

Facteurs d'intensité de contrainte dans un PSE 3D modélisé par Super-Element

B. Delattre¹, A. Marzoug^{2*}, O. Villars²

¹ LMPS, ENS Paris-Saclay, benoit.delattre@epf.fr

² STELLANTIS, Sochaux, olivier.villars1@stellantis.com

* Stagiaire Stellantis actuellement en thèse à SAFRAN Tech

Résumé — Une étude précédente [5] a proposé un modèle de Point de Soudure Electrique (PSE) fondé sur un superélément (SE) à 16 nœuds, 8 par plaques soudées. La présente étude propose de dériver les FICs à partir des efforts et moments nodaux aux bords du SE dans le cadre de la mécanique linéaire à la rupture. Les FICs 2D axisymétriques proposés par Radaj [7] sont généralisés au SE 3D, l'effet de la courbure par facteurs correctifs dépendant de la courbure [9] est pris en compte. Une comparaison entre le modèle proposé et l'intégrale J numériquement calculée sur le modèle de PSE est réalisée.

Mots clés — Mécanique linéaire de la rupture, Facteur d'Intensité de Contraintes (FIC)

1 Introduction

Le Point de Soudure Electrique (PSE) est une méthode d'assemblage de tôles métalliques sans apport de matière très prisée dans l'industrie automobile. Une voiture particulière peut présenter environ 5000 PSE, réalisés automatiquement par des robots armés de pinces venant appliquer efforts de serrage et fort courant électrique. L'assemblage résultant de la fusion localisée des tôles est considéré comme ponctuel à l'échelle de la structure, au même titre qu'un vissage ou un boulonnage, mais pas à l'échelle du maillage de la dite structure.

Dans une étude précédente, Mainnemare [5] a proposé une modélisation de PSE fondée sur un super-élément (SE) reposant sur 8 nœuds par tôle assemblée, maillée par coques linéaires. La dimension du SE est adaptée à la taille réelle du PSE ainsi qu'à la taille de sa zone d'influence mécanique et cinématique [3]. Le modèle mécanique sous-jacent est obtenu par POD (Proper Orthogonal Decomposition) nous donnant accès aux champs de contrainte et de déformation dans le PSE [4]. L'objectif de cette contribution est de proposer une méthode de calcul des facteurs d'intensité de contrainte adaptée à la description du chargement mécanique imposé au SE.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour les PSE dans la littérature depuis le cas général [8] : certains auteurs se sont concentrés sur les éprouvettes de traction cisaillement [10], [2], d'autres ont aussi pris en considération les éprouvettes de pelage [1], [12] et/ou les éprouvettes de traction pure de type double cup [13], [11], ces derniers s'intéressant en plus au branchement de fissure. La présente étude s'appuie sur la décomposition proposée par Radaj, initialement pour les assemblages symétriques de tôles de même épaisseur [6] avant d'être étendue aux assemblages dissymétriques [7]. Après avoir rappelé cette décomposition écrite dans le cadre d'une structure 2D en déformations planes, nous allons proposer une prise en compte de la courbure du front de fissure s'appuyant sur les travaux de [9] pour l'étendre au PSE 3D. Nous proposerons enfin l'écriture de cette décomposition pour notre SE.

2 Facteurs d'Intensité de Contrainte en 2D

La décomposition proposée par Radaj [6] s'appuie sur des contraintes dites structurelles mesurées dans les tôles loin du PSE et respectant les hypothèses cinématiques des plaques minces. La définition de la zone d'influence mécanique (MIA) du PSE définie par Mainnemare [3] assure que les contraintes au bord du SE vérifient cette hypothèse. De plus, la distance intertôle est considérée comme nulle et le bord de la zone fondue entre les tôles correspond à une singularité géométrique correspondant à la pointe d'une fissure plane et circulaire de rayon le rayon nominal du PSE. La seconde hypothèse de Radaj [7]

est de représenter le PSE par un modèle 2D en déformations planes, ce qui est équivalent à supposer son rayon comme infini et les efforts comme des densités linéiques d'effort.

