

Eléments finis isogéométriques basés sur l'extraction de Bézier des Bsplines: application au calcul des structures

A. Alia, P. Dufrénoy, G. De Saxcé

Université de Lille, Centre National de la Recherche Scientifique, Centrale Lille, Unité Mixte de Recherche 9013-LaMcube-Laboratoire de Mécanique, Multiphysique, Multi-échelle, France, {ahlem.alia, philippe.dufrénoy, gery.de-saxce}@univ-lille.fr

Résumé — En la comparant aux éléments finis standards, l'analyse isogéométrique (IGA) a montré de plusieurs avantages en termes de précision dans de nombreux domaines d'application comme la mécanique des solides et des structures. Pour rendre l'IGA compatible avec les codes d'éléments finis existants tout en utilisant les propriétés des fonctions de base Bsplines pour la géométrie et l'analyse, la matrice locale de Bézier inversée est combinée à la méthode d'extraction de Bézier. Ainsi, les solutions sont calculées directement sur la géométrie et non aux points de contrôle.

Mots clefs — Eléments finis, analyse isogéométrique, extraction de Bézier.

1. Introduction

Depuis son développement, la méthode des éléments finis (FEM) a été largement utilisée dans la résolution des équations différentielles régissant les phénomènes physiques en mécanique des fluides, des solides et en interaction fluide structure. Elle consiste à calculer la solution aux nœuds du maillage approximant la géométrie exacte du problème. Cette géométrie est souvent générée par des outils de conception assistée par ordinateur (CAO) qui se basent dans la plupart du temps sur des fonctions de base Bsplines ou NURBS (Non Uniform Rational B-splines). Ceci présente plusieurs inconvénients. Dans un premier lieu, la géométrie exacte et tout l'effort déployé pour sa génération ne sont pas explicitement présents dans l'analyse par éléments finis. Le recours à des maillages approximatifs de la géométrie du problème influence le degré de précision des résultats ce qui nécessite le raffinement du maillage pour améliorer sa qualité. Finalement, la procédure du maillage et du remaillage s'avère parfois longue et difficile surtout pour les problèmes les plus complexes.

Dans leur travail, Hughes et al. [8] ont introduit l'analyse isogéométrique, dans laquelle la géométrie exacte est directement liée à l'analyse mécanique du problème. En effet, dans cette méthode les fonctions de base Bsplines ou NURBS initialement utilisées pour la conception de la géométrie exacte sont également employées pour interpoler les grandeurs physiques du problème. En raison de cet excellent avantage, l'analyse isogéométrique a été largement utilisée en mécanique [6-7]. Cependant, en utilisant les Bsplines ou NURBS comme fonctions de base, leur intégration dans un code éléments finis existant n'est pas directe et nécessite plusieurs changements. En effet, contrairement à la FEM où la géométrie est interpolée par des fonctions de forme de Lagrange opérants sur des nœuds de la géométrie, l'analyse isogéométrique utilise des points de contrôle qui n'appartiennent par forcément à la géométrie. Par conséquent, (1) l'application des conditions aux limites définies sur la géométrie s'avère difficile (exp. problème de contact) et (2) la solution est recherchée en ces points de contrôle et donc représente une "solution de contrôle" et non pas "la solution physique" souhaitée. Aussi, les fonctions de base Bsplines ou NURBS s'étalent sur plusieurs éléments d'un seul patch alors que les fonctions de forme de la FEM sont toutes locales à l'élément concerné.

Pour remédier au second inconvénient de l'analyse isogéométrique, Borden et al. [4] ont développé

le concept d'extraction de Bézier des NURBS qui facilite l'intégration de l'analyse isogéométrique dans un code d'éléments finis. Ce concept permet de transformer les éléments NURBS en des éléments Bézier ayant la même structure que les éléments de Lagrange, c'est à dire, chaque fonction de base est locale à un seul élément. Ainsi, avec ce concept d'extraction de Bézier, les seuls changements à faire dans un code éléments finis existant s'effectuent au niveau du calcul des fonctions de forme. Cependant dans cette méthode, (1) le calcul de la "solution physique" à partir de la solution aux points de contrôle reste nécessaire (2) et la difficulté d'application de certaines conditions aux limites se présente toujours.

