

Assimilation de données et réduction de modèle pour la surveillance d'une structure navale

M. Riou^{1,2}, M. Chevreuil¹, C. Leblond², D. Leduc¹, E. Billaudeau², C. Lupi¹

¹ Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, F-44000 Nantes, France,
{mathias.riou, mathilde.chevreuil, dominique.leduc, cyril.lupi}@univ-nantes.fr

² Centre d'Expertise des Structures et Matériaux Navals (CESMAN), NAVAL Group, F-44340 Bouguenais, France,
{mathias.riou, cedric.leblond, emilien.billaudeau}@naval-group.com

Résumé — Cette étude porte sur l'application de l'assimilation de données à la surveillance en temps réel de l'état structurel d'une pièce d'équipement naval en matériau composite. Cet équipement est instrumenté par des capteurs de déformation fibre optique à réseaux de Bragg, pour capter localement les déformations de la structure. La méthode d'interpolation empirique (EIM), méthode de réduction de modèle et d'assimilation de la donnée, est utilisée pour traduire les mesures locales en une reconstruction de champ globale sur la structure. En effet, elle permet à la fois d'optimiser la position des capteurs en tenant compte des contraintes techniques dues à l'utilisation de la fibre optique et à la fois d'interpréter les mesures pour évaluer le champ des déformations sur toute la structure. Cependant elle se limite à la reconstruction des variables mesurées ou à des fonctions linéaires de ces dernières, c'est pourquoi une méthode d'interpolation empirique modifiée est proposée pour reconstruire le champ des contraintes, qui n'est pas une fonction linéaire du champ partiellement mesuré des déformations.

Mots clés — SHM, Assimilation de données, Structure composite, FBG, EIM.

1 Introduction

La surveillance des structures est un enjeu important pour détecter puis localiser d'éventuels défauts ou anomalies de comportement afin d'en prédire l'impact structurel. En vue de mettre en place une maintenance prédictive plutôt que systématique, le suivi en temps réel de l'état de santé des structures (SHM, Structural Health Monitoring) pour évaluer l'intégrité des structures et leur durabilité est recommandé [2]. Le SHM fait face à des verrous scientifiques variés : choix de la mesure et de la technologie du capteur à mettre en œuvre, façon d'embarquer cette mesure et de la transmettre, organisation des données et analyse et leur exploitation [3].

Le suivi d'une structure repose classiquement sur un modèle paramétré représentatif de la structure et sur des mesures effectuées sur celle-ci. Pour répondre aux objectifs de suivi en temps réel, des réductions de modèle sont introduites afin d'accélérer l'assimilation des données mesurées dans le modèle. Cette réduction de modèle peut être optimisée, en terme de complexité et de qualité de la représentation, en guidant le choix des données à mesurer, par exemple en guidant le placement de capteurs. Ce dernier doit tenir compte des contraintes d'instrumentation de la structures telles que les zones inaccessibles, les zones de contraintes non homogènes, le nombre et la précision des capteurs. Pour répondre à la fois à ce besoin d'optimisation placement des capteurs et au besoin de rapidité de calcul, des méthodes basées sur l'EIM (Empirical Interpolating Method) sont envisagées [8]. Une première phase hors ligne permet de construire une base réduite pour diminuer la taille du modèle représentatif avec l'EIM ou avec une autre méthode de réduction de modèle telle que la PGD [14], tandis que la variable d'intérêt pour le suivi de la santé de la structure est reconstruite lors d'une phase en ligne par interpolation avec l'EIM ou par minimisation des écarts entre les prédictions et les données mesurées en présence de bruit avec la GEIM (Generalized Empirical Interpolating Method) [9] et la REIM (Regularized Empirical Interpolating Method) [12] ou en présence de biais de modèle avec la formulation PBDW (Parameterized-Background-Data-Weak) [10, 13] étendue aux problèmes dépendant du temps dans [15].