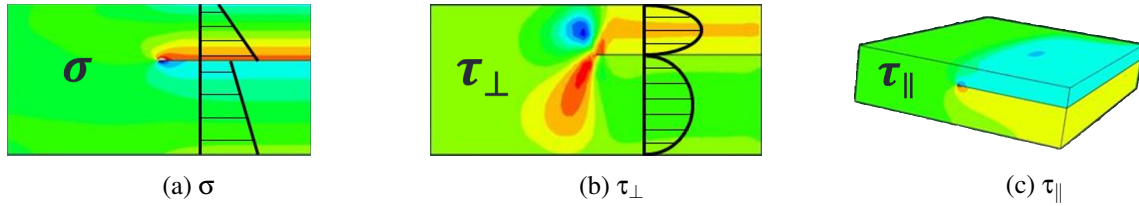


FIGURE 1 – Décomposition des contraintes structurales en contraintes normales (a), cisaillement plan (b) et hors plan (c)

L'état de contraintes structurales sous ces hypothèses se décompose en un terme de contraintes normales σ linéaires de la hauteur z (Figure 1a), un terme de contraintes de cisaillement plan τ_{\perp} quadratiques de z qui s'annulent aux bords des tôles (Figure 1b) et un terme de contraintes de cisaillement hors plan τ_{\parallel} constantes dans chaque tôle (Figure 1c).

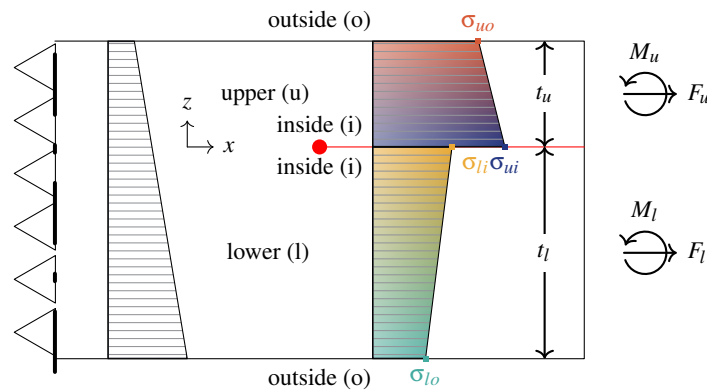


FIGURE 2 – Distribution des contraintes normales suivant [7]

Pour des tôles indicées u et l d'épaisseurs respectives t_u et t_l , la contrainte normale est entièrement définie par les efforts normaux F_u et F_l et les moments plans résultants M_u et M_l calculés à l'intertôle exercés sur chacune des tôles, Figure 2. Cette contrainte étant linéaire dans chaque tôle, elle est entièrement connue par la donnée de 4 valeurs : σ_{uo} , σ_{ui} , σ_{lo} et σ_{li} . Radaj propose d'écrire la contrainte normale dans chaque tôle comme la somme d'une contrainte membranaire moyenne aux deux tôles σ_m , la contrainte membranaire antisymétrique $\sigma_m^{+-}(z)$ linéaire par tôle et ne générant pas de moment, les contraintes radiales de flexion symétrique $\sigma_b^{++}(z)$ et antisymétrique $\sigma_b^{+-}(z)$ linéaires par tôle. La Figure 3 associe les contraintes ainsi décrites avec la décomposition similaire des efforts. Les contraintes membranaires (resp. radiales de flexion) dérivent dans chaque tôle des parties symétriques et antisymétriques des résultantes d'efforts normaux F^{++} et F^{+-} (resp. des moments planaires M^{++} et M^{+-}).

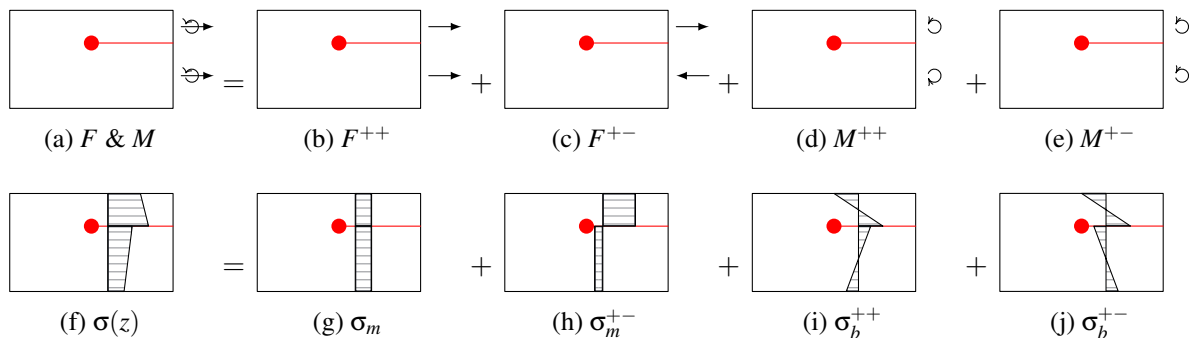


FIGURE 3 – Décomposition des contraintes normales suivant [7]

La décomposition des contraintes étant donnée dans [7], nous allons seulement expliciter ici la décomposition des efforts. Les efforts résultants sont donnés en fonction des contraintes par :

$$\forall e \in \{u, l\}, \quad F_e = \frac{t_e(\sigma_{ei} + \sigma_{eo})}{2} \quad \& \quad M_e = (\delta_{el} - \delta_{eu}) \frac{t_e^2(\sigma_{ei} + 2\sigma_{eo})}{6}$$

avec $\delta_{..}$ le symbole de kronecker.