Tout en utilisant les propriétés des fonctions de base Bsplines pour la géométrie et l'analyse, nous proposons, dans le présent travail, de rendre l'IGA encore plus compatible avec les codes d'éléments finis existants en (1) facilitant l'application des conditions aux limites et (2) en calculant directement la solution physique souhaitée en des points appartenant à la géométrie. Pour ce faire, la matrice locale de Bézier inversée [9] est d'intégrée dans la méthode d'extraction de Bézier [4] (Section 2). Ainsi, les solutions sont calculées directement sur la géométrie et non aux points de contrôle [2-3,10-11]. Finalement, cette méthode est appliquées pour des problèmes de solides et de structures simples (Section 3).

2. Méthode

En CAO, plusieurs formes d'interpolation existent et sont toutes basées sur ce qu'on appelle des points de contrôle. La disposition de ces derniers les uns par rapport aux autres et le type d'interpolation choisi définissent l'allure de la courbe (T) qui suit au mieux ces points de contrôle (Eq. (1)). Aux n points de contrôle $P_{i=1,\dots,n}$ de chaque patch correspond un vecteur de nœuds dans l'espace paramétrique $E = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+p+1}\}$. Il permet de diviser ce patch en plusieurs éléments. Les fonctions de base $N_{i,p}$ (Bspline dans le cas présent) d'ordre p sont construites sur ce vecteur nodal E [8].

$$T(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,p} P_i \quad (1)$$

Les fonctions de bases sont calculées comme suit:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u), \quad p \geq 1$$

Puisque les fonctions de base Bspline s'étendent sur plusieurs éléments, l'utilisation de l'extraction de Bézier [4] permet de limiter leur extension à un seul élément, ce qui facilite l'implémentation numérique. Cette caractéristique de contrôle local est une qualité très recherchée en modélisation numérique comme dans les éléments finis par exemple.

L'extraction de Bézier est basée sur l'opérateur d'extraction C qui lie les fonctions de bases de Bézier à celles de Bsplines et les points de contrôle de Bézier à ceux des Bsplines via les expressions suivantes [4]:

$$Q = C^TP, N(u) = CB(u) \quad (2)$$

où Q est une matrice contenant les coordonnées des points de contrôle de Bézier tandis que B et N sont deux vecteurs contenant, respectivement, les fonctions de base de Bézier et de Bsplines. Cet opérateur est une transformation linéaire qui met une correspondance entre les entités de Bézier et celles des Bsplines. L'extraction de Bézier s'effectue en répétant les nœuds internes du vecteur nodal jusqu'à ce qu'ils aient une multiplicité de p. Puisqu'il est basé sur l'insertion de nœuds, l'opérateur d'extraction consiste à introduire de nouveaux points de contrôle à partir des points originaux à chaque insertion. Ainsi, le nombre de points de contrôle Bézier est plus grand que celui des Bsplines.

En réécrivant l'équation de la courbe (T) donnée par l'équation (1) mais cette fois en termes de fonctions de base de Bézier B et des n_b points de contrôle de Bézier Q obtenus par le processus d'extraction de Bézier, nous obtenons l'expression suivante:

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n_b} B_{i,p} Q_i$$

Les fonctions de base de Bézier se calculent par:

$$B_{i,p}(u) = \frac{1}{2}(1-u)B_{i,p-1}(u) + \frac{1}{2}(1+u)B_{i-1,p-1}(u)$$

$$B_{1,0}(u) = 1 \text{ et } B_{i,n}(u) = 0 \text{ si } i < 0 \text{ ou } i > p+1.$$

