

# Processus robuste de dimensionnement de structures grandes échelles incluant des non-linéarités localisées

N. Leconte<sup>1</sup>, M. Ghienne<sup>1</sup>, N. Peyret<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Quartz, ISAE-Supméca, Institut supérieur de mécanique de Paris, Saint-Ouen-sur-Seine, France  
{nicolas.leconte,martin.ghienne,nicolas.peyret}@isae-supmecca.fr

**Résumé** — Dans un contexte d'éco-mobilité urbaine, le projet NEMELIFT s'intéresse au développement d'ouvrages de franchissement à la fois légers, rapides à installer et reconfigurables. On s'intéresse dans ce projet à la réalisation d'un processus de résolution numérique dédié au dimensionnement de ce type de structures, en particulier à la prise en compte de non-linéarités localisées ainsi qu'aux incertitudes liées au processus de fabrication. On s'intéresse, ici, au couplage entre la méthode de la transformée sans-parfum et la sous-structuration de Craig-Bampton, appliqué sur un exemple numérique.

**Mots clés** — Structures légères assemblées, Sous-structuration dynamique, Propagation d'incertitudes

## 1 Introduction

Ce travail se place dans le cadre du projet ANR PRCI NEMELIFT (*Neutral Equilibrium Mechanisms and smart Lightweight Footbridges for urban ecomobility*) visant à développer une technologie innovante d'ouvrage de franchissement, équipée d'un système de contrôle actif et d'un système d'assemblage rapide. On s'intéresse ici à la conception robuste et au dimensionnement de la structure principale de l'ouvrage. Celle-ci sera constituée de tronçons en treillis, assemblés par des connecteurs non-standards conçus pour assurer le montage du tablier complet en quelques heures. La figure 1 illustre le principe d'assemblage de la structure. L'utilisation de connecteurs non-standards implique dans notre cas, de tenir compte de phénomènes non-linéaires lors du dimensionnement de la structure. Notamment, le contact et le frottement dans les interfaces de liaison devront être pris en compte afin de modéliser de manière prédictive la raideur et l'amortissement des connecteurs. Les contraintes de fabrication des structures de génie civil entraînent également de fortes incertitudes, notamment géométriques. La prise en compte de ces incertitudes permet de prédire la variabilité du comportement de la structure globale. On souhaite donc tenir compte de ces incertitudes afin d'assurer une conception robuste de l'ouvrage complet. Le système de contrôle actif considéré dans ce projet, désigné "pile virtuelle", se base sur le concept proposé par Shih et al. [7]. Il ne sera pas pris en compte dans cette étude.

Dans l'optique de traiter une structure de cette envergure, avec des non-linéarités localisées, un traitement à différentes échelles permet de concevoir de manière robuste, les différents éléments qui la composent. Une approche permettant de prendre en compte des phénomènes intervenant à différentes échelles consiste à décomposer spatialement le problème considéré, en plusieurs "sous-structures". Les techniques de sous-structuration [2] permettent de traiter indépendamment ces dernières, pour lesquelles il devient possible de définir l'échelle adéquate, ou le modèle structurel adapté. Dans notre cas d'étude, les non-linéarités sont considérées localisées au niveau des connecteurs, et le choix est fait d'utiliser la sous-structuration dynamique et la méthode de Craig-Bampton [1]. Ainsi les tronçons considérés

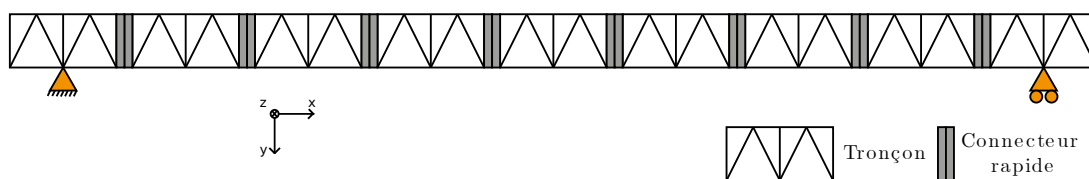


FIGURE 1 – Illustration du principe d'assemblage de l'ouvrage

comme ayant un comportement linéaire pourront être réduits par cette méthode. Un modèle dédié de connecteur sera alors mis en place afin de tenir compte de ce comportement non-linéaire. Cette décomposition permet un traitement plus efficace des différents systèmes et permet une flexibilité accrue lors du dimensionnement.