Dans ces travaux, l'objectif est de mettre en place ces méthodes pour le suivi d'une structure navale composite instrumentée avec des fibres optiques à réseaux de Bragg (FBG) qui permettent la mesure

localisée de déformations. Ces capteurs ont été sélectionnés pour leur bonne durabilité et leurs propriétés avantageuses en environnement humide. Une EIM est utilisée pour optimiser l'emplacement des capteurs et définir la base réduite optimale associée. Une approximation de faible rang est introduite pour approcher des variables d'intérêt comme le champ de contrainte, de nature différente des grandeurs physiques mesurées. L'étude est réalisée sur une plaque composite et montre les performances des méthodes d'assimilation de données en présence d'erreur de mesure.

2 Méthodes d'assimilation de la donnée basées sur l'EIM

2.1 Placement des points de mesure et définition de la base réduite

On considère un modèle paramétré défini sur le domaine spatial Ω , l'état du système étudié est noté $\varepsilon(x, \mu)$ où $x \in \Omega$ est la variable spatiale et $\mu \in \mathcal{P}$ est l'ensemble des paramètres représentant les sources de variation du modèle. La méthode EIM est utilisée dans un premier temps pour définir les emplacements optimaux des capteurs et pour construire une base réduite associée en vue, dans un second temps, de calculer l'approximation de l'état du système sur l'ensemble du domaine Ω .

Pour répondre à ces deux objectifs la méthode consiste à construire dans une phase dite "hors ligne" une base réduite de fonctions $\Phi(x) = \{\phi_j(x)\}_{j=1}^N$ avec un algorithme glouton [11]. Les emplacements et les orientations des capteurs sont choisis comme les points magiques (X_1, \dots, X_N) de l'EIM dans une zone instrumentable prédéfinie. Cette étape assez coûteuse en temps de calcul peut se faire en amont en bureau d'études. La seconde étape, appelée la phase "en ligne", consiste à approcher ε sur la base réduite avec $\hat{\varepsilon}_N$ sous la forme :

$$\hat{\varepsilon}_N(x, \mu) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\mu) \phi_j(x) \in \mathcal{U}_N \quad (1)$$

où $\{\alpha_j(\mu)\}_{j=1}^N$ sont les coefficients de la représentation à déterminer.

2.2 Reconstruction de champ avec assimilation de données

Soit y^{obs} le vecteur d'observations regroupant les N mesures sur le système. Dans le cas où le modèle représentatif introduit ne présente aucun biais de modèle et les mesures ne présentent aucun bruit, les observations mesurées sont égales aux prédictions du modèle à l'emplacement des capteurs : $y^{obs} = (\ell(\varepsilon^*(X_1)), \dots, \ell(\varepsilon^*(X_N)))^T$ où l'observable $\ell(\varepsilon)$ est une fonction linéaire de ε (cf la GEIM [9]) et $\varepsilon^*(X) = \varepsilon(X, \mu^*)$ désigne l'état du système mesuré pour les valeurs associées des paramètres réels *in situ* μ^* . Les coefficients de la représentation (1) du système mesuré, notés $\{\alpha_j^* = \alpha_j(\mu^*)\}_{j=1}^N$, peuvent alors être définis par interpolation au niveau des points magiques :

$$y_k^{obs} = \ell \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^* \phi_j(x) \right), \quad k \in \{1, \dots, N\}. \quad (2)$$

Dans le cas de mesures bruitées, les observations ne correspondant pas tout à fait aux évaluations du modèle et sont telles que $(y^{obs})_k = \ell(\varepsilon^*(X_k)) + e_k$ avec e_k une variable aléatoire modélisant le bruit de mesure du k^{ieme} capteur. Les coefficients $\{\alpha_j^*\}_{j=1}^N$ de l'approximation (1) sur la base réduite Φ de dimension N sont définis en minimisant l'écart entre les prédictions et les observations. Dans la méthode REIM (Regularized Empirical Interpolation method), $M - N$ capteurs additionnels sont utilisés pour construire l'approximation avec un terme de régularisation sur les N coefficients dans le problème de régularisation tel que :

$$\alpha^* = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^N} \|\mathbb{D}^{-1/2}(\mathbb{B}\alpha - y^{obs})\|_2^2 + \zeta \|\mathbb{C}^{-1/2}\alpha\|_2^2 \quad (3)$$

où $\mathbb{B}\alpha$ et y^{obs} sont les vecteurs des M prédictions et des M observations respectivement (avec $\mathbb{B}_{ij} = \ell(\phi_j(X_i))$), \mathbb{D} est la matrice de covariance de l'erreur et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne L^2 dans \mathbb{R}^M ou \mathbb{R}^N .

