

X-Mesh: La méthode des éléments finis avec des éléments dégénérés

A. Quiriny¹, J. Lambrechts¹, N. Moës^{2,3}, J. Remacle¹

¹ iMMC, UCLouvain, {antoine.quiriny, jonathan.lambrechts, jean-francois.remacle}@uclouvain.be

² Nantes Université, Ecole Centrale de Nantes, nicolas.moes@ec-nantes.fr

³ Institut Universitaire de France

Résumé — X-Mesh est une nouvelle approche de *tracking* d'interface qui se base sur la déformation extrême du maillage. L'idée principale est d'autoriser la présence d'éléments dégénérés afin de permettre le relais continu dans le temps de l'interface. Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution d'éléments finis en présence d'éléments dégénérés tant sur le plan de la théorie mathématique que sur la faisabilité numérique. Grâce à une modification judicieuse des équations, nous montrons comment la convergence des éléments finis peut être conservée malgré la présence de bandes d'éléments exactement dégénérés.

Mots clés — Éléments Finis, X-Mesh, Éléments dégénérés

1 Introduction

La méthode des éléments finis est prédominante en mécanique computationnelle depuis le début des années 1970. Outre le fait que les éléments finis reposent sur une théorie mathématique robuste, l'une des raisons fondamentales de leur popularité est qu'ils peuvent utiliser des maillages non structurés, ce qui permet une discrétisation précise des frontières ou des interfaces. Cependant une condition nécessaire et suffisante sur le maillage pour la convergence des éléments finis n'a toujours pas été trouvée. Historiquement, la première condition suffisante a été développée de manière indépendante par Zlamal et Ženíšek en 1968 et 1969 dans [1] et [2]. Il s'agit de la *Minimum angle condition* qui stipule que tant que les angles du maillage sont bornés inférieurement la méthode des éléments finis converge. Cette condition a été relaxée ensuite indépendamment par [3] [4] et [5] mais l'histoire a principalement retenu le papier de Babuška et Aziz de 1976 avec la fameuse *Maximum angle condition*. Cette condition stipule que les éléments finis convergeront tant que les angles du maillage sont bornés supérieurement par une valeur plus petite que 180° . Ces deux conditions ont pour simple effet d'interdire l'utilisation de certains types d'éléments dégénérés dans les maillages. Lorsque l'on parle d'éléments triangulaire dégénérés en 2D, il en existe 3 types, représentés à la figure 1.

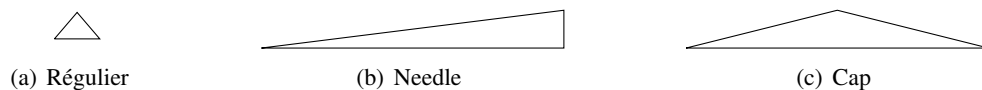


FIGURE 1 – Les trois types d'éléments dégénérés en 2D

Le premier type, que l'on appellera régulier, correspond à la dégénération du triangle en un seul point. Cependant, ses angles restent bornés et donc respectent les deux conditions présentées précédemment. Les needles dégènèrent en un segment en créant un angle qui tend vers 0 tandis que les caps en créent deux ainsi qu'un angle de 180° . Pour que la *minimum angle condition* soit respectée il faut alors qu'aucun needle et aucun cap ne soient présent dans le maillage. Tandis que pour la *maximum angle condition*, celle-ci correspond à interdire uniquement les caps.

Pour développer ces deux conditions, [1] et [3] ont prouvé la convergence de l'interpolation de Lagrange sous ces deux conditions. En utilisant le lemme de Céa les auteurs ont ensuite pu conclure que comme il est possible de construire une solution qui converge, alors la solution obtenue par éléments

finis converge également car elle minimise l'erreur (dans la norme énergétique). Etant donné que ces deux conditions se basent sur la théorie de l'interpolation, il n'est pas surprenant que celles-ci trouvent des similitudes avec les résultats obtenus dans le cadre de l'erreur d'interpolation. Ainsi, en 1919 Rademacher démontre dans [7] et [8] la convergence de l'aire de l'interpolation (qui implique la convergence des gradients [6]) si le maillage respecte la *minimum angle condition* et en 1921 Young démontre dans [9] cette même convergence mais pour la *maximum angle condition*. Ces deux conditions ont donc été développées plus de 50 ans avant d'être redécouvertes dans le cadre des éléments finis.