Dans une démarche de conception robuste de la structure considérée, divers algorithmes de propagation d'incertitudes peuvent être proposés et intégrés à la méthode des éléments finis, citons la méthode, très répandue, de Monte Carlo qui présente l'avantage de converger vers la solution exacte. Cependant son coût numérique, en fait une méthode difficilement envisageable pour un processus de conception industriel sur des structures de cette dimension. Bien qu'étant utilisée, cette méthode ne sera pas explicitée dans ce résumé. Des méthodes approchées seront donc envisagées comme la méthode de chaos polynomiale ou la méthode des moments [6]. Afin d'assurer un temps de calcul réduit, la méthode de transformée sans-parfum (Unscented Transform (UT)), initialement développée par Julier et Uhlmann [3] pour son utilisation dans les filtres de Kalman non-linéaires, est utilisée dû à sa faible dépendance au nombre de paramètres probabilistes [6]. De plus, son implémentation non-intrusive, indépendante du modèle du connecteur, est un atout majeur dans la robustesse de notre démarche. Son utilisation sur des structures de grandes envergures a déjà été appliquée, par exemple par Li et Jian [4].

Ce travail se concentre sur la mise en place de l'algorithme de Craig-Bampton couplé avec la méthode de la transformée sans-parfum. Les deux méthodes seront présentées dans la section 2, suivi des premiers résultats de l'implémentation sur un cas simple de poutre encastrée-libre (section 3). Enfin la conclusion (section 4) présentera une ouverture pour la suite des développements de ce projet.

## 2 Méthodes

### 2.1 Sous-structuration dynamique (Craig-Bampton)

Dans le cadre d'une modélisation par éléments finis, la méthode de Craig-Bampton [1], permet de transformer les matrices de masses et de raideur d'une structure linéaire afin de condenser la structure, pour conserver uniquement un certain nombre de degrés de liberté physique indépendants. Cette section décrit la formulation permettant de construire la matrice de transformation permettant l'obtention des matrices de rigidité et de masse transformées par la méthode de Craig-Bampton. Considérons ici uniquement une sous-structure avec une matrice de rigidité initiale  $K$  et une matrice de masse  $M$ . De cette notation, il est possible d'écrire l'équation dynamique d'équilibre sans amortissement (1), avec  $\mathbf{F}$  la charge dynamique

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (1)$$

La sous-structure est, de plus, décomposable en degrés de liberté "frontières" et "internes". Une illustration de cette décomposition pour le cas d'une structure simple de type poutre est proposée figure 2. Les nœuds frontières sont tous les nœuds sur lesquels s'appliquent des forces externes et/ou qui sont limitrophes d'une autre sous-structure. Cela permet de réécrire l'équation (1) en réorganisant les degrés de liberté en fonction de ces nœuds, dénotés par les indices B et I respectivement (2)

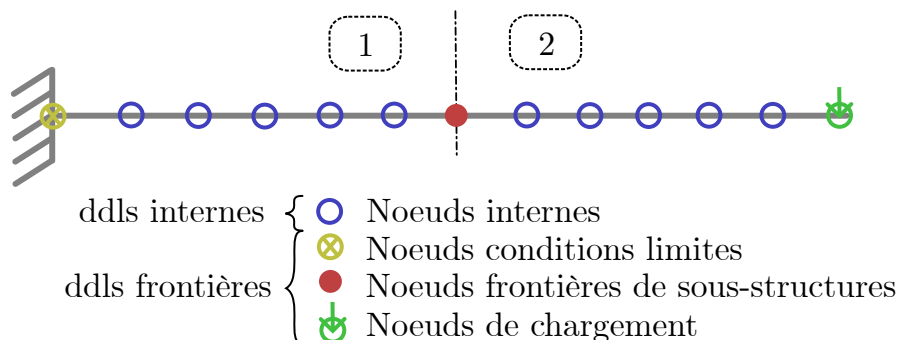


FIGURE 2 – Distribution des noeuds pour la méthode de Craig-Bampton - Application poutre

$$\begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_B \\ \ddot{\mathbf{q}}_I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_I \end{Bmatrix} \quad (2)$$

La méthode Craig-Bampton consiste à écrire l'équation (3), en introduisant  $T_{CB}$ , la matrice de transformation de Craig-Bampton

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_I \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{st} & X_{el} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B \\ \alpha \end{Bmatrix} = T_{CB} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (3)$$

Dans l'équation (3),  $X_{st}$  est la matrice des modes statiques définie par l'équation (4),  $X_{el}$  est la matrice des modes d'interfaces fixes définie par le système d'équation (5) et  $\alpha$  est le vecteur des paramètres d'intensité des modes de vibration internes.

$$X_{st} = -K_{II}^{-1} K_{IB} \quad (4)$$

$$\begin{cases} X_{el}^T K_{II} X_{el} = \Omega_I^2 \\ X_{el}^T M_{II} X_{el} = I \end{cases} \quad (5)$$

En substituant (3) dans (1), et en introduisant un résidu  $\mathbf{r}$ , l'équation de la dynamique se réécrit sous la forme (6)

$$M T_{CB} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + K T_{CB} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{r}. \quad (6)$$