Dans le cas où le modèle utilisé présente un biais de modèle par rapport au système mesuré tel que $\varepsilon^{true}(x, \mu^*) = \varepsilon(x, \mu^*) + e_{model}(x)$, la formulation PBDW (Parametrized Background-Data-Weak) construit une approximation de l'état réel du système $\hat{\varepsilon}^{true} = \hat{\varepsilon}_N + \eta_M$ dans laquelle $\hat{\varepsilon}_N \in \mathcal{U}_N$ représente

l'approximation (1) du modèle sous-jacent sur la base réduite Φ de dimension N , et $\eta_M = \sum_{k=1}^M \beta_k(\mu) \phi_k \in \mathcal{V}_M$ est une correction construite dans l'espace des observations de dimension M qui permet de tenir compte des M observations avec $M > N$. L'approximation PBDW est alors solution du problème de minimisation :

$$(\hat{\varepsilon}_N^*, \eta_M^*) = \operatorname{argmin}_{\varepsilon \in \mathcal{U}_N, \eta_M \in \mathcal{V}_M} \|\eta_M\|^2 \text{ tel que } \begin{cases} \hat{\varepsilon}^{true} = \hat{\varepsilon}_N + \eta_M \\ \langle \hat{\varepsilon}^{true}, \varphi \rangle = \langle \varepsilon^{true}, \varphi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{V}_M \end{cases} \quad (4)$$

Le problème de minimisation et sa solution sont détaillés sous forme algébrique dans [10]. La robustesse et la précision du résultat de la PBDW dépendent des espaces d'approximation. Pour vérifier l'erreur de construction, une constante de stabilité ω qui dépend des deux espaces d'approximation, "background" \mathcal{U}_N engendré par la base réduite et "amélioré" fourni par la correction η_M apportée par les capteurs, est introduite :

$$\omega = \frac{\|\eta_M\|}{\|\hat{\varepsilon}_N\|}. \quad (5)$$

2.3 Construction de champ non observé

Dans le but de prendre en considération les données matériaux en tant que paramètres incertains, l'application linéaire de la loi de comportement pour passer des déformations locales observées à la construction du champ de contraintes n'est plus applicable. Afin de permettre l'approximation des contraintes, qui constituent la variable d'intérêt pour les interprétations, les comparaisons avec des critères de rupture ou le dimensionnement en fatigue, nous proposons de les approximer à l'aide d'une approximation de rang faible :

$$\hat{\sigma}_N(x, \mu) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\mu) \psi_j(x) \quad (6)$$

où la base de fonctions $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^N$ est définie avec $\psi_j(x) = \frac{(\sigma - \hat{\sigma}_N)(x, \mu_j)}{\ell(\varepsilon - \hat{\varepsilon}_N)(X_j, \mu_j)}$. Il est à noter que cette approximation n'est plus interpolante.

3 Application

3.1 Modèle paramétré

L'étude est réalisée sur une plaque composite occupant le domaine $\Omega = [0, L] \times [0, l] \times [0, h]$ avec une séquence d'empilement de la plaque spécifiée dans le tableau 1 : elle se compose de six couches de composite polymère renforcé de fibres de carbone qui alternent des plis unidirectionnels (UD) et des plis tissés sollicités.

Numéro du pli	Matériau	Orientation
Pli 1	Tissé	$\pm 45^\circ$
Pli 2	UD	0°
Pli 3	UD	0°
Pli 4	UD	0°
Pli 5	UD	0°
Pli 6	Tissé	$\pm 45^\circ$

TABLE 1 – Séquence d'empilement de la plaque avec les orientations des plis.

En considérant $h \ll l$ et L , le problème peut être défini sur une surface $\mathcal{S} = [0, L] \times [0, l]$ comme illustré sur la figure 1 avec le matériau composite modélisé avec la théorie des plaques stratifiées (CLT, Classical Laminate Theory). Le modèle physique continu de la plaque virtuelle est discrétisé à l'aide de la méthode des éléments finis (FEM) en utilisant des éléments de coque. La plaque est encadrée sur l'une

de ses arrêtes et est libre sur le reste de sa surface. Deux efforts ponctuels \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont appliqués sur les coins A et B opposés à l'encastrement. Ces derniers peuvent être positifs ou négatifs pour solliciter en flexion ou en torsion la plaque.