Il est important de noter qu'il s'agit de conditions suffisantes et non nécessaires. Dans leur papier sur la *maximum angle condition*, Babuška et Aziz évitent d'ailleurs d'utiliser le terme nécessaire en qualifiant la condition d'essentielle [3]. Les maillages modernes ont dès lors tout fait pour générer des maillages qui limitaient la présence d'éléments caps. Récemment, nous avons proposé une nouvelle méthode de *tracking* d'interface, appelée X-Mesh, qui se base sur la déformation extrême du maillage afin de répondre aux limitations que l'on pouvait rencontrer dans d'autres méthodes [10, 11]. Cette méthode a pour but de respecter quatre propriétés désirées :

- P1** La continuité dans le temps de la déformation du maillage avec une topologie fixe.
- P2** La conformité du maillage aux interfaces physiques *sharp*.
- P3** La faisabilité des changements topologiques de l'interface.
- P4** L'utilisation de l'approximation éléments finis classiques.

Les propriétés P1, P2 et P4 assurent que la solution réelle aux noeuds évolue dans le temps de façon régulière. Jusqu'à présent aucune méthode ne permet le respect de ces quatre propriétés. La propriété P3 a toujours été considérée comme incompatible avec les trois autres : de grands déplacements et des changements topologiques de l'interface ont toujours nécessité une adaptation de maillage, un enrichissement de la solution discrète ou bien une non-conformité du maillage à l'interface. En autorisant l'apparition d'éléments dégénérés, la méthode ouvre un nouveau paradigme pour le déplacement de maillage. Alors que les méthodes *Arbitrary Lagrangian Eulerian* (ALE) classique nécessite le remaillage du domaine lors de grands déplacements de l'interface et/ou des changements topologiques, l'approche X-Mesh conserve le même maillage durant l'entièreté de la simulation. La méthode se base sur le relais continu de l'interface entre les différents noeuds du maillage. Ce relais est représenté à la figure 2 où l'on peut observer deux phases (en bleu et en noir) et l'interface entre celles-ci. Le maillage se déforme de sorte à être conforme à l'interface et un seul noeud bouge avec l'interface (a) jusqu'à atteindre un second noeud (b) et lui transmettre l'interface de façon continue dans le temps (c). Après cette opération de relais le noeud qui a été déplacé de sa position initiale et qui ne suit plus l'interface est progressivement remplacé vers sa position initiale. Le noeud qui a pris le relais suit maintenant l'interface (d).

Avec cette nouvelle méthode la création d'éléments dégénérés est indispensable et une question se pose :

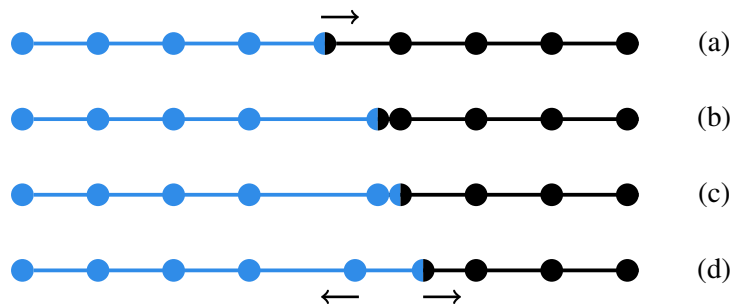


FIGURE 2 – X-Mesh : relais continu de l'interface

si la fameuse *maximum angle condition* est une condition qui est suffisante mais pas nécessaire, est-il possible de réaliser des simulations avec des éléments dégénérés comme dans le cas d'X-Mesh ? Cette question est la motivation même de ce travail qui mêle théorie mathématique des éléments finis et faisabilité numérique.

Dans la suite de ce travail nous considérerons le problème de poisson suivant :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé, trouver $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = u_D \quad (1)$$

où $\partial\Omega$ correspond à la frontière du domaine et u_D à la condition de dirichlet qui y est imposée.

2 Éléments finis dégénérés

Étant donné que la *maximum angle condition* se base sur la théorie de l'interpolation il est normal d'obtenir les mêmes résultats mais également d'en subir les limitations. Plusieurs papiers ont montré que la présence de caps dans le maillage n'empêchait pas la convergence des éléments finis [6, 12, 13, 15]. Un très bel exemple est celui de [15] présenté aux figures 3 et 4. Dans cet exemple, *Apel et al* prennent une famille de maillage \mathcal{F}_1 qui respecte la *maximum angle condition* et le subdivise en créant des éléments qui ne la respecte plus (famille \mathcal{F}_2). L'espace des fonctions de la famille de maillage \mathcal{F}_1 est incluse dans l'espace des fonctions de la seconde famille de maillage \mathcal{F}_2 . Le lemme de Céa permet alors de dire que la solution sur le maillage avec caps sera au moins aussi bonne que celle sans caps.