Pour se rapprocher le plus possible de la méthode isoparamétrique classique, la géométrie et les champs inconnus sont approximés de manière isoparamétrique en utilisant les fonctions de base de Bsplines (1) directement ou (2) par l'intermédiaire des fonctions de base de Bézier telles que données par l'équation (2). La première approche est celle de l'analyse isogéométrique conventionnelle. Comme les fonctions de base des Bsplines s'étendent sur un espace paramétrique qui se compose de plusieurs éléments, une correspondance entre chaque élément de référence et l'espace paramétrique est nécessaire. Cette dernière n'a pas lieu d'être dans la seconde méthode, celle d'extraction de Bézier grâce à l'introduction de l'opérateur d'extraction de Bézier qui permet de localiser le calcul des fonctions de bases Bspline [Eq. 2]. Dans cette dernière, la géométrie et les inconnues du problème sont approximées comme suit :

$$x(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,p} x_{ci}^{Bs}, \quad v(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,p} v_{ci}^{Bs}$$

où x_{ci}^{Bs} est la coordonnée d'un point de contrôle de Bspline et v_{ci}^{Bs} est la vitesse par exemple en ce point de contrôle. Il convient de mentionner que (1) ces valeurs v_c^{Bs} n'ont pas de signification physique car le point de contrôle peut très bien se situer à l'extérieur de la géométrie, (2) les points de contrôle sont ceux de l'approximation Bspline et (3) qu'il est difficile d'introduire les conditions aux limites dans le cas d'un chargement ponctuel même en utilisant l'équation (2).

Pour faciliter l'application des conditions aux limites, nous récupérons les grandeurs physiques associées aux points physiques appartenant à la géométrie. Pour ce faire, nous optons dans un premier temps pour les points de contrôle de Bézier. Ainsi la géométrie et l'inconnue, la vitesse dans notre cas, seront approximées comme suit :

$$x(u) = \sum_{i=1}^n B_{i,p} x_{ci}^{Bz}, \quad v(u) = \sum_{i=1}^n B_{i,p} v_{ci}^{Bz}$$

où x_{ci}^{Bz} est la coordonnée d'un point de contrôle de Bézier et v_{ci}^{Bz} est, par exemple, sa vitesse. Ensuite, nous évaluons les valeurs physiques de la vitesse aux points de Greville u_G ($u_G = [-1;0;1]$ pour $p=2$) en utilisant les vitesses aux points de contrôle Bézier v_c^{Bz} :

$$v(u_G) = v_G = B_{ez} v_c^{Bz}, \quad B_{ez} = B(u_G)$$

où B_{ez} est une matrice de taille très petite ($((p+1) \times (p+1))$ pour un problème 1D). Elle est la même pour tous les éléments.

En introduisant la fonction de base $B^*(u) = B(u) B_{ez}^{-1}$ [9], nous pouvons interpoler au niveau local (i.e. de l'élément) la vitesse à n'importe quel point $u \in [-1, 1]$ tout en impliquant les quantités physiques aux points de Greville v_G comme suit:

$$v(u) = B^*(u) v_G$$

Ainsi, nous éliminons, de la formulation discrétisée, les vitesses aux points de contrôle ce qui facilite l'application des conditions aux limites [2-3,10-11]. Sur la figure (1) sont montrées les points de contrôle Bspline, Bézier ainsi que les points pour lesquels les inconnues dans la méthode d'extraction de Bézier classique et celle présentée dans ce travail sont calculées. Nous remarquons que contrairement à la méthode classique, les inconnues de la présente méthode sont calculées en des points physiques de la géométrie facilitant l'application des conditions aux limites. Finalement, notons qu'une autre méthode a été proposée pour faciliter l'application des conditions de contact d'un problème 2D mais qui s'avère beaucoup plus coûteuse que la présente méthode [12]. En effet, elle repose sur l'inversion d'une matrice globale assemblée [13-14].

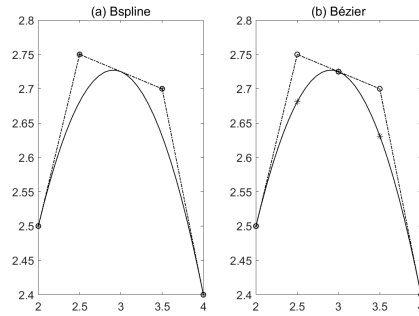


Figure 1 – Courbe de Bspline et Bézier (ligne continue), avec leurs points de contrôle (o) et points où se calculent les inconnues (*) dans la méthode d'extraction de Bézier classique (a) et proposée (b) .