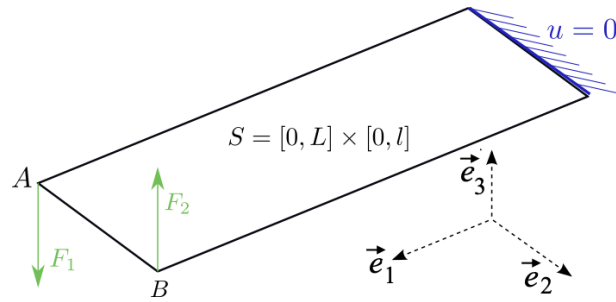


FIGURE 1 – Schéma de la plaque avec la représentation des conditions aux limites et du chargement.

Le modèle continu de la plaque, et par conséquent le modèle discret, est représenté par un modèle paramétrique, de cette façon les paramètres n'ont pas besoin d'être parfaitement connus pour l'approximation. Toutes les propriétés des matériaux sont supposées parfaitement connues, sauf les modules de Young $\{E_1^{UD}, E_1^{Tis}\}$ de l'UD et du tissé, qui sont considérés comme incertains. Les charges $\{F_1, F_2\}$ sont également considérées comme incertaines. Ainsi $\{F_1, F_2, E_1^{UD}, E_1^{Tis}\}$ sont exprimées en fonction d'un ensemble de $d = 4$ paramètres $\mu = \{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)}\} \in \mathcal{P} = [0, 1]^4$.

3.2 Emplacement des capteurs

L'EIM est utilisée pour le placement de capteurs FBG pour la mesure localisée de déformation dans l'axe de la fibre optique. La zone initiale $S_{ins,1}$ de la plaque pouvant être instrumentée est représentée par le rectangle en pointillés noirs dans la figure 2. Cette zone évolue au fur et à mesure du placement de nouveaux capteurs pour tenir compte des contraintes techniques de mise en position de la fibre : un nouveau capteur ne peut pas être positionné dans une zone elliptique schématisée en rouge sur la figure 2 autour d'un capteur déjà en place. La plaque est instrumentée avec un nombre croissant de capteurs de 1 à N dont les emplacements sont définis pendant la phase hors ligne de l'EIM, les capteurs se positionnent dans les deux directions orthogonales \vec{e}_1 et \vec{e}_2 afin de mesurer $\epsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \epsilon \cdot \vec{e}_1$ pour les capteurs représentés par des triangles bleus et $\epsilon_{22} = \vec{e}_2 \cdot \epsilon \cdot \vec{e}_2$ pour ceux représentés par des triangles verts.

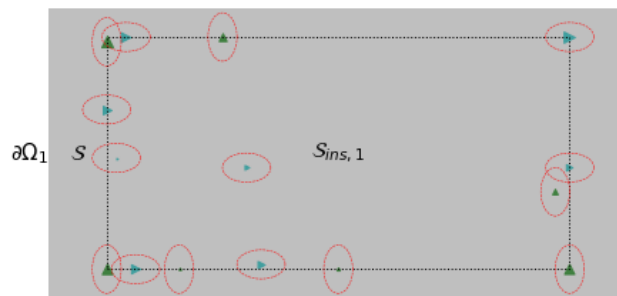


FIGURE 2 – Schéma de la plaque, avec 15 capteurs : en bleu ϵ_{11} , en vert ϵ_{22} et en rouge les ellipses non instrumentables autour des capteurs.