Puisque l'erreur commise par l'interpolation est plus grande que celle commise par les éléments finis, il

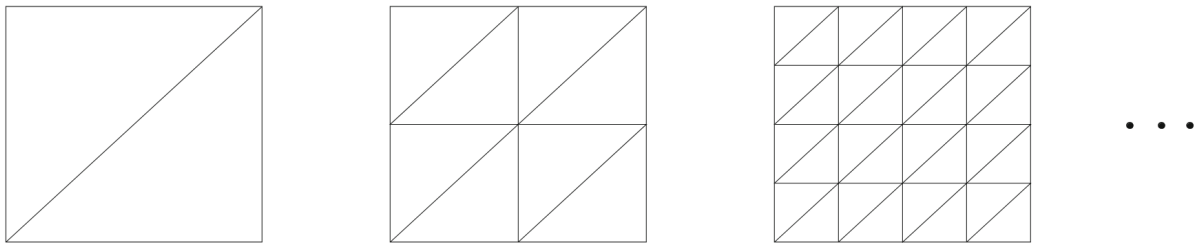


FIGURE 3 – Famille de maillage \mathcal{F}_1 respectant la *maximum angle condition*

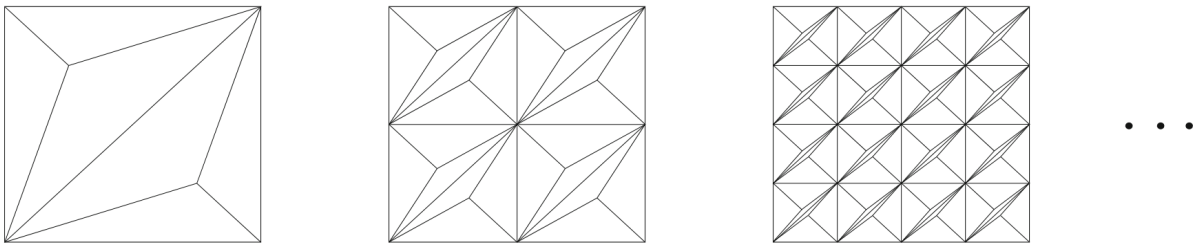


FIGURE 4 – Famille de maillage \mathcal{F}_2 ne respectant pas la *maximum angle condition*

est à même de se demander comment est construite la solution éléments finis (FEM). Lors de la résolution du problème 1 avec les éléments finis, ceux-ci vont chercher à minimiser l'erreur commise sur les gradients entre la solution analytique et la solution FEM. Cette erreur est mesurée dans la norme énergétique du problème qui correspond dans le cas de 1 à la semi-norme H_1 . Puisque les éléments finis cherche à minimiser l'erreur sur les gradients, au lieu de construire une solution qui se base sur l'interpolation, il est plus intéressant de tenter de construire la solution en se basant sur les gradients. C'est sur base de ce principe que Kůčera a travaillé pour obtenir une meilleure condition suffisante [12] et a réussi à prouver que les caps isolés ne posaient pas de problèmes pour la convergence des éléments finis. Si l'on se soustrait au formalisme mathématique la démonstration peut être présentée comme un choix différent de solution. La solution construite sur le cap représenté à la figure 5 utilise le gradient de la solution au pied de la hauteur dans la direction de celle-ci.

Sans perte de généralité nous allons considérer la base du triangle horizontale et sa hauteur verticale. Au lieu de considérer l'interpolation classique tel que $u_i^h = u(x_i)$, il est possible de considérer la solution

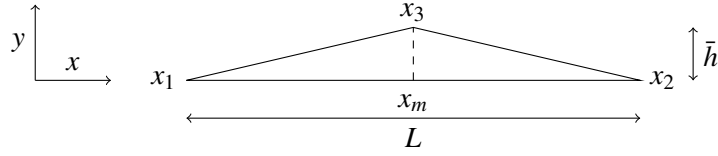


FIGURE 5 – Un cap de longueur L et hauteur \bar{h}

construite sur base des conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_1^h = u(x_1) \\ u_2^h = u(x_2) \\ u_3^h = u_m^h + \bar{h} \partial_y u(x_m) \end{cases} \quad (2)$$

avec u_m la valeur de la solution linéaire en x_m . Si l'on considère le cas où $x_m = \frac{x_1+x_2}{2}$ alors la différence entre la solution construite et la solution analytique est :

$$u_3^h = \underbrace{\frac{u_1^h + u_2^h}{2}}_{u(x_m) + \mathcal{O}(L^2)} + \underbrace{\bar{h} \partial_y u(x_m)}_{u(x_3) - u(x_m) + \mathcal{O}(\bar{h}^2)} = u(x_3) + \mathcal{O}(L^2) + \mathcal{O}(\bar{h}^2)$$