3. Simulations

3.1. Traction d'une plaque infinie perforée

Pour cette première application, il s'agit d'un problème 2D de mécanique des solides. C'est une plaque infinie perforée en son centre (trou circulaire) et soumise à une tension constante dans le plan. La solution analytique existe [5]. Ceci permet de réduire le domaine de calcul en imposant la solution exacte comme condition aux limites sur le modèle réduit tel que montré sur la figure (2) [5]. Nous

prenons exactement les mêmes paramètres de la référence [5] pour pouvoir comparer la contrainte maximale obtenue par les NURBS classique [5] à celle obtenue avec cette présente méthode.

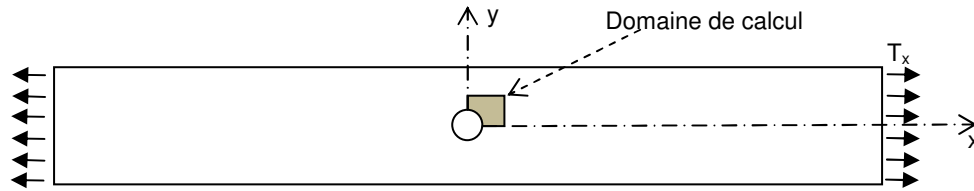


Figure 2 – Schématisation du problème d'une plaque infinie perforée soumise à une traction T_x .

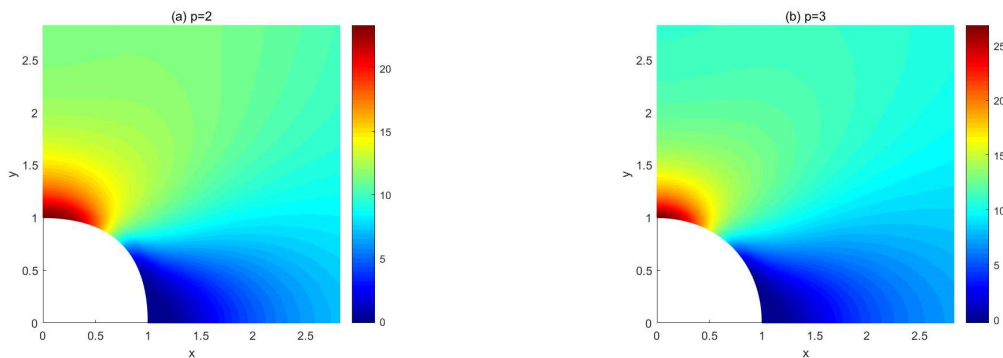


Figure 3 – La contrainte σ_x pour une plaque infinie perforée soumise à une traction $T_x=10$ obtenue par 800 éléments l'IGA: (a) quadratiques ($p=2$), (b) cubique ($p=3$).

La figure (3) représente la distribution de la contrainte σ_x obtenue par des éléments quadratiques et cubiques. Elle est comparable à celle de la référence [5] en particulier en termes de localisation de la contrainte maximale. Cependant, la contrainte maximale obtenue dans le cas des NURBS classiques [5] est en meilleur accord avec la solution analytique. En effet, dans notre cas elle est de 23.36 pour $p=2$, de 26.82 pour $p=3$ alors que la valeur maximale théorique de σ_x est de 30. Notons qu'il a fallu raffiner de plus en plus le maillage dans le cas des NURBS classiques [5] pour obtenir une valeur maximale de la contrainte avoisinant la valeur théorique. Néanmoins, avec un maillage grossier, nous avons obtenu une valeur maximale d'ordre de grandeur assez raisonnable avec la présente méthode.

3.2. Contact de Hertz

Dans cet exemple, nous considérons le problème classique de Hertz. Il s'agit d'une sphère en acier placée entre deux fondations solides. La fondation supérieure est soumise à un déplacement de 2.7mm. En raison de la symétrie du problème statique, une formulation axisymétrique (2D) est adoptée. En analyse isogéométrique, la simulation numérique est basée sur la méthode de pénalité. Le maillage 1 utilisé pour la simulation du module de déplacement est représenté sur la figure (4.a). Sur la figure (4.b) est représenté le module du déplacement calculé par la FEM et les multiplicateurs de Lagrange pour un maillage 2, plus fin que le premier. Nous remarquons une bonne concordance entre les deux résultats même si le maillage 1 de l'IGA est plus grossier.