La contrainte normale moyenne est définie par $\sigma_m(t_u + t_l) = F_u + F_l$. Cela définit les parties symétriques et antisymétriques des efforts normaux à chaque tôle par :

$$\forall e \in \{u, l\}, \quad F_e^{++} = \sigma_m t_e \quad \& \quad F_e^{+-} = F_e - F_e^{++} = t_e \sigma_{me}^{+-} \quad \text{avec} \quad F_u^{+-} = -F_l^{+-}$$

Il faut noter que la partie symétrique des efforts normaux ne crée pas de singularité et n'a donc pas de contribution dans les FICs.

Les parties symétriques et antisymétriques des moments planaires dans les tôles sont définies par (convention retenue pour $t_u < t_l$) :

$$\forall e \in \{u, l\}, \quad (\delta_{eu} - \delta_{el}) M_e^{++} = \frac{M_u + M_l}{2} \quad \& \quad M_e^{+-} = \frac{M_u - M_l}{2}$$

Celles-ci permettent de définir les contraintes nominales symétriques et antisymétriques de flexion par :

$$\forall e \in \{u, l\}, \quad \sigma_{be}^{++} t_e^2 = \frac{1}{2} |6(M_u - M_l) + 3(t_u^2 + t_l^2)\sigma_m| \quad \& \quad \sigma_{be}^{+-} t_e^2 = \frac{1}{2} |6(M_u + M_l) + 3(t_u^2 - t_l^2)\sigma_m|$$

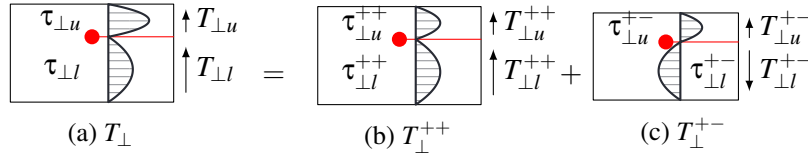


FIGURE 4 – Décomposition des contraintes de cisaillement plan suivant [7]

La forme des contraintes de cisaillement plan $\tau_{\perp}(z)$ est pilotée par un seul paramètre par tôle, la valeur de contrainte maximale dans l'épaisseur $\tau_{\perp e}, e \in \{u, l\}$ que nous pouvons relier à l'effort tranchant sur chaque tôle suivant la Figure 4 :

$$\forall e \in \{u, l\}, \quad T_{\perp e} = \frac{t_e \tau_{\perp e}}{6} \quad \& \quad T_{\perp e} = \frac{T_{\perp e}^{++} + T_{\perp e}^{+-}}{2}$$

La décomposition en parties symétrique et antisymétrique est directe pour les efforts tranchants plans :

$$\forall e \in \{u, l\}, \quad T_{\perp e}^{++} = \frac{T_{\perp u} + T_{\perp l}}{2} = \frac{t_e \tau_{\perp e}^{++}}{6} \quad \& \quad T_{\perp e}^{+-} = (\delta_{eu} - \delta_{el}) \frac{T_{\perp u} - T_{\perp l}}{2} = \frac{t_e \tau_{\perp e}^{+-}}{6}$$

La contrainte de cisaillement hors plan $\tau_{\parallel}(z)$ étant constante par tôle, la décomposition se fait entre le cisaillement moyen $\tau_{\parallel m} = \tau_{\parallel}^{++}$ qui ne génère pas de singularité et la partie antisymétrique du cisaillement τ_{\parallel}^{+-} . La relation aux efforts tranchants hors plan s'écrit :

$$\forall e \in \{u, l\}, \quad T_{\parallel m} = T_{\parallel e}^{++} = \frac{T_{\parallel u} + T_{\parallel l}}{t_u + t_l} = \frac{t_u \tau_{\parallel u} + t_l \tau_{\parallel l}}{t_u + t_l} \quad \& \quad T_{\parallel e}^{+-} = T_{\parallel e} - T_{\parallel m} = t_e \tau_{\parallel e}^{+-}$$