Lors de la convergence du maillage la différence entre u_3^h et $u(x_3)$ va donc tendre en $\mathcal{O}(h^2)$ où h est la taille caractéristique de l'entièreté du maillage. Pour ce qui est des gradients ceux-ci correspondent à :

$$\nabla u^h = \left(\frac{u_2^h - u_1^h}{L}, \partial_y u(x_m) \right)$$

et converge en $\mathcal{O}(h)$ vers les gradients de la solution analytique. Puisque l'on n'utilise plus l'interpolation aux noeuds, la reconnection des différents éléments entre eux pour s'assurer de la continuité de la solution n'est plus triviale. Kůcera a montré dans [12] qu'il était possible d'ajouter une fonction correctrice autour du noeud x_3 pour permettre la reconnection de la solution entre les différents éléments. Cette fonction est définie sur un disque centré en x_3 et de rayon $r = \min\left(\frac{|x_2-x_3|}{2}, \frac{|x_1-x_3|}{2}\right)$ comme représenté à la figure 6. Les éléments qui ne sont pas des caps utiliserons dès lors l'interpolation de la solution analytique

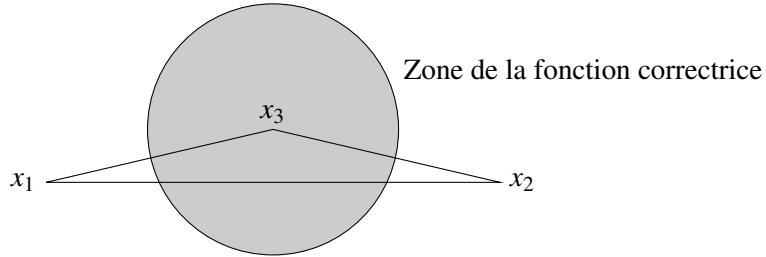
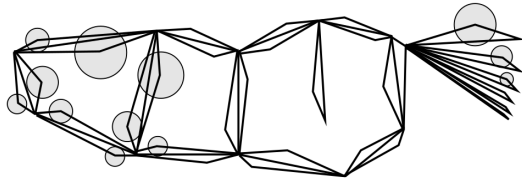


FIGURE 6 – Zone de la fonction correctrice pour les caps [12]

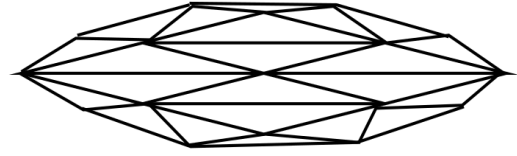
plus cette fonction correctrice. Cependant, aucun autre cap ne peut avoir un noeud dans la zone de la fonction correctrice, autrement cela changerait les conditions en 2. En suivant cette condition, Kůcera a donc prouvé la convergence des éléments finis pour les caps si ceux-ci ne sont pas trop proches les un des autres. La figure 2 représente un motif de maillage qui respecte cette condition (a) ainsi qu'un motif qui ne respecte pas cette condition (b). On peut observer sur la figure (a) qu'aucun noeud d'élément de type cap ne se trouve dans la zone de la fonction correctrice d'un autre cap contrairement au maillage (b). Il est donc possible d'obtenir des maillages très particuliers qui permettent la convergence des éléments finis.

3 Limitation numérique

Bien que d'un point de vue théorique les needles et les caps isolés ne posent pas de problèmes, il faut cependant prendre en compte la faisabilité numérique de ceux-ci. La matrice élément finis de l'opérateur



(a) Maillage qui respecte la condition de [12]



(b) Maillage qui ne respecte pas la condition de [12]

FIGURE 7 – Deux maillages composés de caps et la zone des fonctions correctrices pour une partie de ceux-ci

laplacien, présent dans notre problème 1, s'écrit sous la forme :

$$K_{i,j} = \int \nabla \phi_i \nabla \phi_j d\Omega \quad (3)$$

où ϕ_i et ϕ_j correspondent aux fonctions de forme des noeuds i et j respectivement. Le calcul de l'intégrale et des gradients se fait au moyen d'un changement de variable entre l'élément considéré et un élément parent. Ce changement de variable entre $\mathbf{x} = (x, y)$ et $\xi = (\xi, \eta)$ est représenté à la figure 8.