3.3 Approximations par assimilation de mesures avec le modèle parfait

Avec l'hypothèse du modèle parfaitement représentatif, le champ de déformation est approché en ligne avec la représentation (1) et la condition d'interpolation (2) de l'EIM, le champ de contrainte est ensuite défini avec la représentation de rang faible (6). Afin d'évaluer la précision de l'approximation avec le nombre de capteurs, l'erreur quadratique moyenne (MSE : *Mean Square Error*) entre la solution

et l'approximation est introduite :

$$\bar{E}_2^{\hat{v}} = \sqrt{\frac{1}{Q'} \sum_{k=1}^{Q'} \left(\frac{\|\hat{v}(x, \mu_k) - v(x, \mu_k)\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{D})}}{\|v(x, \mu_k)\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{D})}} \right)^2} \quad (7)$$

avec $\|v(x, \mu)\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{D})} = \frac{\sqrt{\int_{\mathcal{D}} v(x, \mu)^2 dx}}{\text{area}(\mathcal{D})}$.

On s'intéresse ici à la déformation et à la contraintes planes $\epsilon_{plane} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + 2\epsilon_{12}$ et $\sigma_{plane} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\sigma_{12}$. Les courbes de la figure 3 présentent l'évolution des erreurs $\bar{E}_2^{\hat{\epsilon}_{plane}}$ et $\bar{E}_2^{\hat{\sigma}_{plane}}$ dans les deux domaines $\mathcal{D} = \mathcal{S}$ ou $\mathcal{D} = \mathcal{S}_{ins,1}$ en fonction du nombre de capteurs N . Ces figures montrent que les approximations convergent vers la solution avec le nombre de capteurs. L'erreur dans l'ensemble de la plaque \mathcal{S} est supérieure à l'erreur dans la zone instrumentable $\mathcal{S}_{ins,1}$ mais reste satisfaisante. Ce constat permet d'envisager une reconstruction dans une zone non instrumentée, par exemple une reconstruction pli par pli et dans toute l'épaisseur de la structure. On observe que l'approximation des contraintes converge avec un taux de convergence semblable à l'approximation de la déformation, suggérant que l'estimation des contraintes est possible avec la technique proposée.

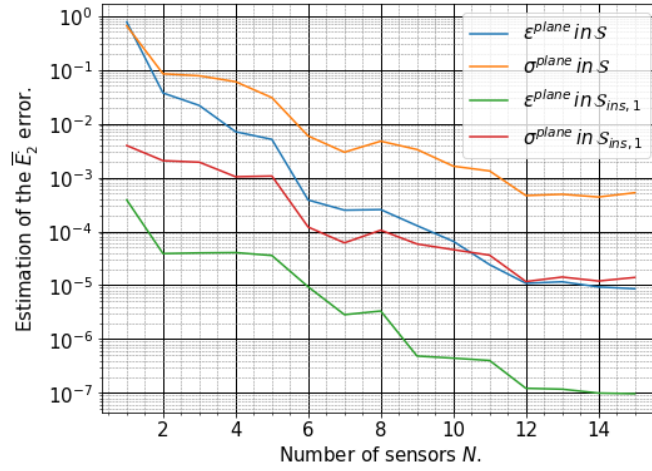


FIGURE 3 – Évolution des estimations d'erreur $\bar{E}_2^{\hat{\epsilon}_{plane}}$ et $\bar{E}_2^{\hat{\sigma}_{plane}}$ en fonction du nombre de capteurs N . Différents domaines $\mathcal{D} = \{\mathcal{S}_{ins,1}, \mathcal{S}\}$ sont considérés.

Grâce à l'approximation de faible rang, la reconstruction de variables non mesurées telles que les contraintes, peuvent être approximées globalement sur la structure au prix d'une perte raisonnable de précision. Ainsi, la méthode permet la reconstruction des champs de déformation et de contrainte en surface et pli par pli à partir de mesures locales de déformation en surface sans utiliser la loi de comportement lors de la phase en ligne.

3.4 Approximations par assimilation de mesures avec un modèle avec biais

Deux modèles représentant des plaques "réelles" avec imperfections sont considérés dans cette section : un premier modèle noté *modèle 1* dans lequel l'encastrement n'est pas réalisé tout le long du bord, un deuxième modèle noté *modèle 2* avec un encastrement parfait mais avec des défauts d'orientation des plis unidirectionnels. Le modèle introduit dans la section 3.1, noté *modèle 0* par la suite, est utilisé comme meilleur modèle pour l'assimilation des mesures sur les modèles 0, 1 ou 2 pendant la phase en ligne.