A partir de ces décompositions, Radaj [7] a proposé d'écrire le facteur d'intensité de contrainte 2D équivalent, K_{res}^{2D} , pour un chargement plan, à partir d'une décomposition des facteurs de mode I et II déclinée en fonction des décompositions des contraintes structurales :

$$K_{\text{res}}^{2D} = \sqrt{(K_I^{2D})^2 + (K_{II}^{2D})^2} \quad \text{avec} \quad \forall a \in \{I, II\}, \quad K_a^{2D} = K_{am}^{+-} + K_{ab}^{++} + K_{ab}^{+-} + K_{a\perp}^{++} + K_{a\perp}^{+-}$$

Dans le cadre de cette étude, nous avons validé les approximations numériques des FICs proposées par Radaj à partir de calculs par un solveur à éléments de frontière avec un calcul de l'intégrale J . Cette intégrale a été évaluée par Abaqus pour des modèles 2D pour un jeu de paramètres (t_u, t_l, R) couvrant l'ensemble (discret) des tôles assemblées à Stellantis par PSE en fonction du catalogue fournisseur (avec R le rayon du PSE). Sans rentrer dans le détail des normes de soudage appliquées, les épaisseurs varient de 0.55 à 3mm pour des diamètres de PSE variant de 2.5 à 6mm. En posant $\rho = t_u/t_l$ le ratio d'épaisseur et en supposant que $t_u < t_l$, on retrouve les valeurs suivantes :

FIC	Effort	Composante
K_I^{2D}	F_u^{+-}	$K_{Im}^{+-} = \sqrt{0.1728 - 0.1728\rho}\sigma_{mu}^{+-}\sqrt{t_u}$
	M_u^{++}	$K_{Ib}^{++} = \sqrt{0.1012 + 0.0233\rho + 0.1615\rho^2 + 0.0473\rho^3}\sigma_{bu}^{++}\sqrt{t_u}$
	M_u^{+-}	$K_{Ib}^{+-} = \sqrt{0.0988 + 0.1131\rho^3 - 1.6949\rho^3/(1 + \rho^3)}\sigma_{bu}^{+-}\sqrt{t_u}$
	$T_{\perp u}^{++}$	$K_{I\perp}^{++} = \sqrt{3.7096 + 1.8434\rho - 11.1060\rho/(1 + \rho)}\tau_{\perp u}^{++}\sqrt{t_u}$
	$T_{\perp u}^{+-}$	$K_{I\perp}^{+-} = \sqrt{2.9763 + 2.0234\rho}\tau_{\perp u}^{+-}\sqrt{t_u}$
K_{II}^{2D}	F_u^{+-}	$K_{II m}^{+-} = \sqrt{0.18272 + 2.1728\rho}\sigma_{mu}^{+-}\sqrt{t_u}$
	M_u^{++}	$K_{II b}^{++} = \sqrt{0.0656 - 0.0330\rho - 0.1313\rho^2 + 0.0988\rho^3}\sigma_{bu}^{++}\sqrt{t_u}$
	M_u^{+-}	$K_{II b}^{+-} = \sqrt{0.0667 + 0.0476\rho^3 + 0.6095\rho^3/(1 + \rho^3)}\sigma_{bu}^{+-}\sqrt{t_u}$
	$T_{\perp u}^{++}$	$K_{II\perp}^{++} = \sqrt{-0.0573 + 0.1014\rho + 0.5168\rho/(1 + \rho)}\tau_{\perp u}^{++}\sqrt{t_u}$
	$T_{\perp u}^{+-}$	$K_{II\perp}^{+-} = 0$
K_{III}^{2D}	$T_{\parallel u}^{+-}$	$K_{III}^{+-} = \sqrt{1 + \rho}\tau_{\parallel u}^{+-}\sqrt{t_u}$

TABLE 1 – Décomposition des FICs 2D suivant [7]

3 Effet de la courbure sur les FICs

Le modèle 2D présenté précédemment est équivalent à considérer que le front de fissure est une ligne droite est que le PSE est de rayon nominal R infini. Le PSE étant rond, la fissure est, de fait, un cercle de rayon R . Les normes de soudages internes à Stellantis imposant le diamètre du PSE en fonction de l'épaisseur des tôles à souder et ces dernières ayant un nombre discret de valeurs possibles en fonction du catalogue fournisseur, il est facile de tester les valeurs extrêmes de courbure relative t/R (épaisseur sur rayon). Nous avons choisi de calculer les intégrales J sur un secteur angulaire 3D de $\pi/4$ du PSE aux dimensions du SE sous condition de symétrie cyclique tel que représenté en Figure 5. Nous avons ensuite comparé les valeurs des intégrales J 3D ainsi calculées aux intégrales 2D prédites par le modèle précédent. Les erreurs induites par la non prise en compte de la courbure pour les applications Stellantis peuvent ainsi atteindre 80% pour les modes plans et 2000% pour le mode hors plan. Notons cependant que le mode hors plan pur, induit par la torsion du PSE, est peu observé en service [4]. Cette forte sensibilité à la torsion induit de ne jamais proposer un PSE seul sur une structure mais plutôt une ligne de PSE. Une sollicitation hors plan est ainsi toujours en combinaison d'une sollicitation dans le plan.