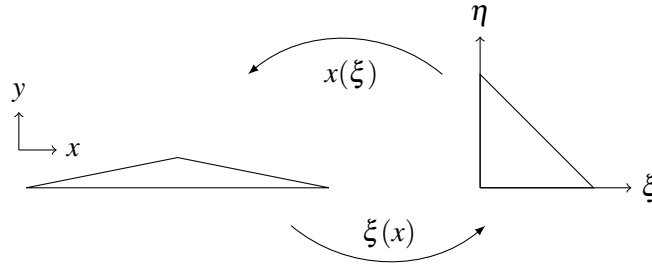


FIGURE 8 – Changement de variable entre un élément et l'élément parent

Les gradients de ϕ peut alors être calculés sur l'élément parent via la *chain-rule* : $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$. Lorsque l'on calcule le facteur $\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$, une division par le déterminant apparaît. Dans le cas d'un élément dégénéré, un élément dont l'aire vaut 0 numériquement, alors il s'agit d'une division par 0 qui ne peut pas être résolue numériquement :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)^{-1} = \underbrace{1}_{\text{division par 0}} \begin{bmatrix} \frac{dy}{d\eta} & -\frac{dx}{d\eta} \\ -\frac{dy}{d\xi} & \frac{dx}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Pour éviter cela, il est possible de limiter la valeur du déterminant par une valeur minimum \det^* et après simplification, cela revient à modifier la matrice de raideur tel que :

$$K_{i,j}^* = \frac{\det}{\det^*} K_{i,j}$$

Cette modification de la matrice correspond à la modification des équations de sorte à ce que le problème 1 deviennent :

Trouver \tilde{u} tel que :

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= f && \text{sur } \Omega \setminus \Omega^* \\ \Delta \tilde{u} &= \frac{\det^*}{\det} f && \text{sur } \Omega^* \\ \tilde{u} &= u_D && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Pour que \tilde{u} et u soit suffisamment proche, il est évidemment nécessaire de ne pas modifier de trop les équations. Une rigoureuse preuve mathématique via les fonctions de Green est possible mais ne tiendrait pas en moins de 8 pages. La conclusion de notre démonstration stipule qu'imposer $\det^* \leq Ch^3$ est une condition suffisante pour que $|\tilde{u} - u| \leq Ch^2$ dans le cas de bande d'éléments dégénérés. Autrement dit, pour que la modification des équations implique une modification de la solution qui converge à la même vitesse que les éléments finis, imposer que $\det^* \leq Ch^3$ est suffisant. Au lieu de démontrer cela mathématiquement nous allons le montrer numériquement dans la suite de ce travail.

4 Bande de caps

Dans la section 2 nous avons vu que la méthode des éléments finis pouvait converger malgré la présence d'éléments caps dégénérés. Il y a cependant un motif d'éléments dégénérés bien connu qui ne converge pas : les bandes de caps. Cela été observé notamment par [14] dans l'étude de maillages anisotropiques où la linéarité de la solution était forcée par le maillage. C'est également ce contre-exemple qui est donné par Babuška et Aziz dans [3] mais où l'entièreté du domaine est remplie de multiple bandes de caps. Ce motif est représenté à la figure 9.