Une erreur de modèle $\frac{\|\epsilon_{11}^0 - \epsilon_{11}^{1\text{ou}2}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}{\|\epsilon_{11}^0\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}$ est calculée sur les champs de déformation en comparant les modèles mesurés ϵ_{11}^1 et ϵ_{11}^2 des modèles 1 et 2 au meilleur modèle connu ϵ_{11}^0 utilisé comme référence, dans une configuration paramétrique identique. Ce calcul vise à quantifier le biais du modèle 0 (ou erreur

de modèle) par rapport aux modèles “réels” reporté dans le tableau 2.

L’approximation PBDW du champ de déformation ε_{11} est définie avec l’équation (4) avec une base réduite de dimension N pour l’espace “background” \mathcal{U}_N construit à partir du modèle 0 et une base de dimension $M > N$ pour l’espace “amélioré” \mathcal{V}_M . La moyenne et l’écart type de l’indicateur ω introduit dans (5) sont indiqués dans le tableau 2 pour les approximations de chacun des 3 modèles obtenus avec $N = 6$ et $M = 14$. plus l’erreur de modélisation est élevée, plus la valeur de l’indicateur est élevée. La

Modèle	Modèle 0	Modèle 1	Modèle 2
Erreur de modèle	-	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-3}$
Moyenne de ω	$3.27 \cdot 10^{-6}$	$9.19 \cdot 10^{-4}$	$2.39 \cdot 10^{-5}$
Écart type de ω	$2.76 \cdot 10^{-6}$	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$6.13 \cdot 10^{-6}$

TABLE 2 – Comparaison de deux modèles réels 1 et 2 avec le meilleur modèle connu 0; qualification de l’influence du biais sur l’indicateur ω avec $N = 6$ capteurs pour la construction et $M - N = 8$ capteurs pour la correction.

figure ?? montre l’évolution de l’indicateur ω avec N . On observe que cet indicateur diminue jusqu’à atteindre un palier. Ainsi il semble possible, dans le cadre d’une étude au cas par cas, d’utiliser cet indicateur comme moyen de vérifier initialement la qualité du modèle, puis, dans un second temps, d’évaluer l’état structural de la structure surveillée, car les dommages survenant au cours de la durée de vie de la structure pourraient entraîner une augmentation de cet indicateur.

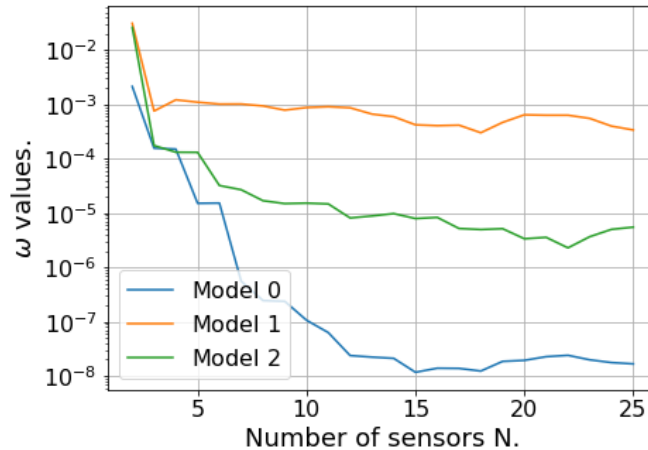


FIGURE 4 – Évolution de l’indicateur ω pour les différents modèles mesurés 0, 1 et 2 en utilisant le modèle 0 comme meilleur modèle connu. Les valeurs de l’indicateur sont calculées avec la PBDW avec $M - N = 4$ capteurs pour la correction.

4 Conclusions et perspectives

Ce travail propose une adaptation de la méthode d’assimilation de données basées sur l’EIM en ajoutant une approximation de faible rang pour reconstruire des variables non mesurées ou non linéaires avec la variable mesurée. Cela permet par exemple d’évaluer le champ de contrainte d’une structure à partir de mesures locales de déformations. L’application à une plaque en composite stratifiée a permis de montrer qu’il est possible de construire le champ de contrainte en utilisant d’une part un modèle paramétré avec des paramètres modélisant les inconnues du modèle et des mesures locales de déformations effectuées à certains emplacements en surface de la plaque.