Plusieurs modèles dans la littérature [6], [10], [2], [13] proposent des méthodes pour prendre en compte l'effet de la courbure sur le calcul des FICs s'appuyant sur un facteur correctif aux FICs 2D. Ces modèles sont insatisfaisants pour deux raisons principales : les modèles 3D proposés ne tendent pas vers les modèles 2D quand le rayon tend vers l'infini (problème d'inconsistance) et/ou ils ne prennent pas en compte la différence d'épaisseur entre les tôles assemblées (solution symétrique).

L'idée ici est de proposer un facteur correctif dépendant des paramètres géométriques des PSE. Ce facteur doit modéliser le ratio entre l'intégrale J calculée sur le modèle 3D et l'intégrale J^{2D} donnée par

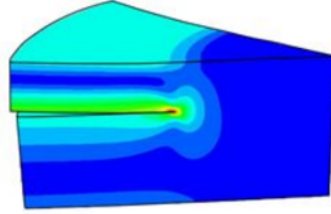


FIGURE 5 – Illustration du Modèle Eléments Finis 3D du PSE à symétrie cyclique

le modèle précédent en fonction des valeurs de (t_u, t_l, R) pour l'ensemble des valeurs discrètes autorisées. Une première analyse des résultats a démontré que ce facteur était invariant par dilatation de la géométrie pour tous les modes de rupture. En d'autres termes, le facteur correctif n'est pas une fonction de (t_u, t_l, R) mais seulement de $(t_u/R, t_l/R)$, les courbures relatives. Par ailleurs, l'intégrale J respectant le principe d'invariance matérielle, nous proposons d'utiliser les courbures relatives totale κ_t et gaussienne κ_g qui ont l'avantage d'être symétriques en u et l :

$$\kappa_t = \frac{t_u + t_l}{R} \quad \& \quad \kappa_g = \frac{t_u t_l}{R^2} \quad (1)$$

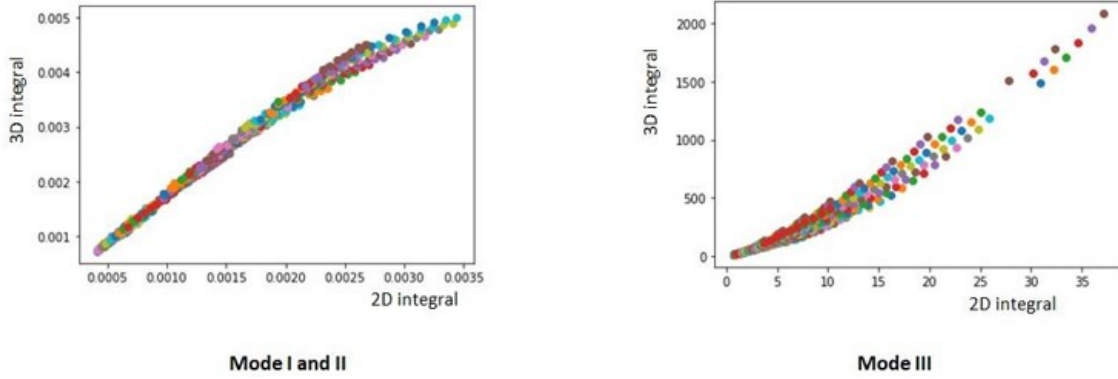


FIGURE 6 – Facteurs correctifs pour tous les calculs suivant le mode sollicité

Nous choisissons de chercher un ensemble de trois fonctions $f_a(\kappa_t, \kappa_g)$, $a \in \{I, II, III\}$ telles que :

$$J = \sum_{a \in \{I, II, III\}} (K_a^{2D} f_a(\kappa_t, \kappa_g))^2 \quad \text{avec} \quad f_a(\kappa_t, \kappa_g) \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad R \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad (t_u, t_l) \text{ restent finies} \quad (2)$$