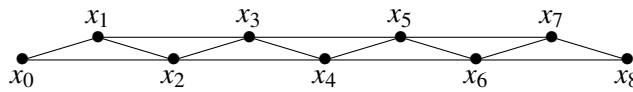


FIGURE 9 – Une bande de caps

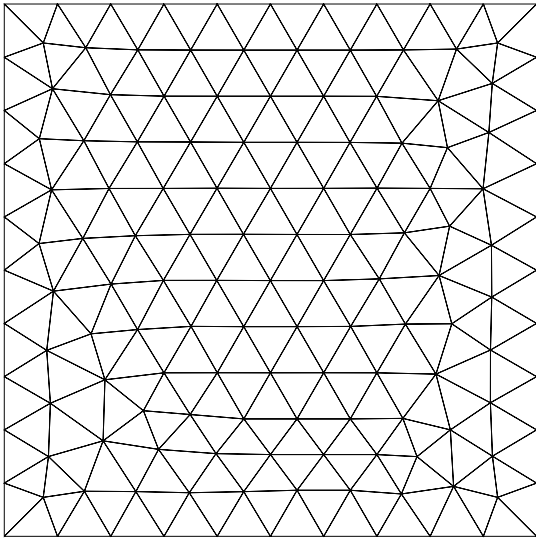
Il est assez facile de comprendre que ce pattern va imposer la linéarité de la solution le long de la bande : Si l'on choisit la solution u_0^h et u_2^h aux points x_0 et x_2 et que la hauteur de la bande tend vers 0, alors la valeur de la solution u_1^h en x_1 doit être très proche de $\frac{u_0^h + u_2^h}{2}$. Si ce n'était pas le cas, cela créerait une très grande dérivée dans la direction y . Le même raisonnement peut être fait pour obtenir les solutions en x_3, x_4, \dots imposant ainsi la linéarité dans la bande de caps. Dans [12], Kúčera démontre que pour permettre la convergence des éléments finis, il est nécessaire que la bande de cap ne tende pas trop vite vers une hauteur nulle. Pour une bande de longueur fixe, la hauteur de la bande doit satisfaire la condition $\bar{h} \geq Ch^2$ (autrement dit $\det \geq Ch^3$).

Cependant en utilisant \det^* , comme présenté à la section 3, et en le faisant tendre vers 0 à la bonne vitesse, il est possible de retrouver la bonne convergence des éléments finis. Pour le montrer nous avons résolu le problème 1 avec une solution manufacturée tel que :

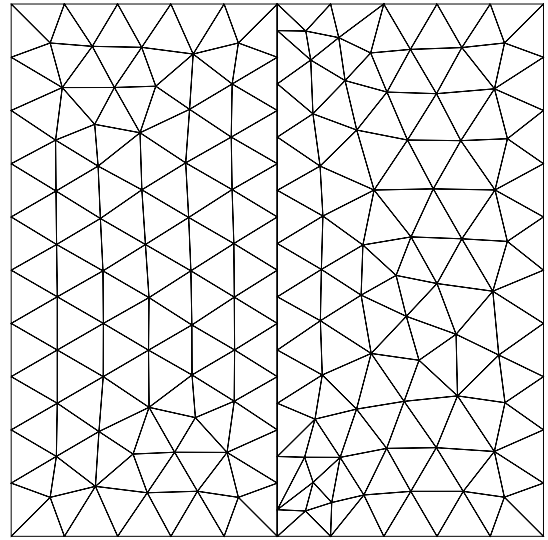
$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta f && \text{sur } \Omega \\ u &= f && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

avec $f = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$ et $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Cette solution manufacturée nous permet de précisément mesurer l'erreur commise par rapport à la solution analytique f .

La figure 10 présente les deux types de maillages sur lesquels nous avons résolu ce problème. D'abord un maillage régulier (a) qui sert de référence et ensuite un maillage avec la présence d'une bande de cap exactement dégénérée (b). Le maillage (b) donne l'impression d'être non-conforme mais cela est dû à l'épaisseur nulle de la bande de cap. Si l'on résout notre problème sur le maillage régulier nous obtenons une bonne approximation de la solution analytique comme nous pouvons le voir à la figure 11 (c). Cependant lorsque l'on résout le problème sur le maillage dégénéré, il est numériquement nécessaire d'utiliser un déterminant minimum pour éviter la division par 0 comme présenté dans la section 2. Si la valeur de \det^* est trop petite ou trop grande, alors la solution n'est pas très bonne (figure 11 (a) et (b)). Cependant pour $\det^* = h^3$ la solution est très proche de la solution finis (11 d). La figure 12 montre l'étude de convergence de la solution obtenu sur le maillage de référence ainsi que sur le maillage avec la bande de cap dégénérés. On observe que le choix $\det^* = h^3$ permet de récupérer la convergence des éléments finis malgré la bande de caps. Ce choix est lié à deux conditions. La première condition est une limite supérieure : si \det^* est trop grand, alors les équations sont trop modifiées et la condition exprimée à la section 2 ($\det^* \leq Ch^3$) n'est pas respectée. La seconde condition est une limite inférieure : si \det^* est



