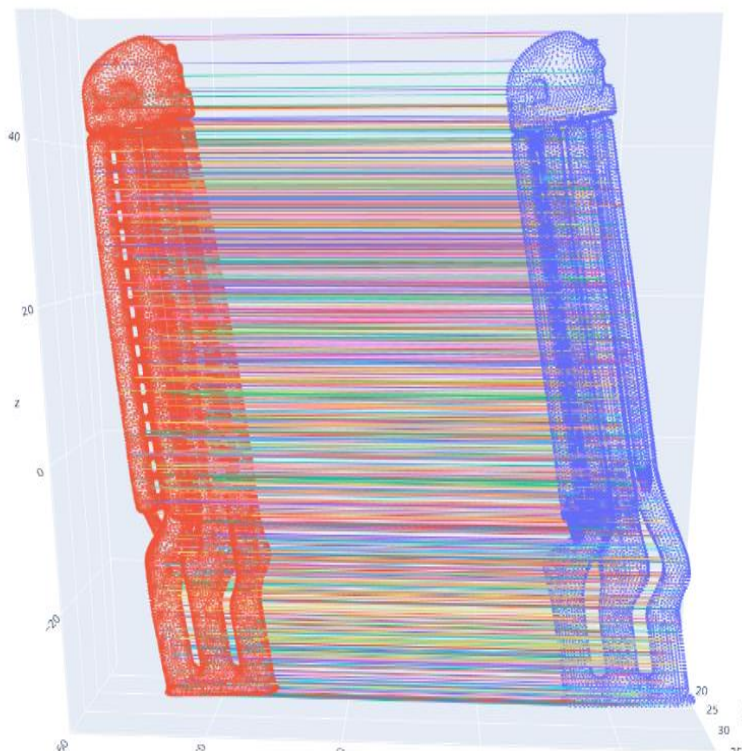


Figure 4 - Appariement de nœuds CAO à droite avec les nœuds Tomo à gauche, en prenant 20 coordonnées spectrales.

Nous remarquons qu'avec un nombre de mode petit, en l'occurrence  $m = 20$ , nous arrivons à établir un bon appariement entre la CAO et la Tomo. Ces coordonnées spectrales servent dans des cas où recherche de correspondance par coordonnées euclidiennes échoue à cause de parois minces dans les aubes par exemple.

## 4. Conclusion :

Le Laplacien Beltrami donne un spectre qui est considéré comme l'ADN de la géométrie. Ce spectre permet de représenter et d'apparier des nuages de points de deux maillages : CAO et Tomo.

Pour la suite nous développons un algorithme de déformation de maillage basé sur cet opérateur, de sorte à modifier le maillage CAO pour prendre en compte les variations géométriques induites par la fonderie. Ce qui nous permettrait de passer d'un maillage théorique à un maillage jumeaux physique issu de la pièce réelle. L'intérêt de la génération du maillage jumeaux physique est de réaliser des simulations physiques qui prennent en compte l'écart géométrique dû au processus de fabrication.

Cette chaîne de déformation de maillage doit être adaptée à toutes les simulations avec des résolutions de type éléments finis. De plus, la mise en donnée réalisée sur la CAO pourra être automatiquement applicable aux maillages jumeaux physique. Cette approche permettrait un gain conséquent en temps de fabrication.

## Références

- [1] A. DAMEL, V. MINDEN, L. YING Simple, direct and efficient multi-way spectral clustering, A Journal of the IMA (2019).
- [2] S.Biasotti, D.Giorgi, G.Patanè, M.Reuter, M.spagnuolo, Discrete Laplace–Beltrami operators for shape analysis and segmentation, Computers & Graphics · June 2009.
- [3] A. M. Bronstein, M. M. Bronstein, U. Castellani, A. Dubrovina, J. Guibas, R. P. Horaud, , R. Kimmel, SHREC 2010: robust correspondence benchmark, Eurographics Workshop on 3D Object Retrieval (2010).