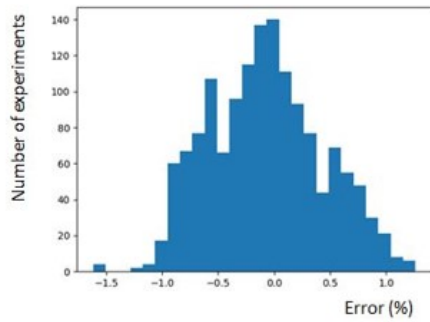
En nous appuyant sur les résultats présentés dans [9] qui propose un développement de Taylor en courbure des quantités d'intérêt, nous avons cherché des fonctions sous forme de sommes de monômes de puissance quelconque :

$$\forall a \in \{I, II\}, \quad f_a = 1 + A_a \kappa_t^{\alpha_a} + B_a \kappa_g^{\beta_a} \quad \& \quad f_{III} = 1 + A_{III} \kappa_t^{\alpha_{III}} + B_{III} \kappa_g^{\beta_{III}} + C_{III} \kappa_t^{-\gamma_{III}} \quad \text{avec} \quad \alpha_{III} \gamma_{III} \geq 0$$

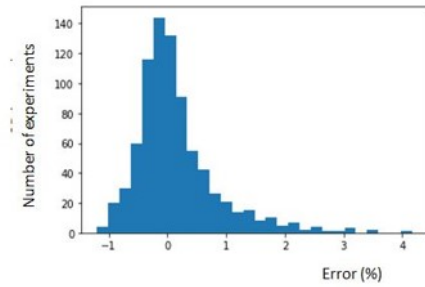
Nous remarquons que la forme retenue pour le mode III est différente parce que le terme en γ améliore significativement les résultats. Les paramètres optimaux ont été obtenus en minimisant la différence entre la valeur calculée par Abaqus en 3D pour J et la solution proposée par le facteur correctif en isolant le mode III, Figure 7. Avec les paramètres optimaux ainsi trouvés, nous pouvons afficher les facteurs correctifs ainsi créés Figure 8. Remarquons que l'erreur induite pour le mode hors plan est plus forte que pour les modes plans, cependant ce mode est moins observé en service.

4 Application au SE-PSE

Une des raisons derrière le développement du modèle SE-PSE [5] est la prise en compte l'influence des défauts de structure proches des PSE : bords de tôle, trous, emboutis, etc. En effet, la présence de ces



(a) Mode I & II



(b) Mode III

FIGURE 7 – Erreurs observées en utilisant les facteurs optimaux

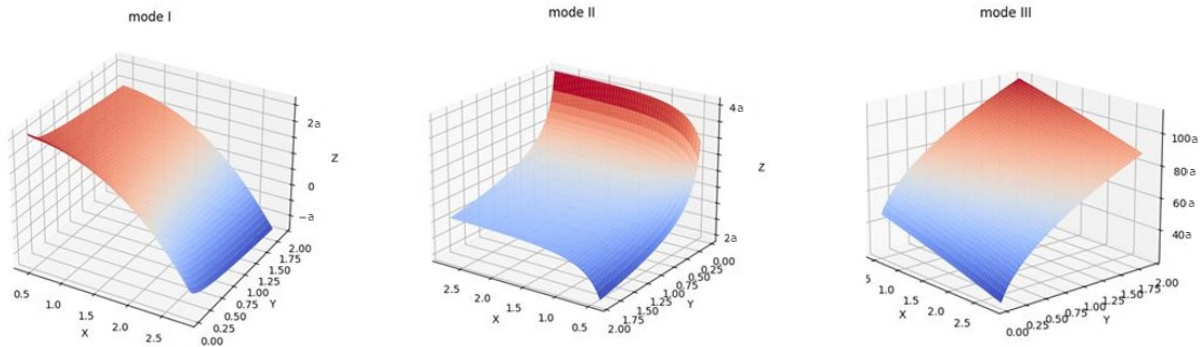


FIGURE 8 – Allures des facteurs correctifs en fonction de $x = \kappa_r$ et $y = \kappa_g$

défauts influence la répartition des contraintes autour du PSE. Ainsi, une éprouvette de traction cisaillement classique Figure 9e verra une fissure de fatigue apparaître sur la tôle la plus fine de l'éprouvette, en bord de PSE, dans l'axe de sollicitation, du côté de la prise en mors Figure 9d. Au contraire, si une telle éprouvette présente deux trous proches du PSE dans l'axe de sollicitation Figure 9a, la zone mécaniquement la plus chargée est désaxée Figure 9c et la fissure de fatigue apparaît avec un angle relativement à la direction de sollicitation Figure 9b.