La pression maximale " p_0 ", le rayon du contact " a " sont donnés sur la tableau 1. L'ensemble des résultats montre une bonne concordance avec la solution analytique. Seulement, dans le cas du maillage grossier 1, l'IGA est plus précise en termes de rayon de contact. Pour bien calculer le rayon de contact en FEM, il a fallu raffiner le maillage.

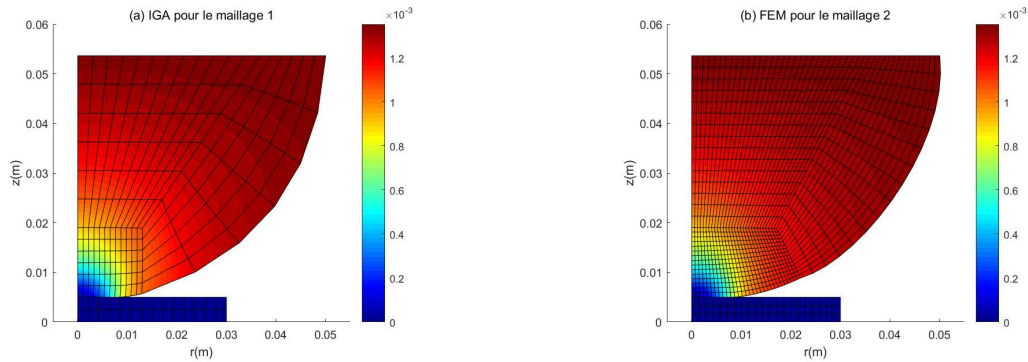


Figure 4 – Le module du déplacement (en m) du problème de Hertz : (a) méthode de pénalité (IGA) pour le maillage 1, (b) méthode des multiplicateurs de Lagrange (FEM) pour le maillage 2.

Table 1 – Comparaison de l'IGA, FEM et solution analytique en termes de la pression maximale " p_0 " et du rayon de contact " a "

Méthode	$P_0(10^{10} \text{ Pa})$	$a(\text{mm})$
Analytique	2.29	8.21
IGA (maillage 1)	2.28	8.19
FEM (maillage 1)	2.28	8.86
FEM (maillage 2)	2.29	8.27

3.3. Réponse vibroacoustique d'une plaque impactée

Pour cette dernière application, nous considérons une plaque d'acier circulaire encastrée en son bord et impactée en son centre par une petite sphère en plexiglas de rayon de 10mm et de vitesse initiale de 0.22m/s. De plus, nous nous intéressons à son rayonnement acoustique quand elle est encastrée dans un baffle rigide et entourée par de l'air. La plaque est modélisée dans le cadre de la théorie de Reissner Mindlin. La partie acoustique est simulée par la méthode de Rayleigh [2]. Dans un premier temps, nous calculons la réponse vibroacoustique lorsqu'une force d'impact analytique donnée par Ross et Ostiguy [15] est appliquée directement à la plaque [10]. Dans un second temps, nous calculons sa réponse mais cette fois-ci en simulant l'impact par la méthode de pénalité et un schéma aux différences centrées [11]. Sur la figure (5), nous représentons les deux résultats en termes de vitesse de vibration de la plaque en des points d'observation se situant sur un rayon de la plaque.

Sur la figure (5.a), nous remarquons que la vitesse de vibration du point d'impact est composée d'une première impulsion suivie d'une zone de vitesse nulle dite de silence puis d'une région marquée par des oscillations. La première impulsion est directement liée à la déformation rapide de la plaque. Cette dernière, génère des ondes de flexion qui se propagent du point d'impact vers le bord de la plaque. Tant que celles-ci ne sont pas réfléchies ou n'atteignent pas le point de contact, celui-ci ne présente aucune vibration (d'où la région à vitesse nulle). Cependant, ce point d'impact commencera à osciller dès qu'il est atteint par les ondes de flexion réfléchies. A fur et a mesure que le point d'observation s'éloigne du centre de la plaque, la zone de silence se réduit, les oscillations apparaissent plutôt et l'impulsion due à la déformation rapide se voit précédée par une petite vibration [Fig. (5.b)]. Cette dernière est due au passage de l'onde de flexion provenant du point d'impact. La vibration des

points d'observation se situant loin du centre de la plaque est due uniquement à la propagation des ondes de flexion [Fig. (5.d)]. Finalement, nous remarquons que les deux résultats concordent. La différence entre les deux résultats est due à la différence des deux forces de contact analytique (F_{Anal}) et numérique (F_{Num}).