(a) Maillage régulier



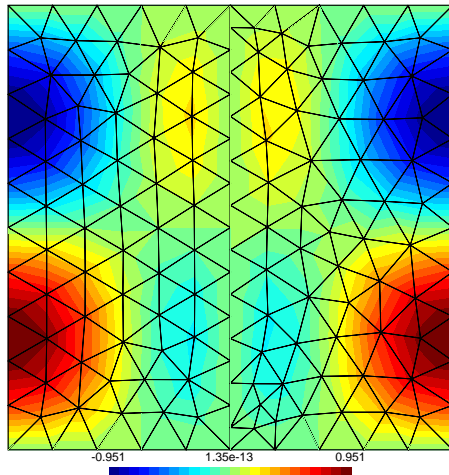
(b) Maillage avec bande de cap exactement dégénérée

FIGURE 10 – Maillage de référence et maillage dégénéré

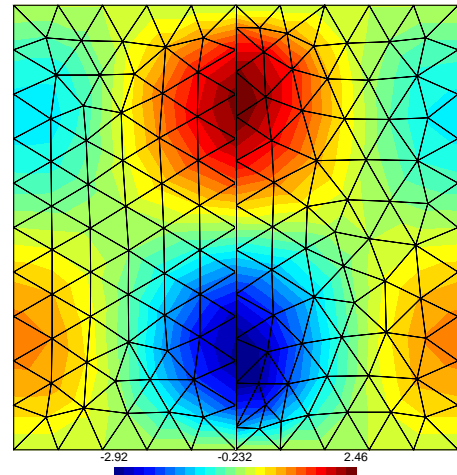
trop petit, alors la courbure de la solution n'est pas permise et il s'agit d'une condition similaire à celle de Kůcera pour les bande de caps ($\det^* \geq Ch^3$).

5 Conclusion

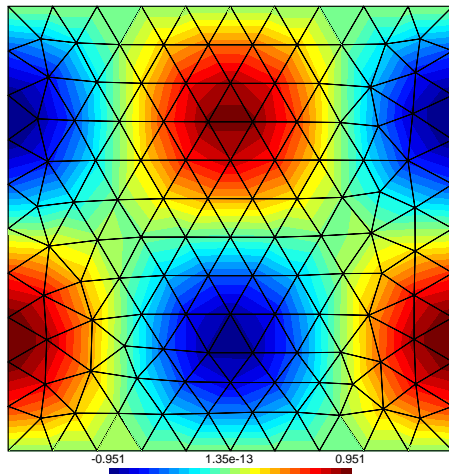
Contrairement à la croyance collective, la fameuse *maximum angle condition* n'est pas une condition nécessaire pour la convergence des éléments finis. Nous avons montré qu'il était également possible de retrouver la convergence des éléments finis dans le cas de bande de caps. La résolution d'éléments finis avec la présence d'éléments complètement dégénérés le long d'une bande est possible et n'entraîne pas d'erreur supplémentaire. Grâce à un choix judicieux du déterminant minimum, nous avons montré qu'il était même faisable de contourner la condition nécessaire sur les bandes de caps. La découverte de ces possibilités ouvre la voie à de nouvelles possibilités de déformation de maillage pour la méthode X-Mesh.



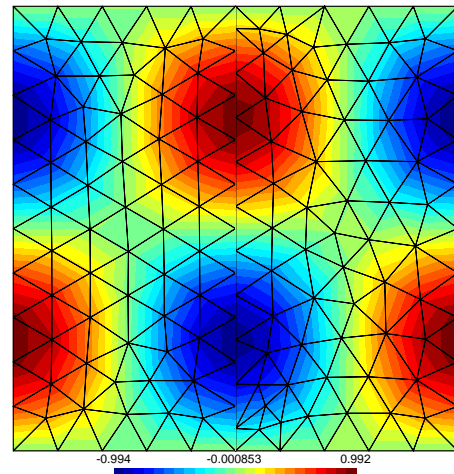
(a) Choix de \det^* trop petit



(b) Choix de \det^* trop grand



(c) Solution sur maillage régulier



(d) Solution avec $\det^* = h^3$

FIGURE 11 – Un choix judicieux de \det^* permet d’obtenir une bonne solution malgré la bande de caps