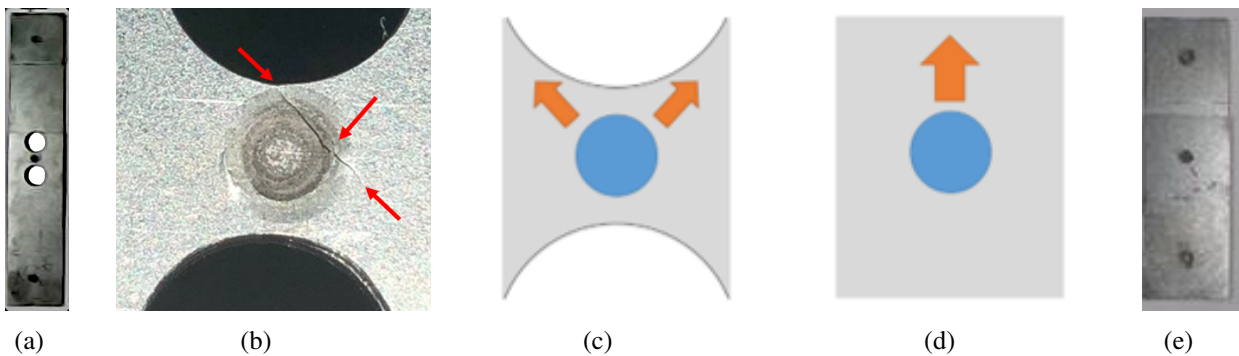


FIGURE 9 – Comparaison des éprouvettes de traction cisaillement trouées (a, b, c) et non trouées (d, e)

Le SE-PSE Figure 10 présente une géométrie cyclique d'angle $\pi/4$ mais son chargement ne respecte pas cette symétrie. Ainsi l'application directe des FICs précédemment introduits n'est pas possible. Nous faisons donc l'hypothèse forte que les effets de bord observés à chaque secteur angulaire du PSE n'influence pas les FICs calculés au point central du front de fissure pour ce secteur. Notons P^i , $i \in [1, 8]$ ce milieu du front de fissure pour le secteur i . Notons de même N_u^i et N_j^i les nœuds du SE pour ce secteur. L'origine O du repère se situe sur l'axe de symétrie du PSE à la hauteur de l'intertôle. Définissons enfin N^i le point situé à l'intertôle entre N_u^i et N_j^i :

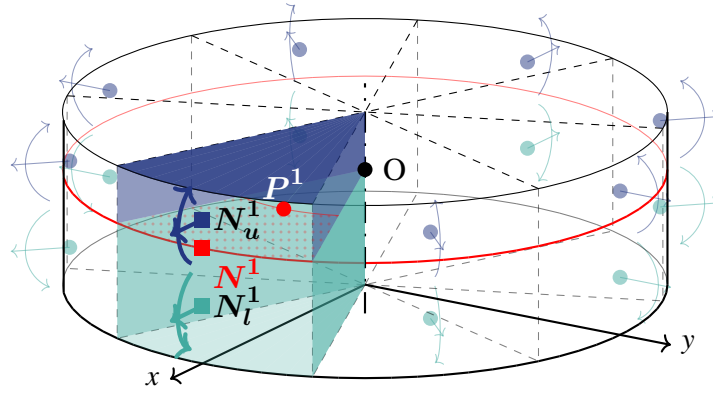


FIGURE 10 – Secteur d'intérêt sur le modèle SE du PSE

$$\underline{ON}^i = \frac{t_u \underline{ON}_u^i + t_l \underline{ON}_l^i}{t_u + t_l}$$

Les efforts imposés par la structure au PSE via le SE se réduisent aux torseurs résultants aux nœuds N_e^i , $i \in [1, 8]$ et $e \in \{u, l\}$. Pour pouvoir exploiter la décomposition proposée ci-avant, ces torseurs doivent être calculés en N^i . Comme indiqué dans la Table 1, pour chaque secteur $i \in [1, 8]$, nous pouvons écrire la décomposition des FICs à partir du torseur résultant en N^i ou des contraintes structurelles induites. La première option ne nécessite que la connaissance des efforts à l'interface du SE. La seconde est rendue plus précise avec le calcul direct du champ de contrainte induit par l'utilisation de la décomposition par POD proposée par [5]. En effet, les FICs résultants ne sont pas linéaires du chargement mais la décomposition 2D Table 1 corrigée en 3D par la prise en compte des effets de courbure Figure 8, elle, l'est. Cette démarche propose donc de calculer des FICs équivalents en 8 points, un par secteur angulaire du modèle de SE-PSE, à partir des seuls torseurs d'effort imposés aux nœuds d'interface du SE avec la structure.