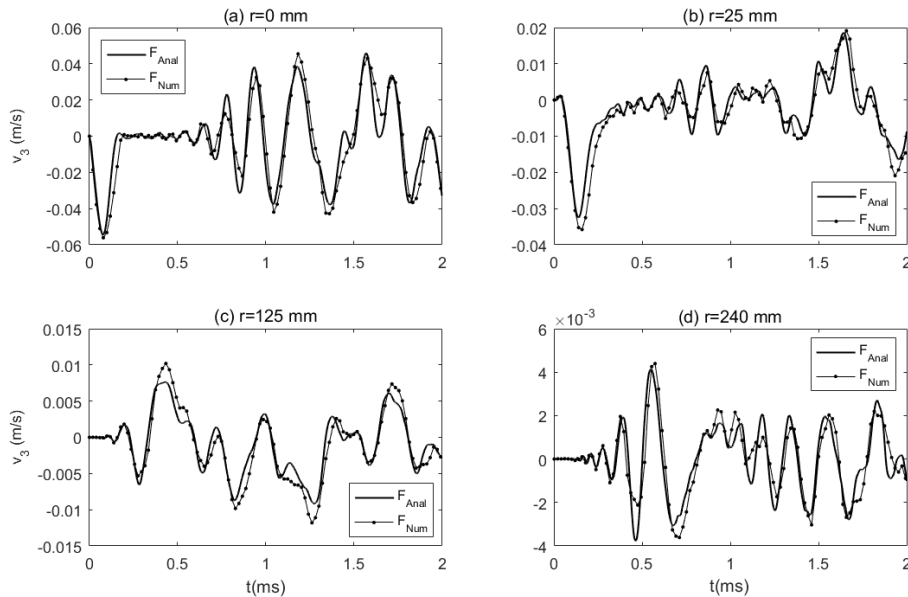


Figure 5 – Variation, en fonction du temps, de la vitesse transversale v_3 de quatre points d'une plaque (de rayon de 250mm) situés à : (a) $r=0\text{mm}$, (b) $r=25\text{mm}$, (c), $r=125\text{mm}$ et (d) $r=240\text{mm}$. Comparaison avec les résultats dus à la force de contact analytique de Ross et Ostiguy [15].

Enfin, la figure (6) montre le champ de pression rayonné au voisinage de la plaque en deux instants [Fig (6.a)]. Il est formé d'un front d'onde circulaire entouré de part et d'autre par des front d'ondes obliques. Le premier est dit onde transitoire initiale qui est due à la déformation rapide de la plaque. Les fronts d'ondes obliques sont dus à la propagation des ondes de flexion dont les vitesses sont plus grandes que la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans l'air. La figure (6.b) représente le champ acoustique dû aux ondes de flexion réfléchies. Enfin, notons que ces résultats sont en bonne concordance avec ceux de la littérature [1,15].

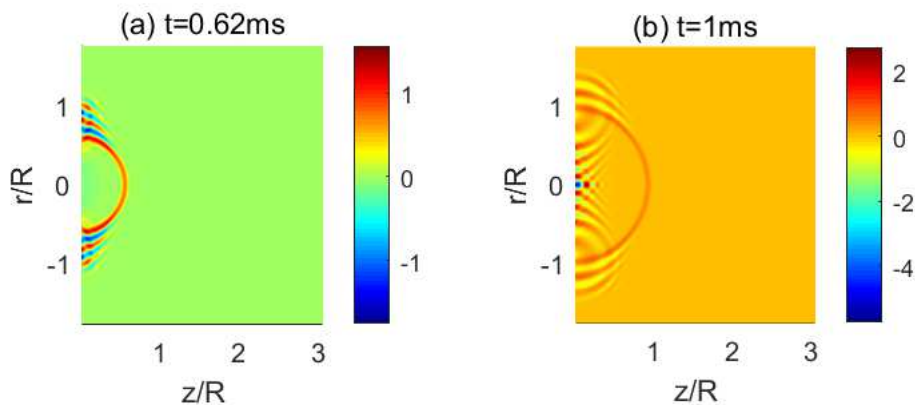


Figure 6 – Pression acoustique rayonnée par la plaque impactée en deux instants où le rayon de la plaque est $R=0.25\text{m}$ la pression est donnée en Pa.

4. Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une méthode basée sur l'analyse isogéométrique mais qui peut facilement être implémentée dans des codes d'éléments finis existants. Celle-ci repose sur l'utilisation du concept d'extraction de Bézier combiné à la matrice locale de Bézier inversée calculée aux points de Greville. Cette combinaison permet (1) un calcul direct de la solution aux points appartenant à la géométrie sans passer par les "solutions de contrôle" et (2) une application aisée des conditions aux limites (cas de contact). Cette méthode permet d'utiliser l'excellente propriété de l'analyse isogéométrique, à savoir la prise en compte dans l'analyse mécanique de la géométrie exacte du problème tout en facilitant son implémentation. Les simulations numériques présentées montrent de très bonnes concordances avec les solutions analytiques et les résultats de la littérature. En particulier en contact [10-11], nous avons pu capter l'essentiel de la réponse vibroacoustique avec des maillages relativement grossiers.

Références

- [1] A. Akay, M. Latcha, Sound radiation from an impact-excited clamped circular plate in an infinite baffle, *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(2), 640–648, 1983.
- [2] A. Alia, Ultrasonic diffraction by a circular transducer: Isogeometric analysis sensitivity to full Gauss quadrature points, *J. Acoust. Soc. Am.*, 147(2), EL74–EL79, 2020.
- [3] A. Alia, N.P. Khanyile, P. Dufrenoy, G. De Saxcé, Vibration and acoustic radiation of an impacted plate: parametric study based on isogeometric analysis, *International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA2022*, pp.4334–4343, 2022.
- [4] M.J. Borden, M.A. Scott, J.A. Evans, T.J.R. Hughes, Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 87(1–5), 15–47, 2011.
- [5] J. A. Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs, *Isogeometric Analysis: Towards Integration of CAD and FEA*, John Wiley & Sons, Chichester, 2009.
- [6] T. Hirschler, R. Bouclier, A. Duval, D. Crozes, T. Elguedj, J. Morlier, Analyse Isogéométrique pour les problèmes d'Optimisation de Forme des Structures Coques, *CSMA 2017*, 15–19 Mai, 2017
- [7] T. Hirschler, R. Bouclier, A. Duval, T. Elguedj, J. Morlier, Isogeometric sizing and shape optimization of thin structures with a solid-shell approach, *Struct. Multidiscipl. Optim.*, 59, 767–785, 2019.
- [8] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(39–41), 4135–4195, 2005.
- [9] L.M. Kamoso, Intégration de la modélisation géométrique dans la méthode des éléments finis de frontière, application à l'optimisation de forme des pièces tridimensionnelles, Thèse de Doctorat, Université Laval, 1999.
- [10] N.P. Khanyile, A. Alia, P. Dufrenoy, G. De Saxcé. Acoustic radiation simulation of forced vibrating plates using isogeometric analysis, *J. Acoust. Soc. Am.*, 152(1), 524–539, 2022.
- [11] N.P. Khanyile, A. Alia, P. Dufrenoy, G. De Saxcé, Node-to-surface contact algorithm for the calculation of the acoustic response, *Multibody Syst. Dyn.*, accepted in Nov. 2023.
- [12] F. M. De Loyola, T. Doca, L. S. Campos, J. Trevelyan, É. L. De Albuquerque, Analysis of 2D contact problems under cyclic loads using IGABEM with Bézier decomposition, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 139, 246–263, 2022.
- [13] J. Cabral, L. Wrobel, C. Brebbia, A BEM formulation using B-splines: I-uniform blending functions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 7(3), 136–44, 1990.
- [14] J. Cabral, L. Wrobel, C. Brebbia, A BEM formulation using B-splines: II-multiple knots and non-uniform blending functions. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 8(1), 51–5, 1991.
- [15] A. Ross, G. Ostiguy, Propagation of the initial transient noise from an impacted plate, *J. Sound. Vib.*, 301(1–2), 28–42, 2007.