En complément, la PBDW est utilisée pour mettre en évidence l’écart par rapport au modèle attendu grâce à l’utilisation de l’indicateur ω qui compare la part de correction par rapport à la part de recons-

truction sans correction. La PBDW peut également être utilisée pour une approximation améliorée avec la correction des biais imprévus au delà de ce que propose la méthode EIM.

Des essais complémentaires sont en cours sur une structure réelle, un hydrofoil en matériau composite carbone/époxy pour valider les modèles. Des méthodes de correction du bruit de mesure et des erreurs de modélisation telles que la REIM, la PBDW et la RPBDW sont également en cours d'application sur la structure réelle. Ces essais restent dans le domaine statique linéaire, des études futures sont à envisager pour développer des méthodes applicables en dynamique.

Remerciements

Ces travaux sont financés par Naval Group, Nantes Université, Centrale Nantes et Sirehna dans le cadre d'une thèse au laboratoire conjoint des technologies marines (JLMT : *Joint Laboratory of Marine Technologies*), dans le laboratoire d'accueil du GeM de Nantes Université.

Références

- [1] F. Artiga-Dubois. *Les enjeux du contrôle non destructif des matériaux composites pour applications navales et militaires*, Contrôles non destructifs et matériaux composites journée scientifique et technique, page207-page216, 2007.
- [2] PRECEND. *SHM-France, contrôle santé et monitoring des structures*, SHM-France, 2023.
- [3] COFREND. *cofrend - LE LIVRE BLANC DU SHM 2022*, 2023.
- [4] P. Ferdinand. *Réseaux de capteurs à fibres optiques - Mesures et multiplexage*, TI - Techniques de l'ingénieur, 2008
- [5] P. Ferdinand, S. Magne, V. Dewynter-Marty, S. Rougeault, L. Maurin. *Applications of Fiber Bragg Grating Sensors in the Composite Industry*, DOI :10.1557/mrs2002.126, 2002
- [6] M. Bugaud, P. Ferdinand, S. Rougeault, V. Dewynter-Marty, P. Parneix, D. Lucas. *Health monitoring of composite plastic waterworks lock gates using in Fibre Bragg Grating sensors.*, 4th ESSM and 2nd MIMR conference, 1998.
- [7] P-A. Morvan, Y. Lecieux, D. Leduc, R. Guyard, C. Lupi, X. Chapeleau . *De l'utilisation des capteurs à fibres optiques dans les matériaux composites*, Revue des composites et des matériaux avancés, page191-page205, 2014.
- [8] J-P. Argaud, B.P. Bouriquet, F. Caso, H. Gong, Y. Maday, O. Mula . *Sensor placement in nuclear reactors based on the generalized empirical interpolation method*, Journal of Computational Physics, page354, 2018.
- [9] Y. Maday, O. Mula, A.T. Patera, M. Yano . *The Generalized Empirical Interpolation Method : Stability theory on Hilbert spaces with an application to the Stokes equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, page310-page334, 2015.
- [10] Y. Maday, A.T. Patera, J.D. Penn, M. Yano . *A parameterized-background data-weak approach to variational data assimilation : formulation, analysis, and application to acoustics : PARAMETERIZED-BACKGROUND DATA-WEAK FORMULATION*, Int. J. Numer. Meth. Engng, page933-page965, 2015.
- [11] J.S. Hesthaven, G. Rozza, B. Stamm. *The Empirical Interpolation Method*, Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations, Springer International Publishing, page67-page85, 2016.
- [12] H. Gong. *Data assimilation with reduced basis and noisy measurement : Applications to nuclear reactor cores*, Thèse de doctorat, Sorbonne Université, 2018.
- [13] T. Taddei. *An Adaptive Parametrized-Background Data-Weak approach to variational data assimilation*, ESAIM : M2AN, page1827-page1858, 2017.
- [14] F. Chinesta, E. Cueto, E. Abisset-Chavanne, J-L. Duval, F.E. Khaldi. *Virtual, Digital and Hybrid Twins : A New Paradigm in Data-Based Engineering and Engineered Data*, Arch Computat Methods Eng, 2020.
- [15] W. Haik, Y. Maday and L. Chamoin. *A real-time variational data assimilation method with data-driven model enrichment for time-dependent problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023.