5 Conclusion et perspectives

La présente étude a tout d'abord proposé une réécriture en effort plutôt qu'en contraintes de la décomposition proposée par Radaj [7] des FICs 2D en déformations planes appliqués à un PSE. Cette décomposition Table 1 a le mérite de proposer une décomposition linéaire des efforts pour le calcul des FICs résultant d'un chargement en mode mixte particulièrement bien adapté pour un modèle de PSE sous forme d'un SE tel que proposé par Mainemare [5]. Nous avons validé les formules proposées par Radaj à partir d'un modèle en éléments de frontières avec un modèle éléments finis pour un ensemble de configurations représentant tous les jeux (discrets) de paramètres (épaisseurs de tôle entre 0.55 et 3mm, rayon de PSE entre 2.5 et 6mm) permis par les catalogues fournisseurs des tôles retenues pour les structures automobiles à Stellantis.

Ensuite, nous avons proposé de prendre en compte la courbure relative du front de fissure (1) en proposant des facteurs correctifs (2) respectant l'invariance matérielle du calcul des FICs Figure 8 et consistants avec les facteurs 2D précédemment introduits. Nous avons restreint la recherche de ces facteurs à des monômes en courbures totale et gaussienne mais Stolz et al.[9] ont démontré que cette décomposition peut être dérivée analytiquement à partir d'une décomposition de Taylor. Il y a donc un compromis à trouver entre le nombre de termes en courbure et l'erreur acceptable de l'approximation. C'est la raison pour laquelle le facteur correctif en mode hors plan a un terme supplémentaire par rapport aux facteurs correctifs plans.

Enfin, nous avons introduit une méthode pour appliquer cette décomposition 3D aux différents secteurs du SE-PSE, soit en utilisant les seuls torseurs d'effort résultant soit les modes de contraintes retenus dans la POD du PSE exploité pas le SE. Pour compléter ce travail, l'exploitation des courbes de Wöhler expérimentales disponibles à Stellantis est prévue pour calculer les critères de fatigue fondés sur les FICs proposés. En plus des éprouvettes classiques de traction-cisaillement Figure 9e et de pelage

[1], une éprouvette de traction-cisaillement doublement trouée Figure 9a et une éprouvette de traction-cisaillement désaxée dite de traction-torsion sont disponibles.

Références

- [1] H.T. Kang, P. Dong, J. K. Hong. *Fatigue analysis of spot welds using a mesh-insensitive structural stress approach*, International Journal of fatigue 29(8) :1546-1553, 2007.
- [2] J.A. Newman, N.E. Dowling. *A crack growth approach to life prediction of spot-welded lap joints*, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 21(9) :1123–1132, 1998.
- [3] F. Mainnemaire, B. Delattre, I. Raoult, O. Villars, P.-A. Boucard, P.-A. Guidault. *A numerical analysis to investigate the spot weld local influence*, MATEC Web of Conferences, Fatigue 2018, (165) :21006, 2018.
- [4] F. Mainnemaire, B. Delattre, I. Raoult, O. Villars, P.-A. Boucard, P.-A. Guidault. *A New Spot Weld Reduced Order Model For Fatigue Analysis In The Automotive Industry*, 14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) ECCOMAS Congress 2020, 2021.
- [5] F. Mainnemaire. *Modélisation du point de soudure électrique pour la tenue en service des structures automobiles*, Thèse de l'université Paris-Saclay, 2021.
- [6] D. Radaj. *Stress singularity, notch stress and structural stress at spot-welded joints*, Engineering fracture mechanics, 34(2) :495–506, 1989.
- [7] D. Radaj, S. Zhang. *Stress intensity factors for spot welds between plates of unequal thickness*, Engineering Fracture Mechanics, 39(2) :391–413, 1991.
- [8] J.R. Rice. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, ASME, 379-386, 1968.
- [9] C. Stolz, M. Le Cren, A. Martin. *Intégrale J et champs asymptotiques le long d'une fissure plane*, CSMA 2019, 14ème Colloque National en Calcul des Structures, 2019.
- [10] M.H. Swellam, M.F. Ahmad, R.H. Dodds, F.V. Lawrence. *The stress intensity factors of tensile-shear spot welds*, Computing Systems in Engineering, 3(1-4) :487–500, 1992.
- [11] D.-A. Wang, J. Pan. *A computational study of local stress intensity factor solutions for kinked cracks near spot welds in lap-shear specimens*, International Journal of Solids and Structures, 42(24-25) :6277–6298, 2005
- [12] C. Wei, H. Tae Kang. *Fatigue life prediction of spot-welded joints with a notch stress approach*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, (106) :102491, 2020
- [13] S. Zhang. *Approximate stress intensity factors and notch stresses for common spot-welded specimens*, Welding Journal, (78) :173–179, 1999.