Références

- [1] M. Zlámal. *On the finite element method.*, Numer. Math. 12, 394–409 (1968)
- [2] A. Ženíšek. *The convergence of the finite element method for boundary value problems of a system of elliptic equations.*, Appl. Mat. 14, 355–377 (1969)
- [3] I., Babuška, A.K., Aziz. *On the angle condition in the finite element method.*, SIAM J. Numer. Anal. 13(2), 214–226 (1976)
- [4] R. E. Barnhill, J. A. Gregory. *Sard kernel theorems on triangular domains with applications to finite element error bounds.* Numer. Math. 25, 215-229 (1976)
- [5] P. Jamet. *Estimation de l’erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés.* RAIRO Anal. Numér. 10, 43-60 (1976)
- [6] K. Kobayashi, T. Tsuchiya. *On the circumradius condition for piecewise linear triangular elements* Japan J. Indust. Appl. Math. 32 :65–76 (2015)
- [7] H. Rademacher. *Über partielle und totale differenzierbarkeit von funktionen mehrerer vaiabeln und über die transformation der doppelintegrale.* Math. Ann. 79, 340–359 (1919)
- [8] H. Rademacher. *Über partielle und totale differenzierbarkeit von funktionen mehrerer vaiabeln II* Math. Ann. 81, 52–63 (1920).
- [9] W.H. Young. *On the triangulation method of defining the area of a surface* Proc. London Math. Soc. 19, 117–152 (1921)
- [10] N. Moës, J-F. Remacle, J. Lambrechts, B. Lé, N.Chevaugéon *The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) for the Stefan phase change model* Journal of Computational Physics 477(12) :111878 (2023)

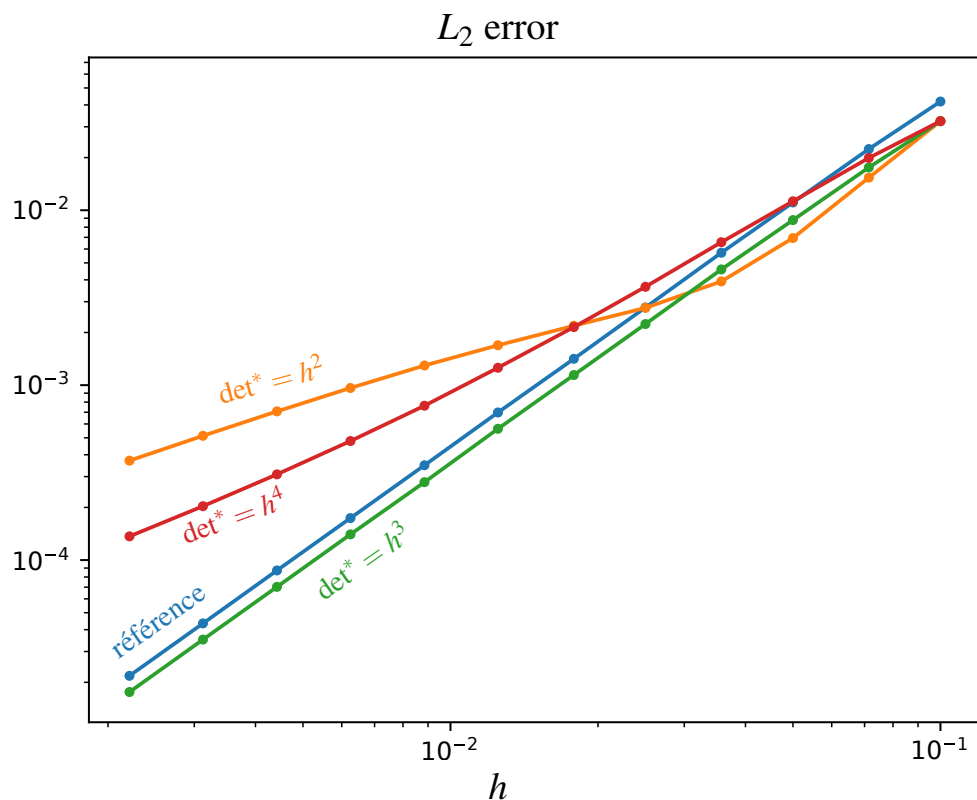


FIGURE 12 – La convergence est retrouvée pour le choix $\det^* = h^3$

- [11] A. Quiriny, J. Lambrechts, N. Moës, J-F. Remacle *X-Mesh : A new approach for the simulation of two-phase flow with sharp interface* arXiv :2302.03983
- [12] V. Kúčera *On necessary and sufficient conditions for finite element convergence* arXiv :1601.02942 (2016)
- [13] A. Hannukainen, S. Korotov, M. Křížek. *The maximum angle condition is not necessary for convergence of the finite element method* Numer. Math. 120 :79–88 (2012)
- [14] J. Goodman, K. Samuelsson, A. Szepessy. *Anisotropic Refinement Algorithms for Finite Elements* (1996)
- [15] T. Apel, L. Eckardt, C. Haubner, V. Kempf. *The maximal angle condition on finite elements : useful or not ?* Proc. Appl. Math. Mech., 20 (2021)