La solution avec un résidu nul, c'est-à-dire  $T_{CB}^T \mathbf{r} = 0$  permet d'écrire l'équation (7)

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{K} \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (7)$$

Où  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{K}$  et  $\tilde{\mathbf{F}}$  sont définis par les équations (8)

$$\tilde{M} = T_{CB}^T M T_{CB} \quad \tilde{K} = T_{CB}^T K T_{CB} \quad \tilde{\mathbf{F}} = T_{CB}^T \mathbf{F}. \quad (8)$$

Pour plus de détails sur la méthode, il est possible de se référer au livre de Géradin et Rixen [2]. Notons qu'après réduction, les matrices de rigidité et de masse sont remplies suivant les équations (9). L'expression exacte de chaque bloc ne sera pas explicitement introduite dans ce document mais peut être extraite de (8). Une fois la démarche exécutée pour chacune des sous-structures voulues, il reste à effectuer l'assemblage des matrices de masse et de raideur afin de composer les matrices du système global.

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{BB} & 0 \\ 0 & \Omega_I^2 \end{bmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & I \end{bmatrix}. \quad (9)$$

La méthode permet, de plus, de ne retenir qu'un certain nombre de vecteurs propres dans  $X_{el}$ , ce qui permet de réduire le modèle ultérieur afin de réduire le temps de calcul. Le bon choix des modes et de leur nombre est important pour maintenir une précision acceptable de la solution. En conservant un nombre de modes d'interfaces fixes inférieur à la dimension de  $\mathbf{q}_I$ , il est possible d'écrire l'équation réduite (10), à partir de l'équation (3)

$$\hat{\mathbf{q}}_I = X_{st} \mathbf{q}_B + \hat{X}_{el} \hat{\alpha} \quad (10)$$

où la notation  $\hat{\cdot}$  désigne les éléments réduits.

## 2.2 Transformation sans-parfum

Cette section vise à présenter la formulation de l'UT. Cette méthode est basée sur un ensemble de Sigma-points pondérés, définis sur la distribution d'entrée du problème. Écrivons cet ensemble de  $p$  points et leur poids tel que  $S = \{i = 1, \dots, p : x^i, W^i\}$ . Selon Julier et Uhlman [3] les poids doivent nécessairement respecter l'équation (11).

$$\sum_{i=1}^p W^i = 1. \quad (11)$$

À partir de l'ensemble  $S$ , il est possible de calculer la moyenne  $\bar{y}$  et la covariance  $\Sigma_y$  de la distribution de la sortie au travers d'une fonction quelconque  $h$  suivant les équations

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^i &= h[\mathbf{x}^i] & \bar{\mathbf{y}} &= \sum_{i=1}^p W^i \mathbf{y}^i \\ \Sigma_y &= \sum_{i=1}^p W^i \left\{ \mathbf{y}^i - \bar{\mathbf{y}} \right\} \left\{ \mathbf{y}^i - \bar{\mathbf{y}} \right\}^T. \end{aligned} \quad (12)$$

Une modification courante de l'UT, appelée scaled-UT, consiste à ajouter un Sigma-point (numéroté  $i = 0$ ) sur la moyenne de la distribution. Cette modification permet de conserver la moyenne et la covariance de la distribution de sortie, mais permet d'ajuster le poids des autres Sigma-points afin d'augmenter la précision sur les moments d'ordre élevé. En notant la dimension de la distribution d'entrée  $N$ , un ensemble de Sigma-points vérifiant les conditions peut être défini par l'ensemble d'équations (13) pour,  $j$  allant de 1 à  $N$ . Dans les équation (13),  $W^0$  et  $\Sigma_{x_j}$  sont respectivement le poids du noeud d'indice 0 et la  $j^{eme}$  colonne de  $\Sigma_x$ . Dans la plupart des applications,  $W^0$  est défini comme un paramètre ou une fonction d'un paramètre afin de pouvoir aisément faire varier la valeur de ce poids. À titre d'exemple, Julier et Uhlmann [3], conseillent d'utiliser  $W^{(0)} = \frac{1}{3}$  pour une distribution d'entrée Gaussienne. Nous considérerons dans un premier temps que cette hypothèse est valable dans notre cas d'étude. La figure 3 illustre le principe du scaled-UT, basé sur cinq Sigma-points à travers la distribution  $h$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^j &= \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{\frac{N}{1-W^0}} \Sigma_{x_j} & \mathbf{x}^{j+N} &= \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{\frac{N}{1-W^0}} \Sigma_{x_j} \\ W^j &= \frac{1-W^0}{2N} & W^{j+N} &= \frac{1-W^0}{2N} \\ \mathbf{x}_0 &= \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (13)$$

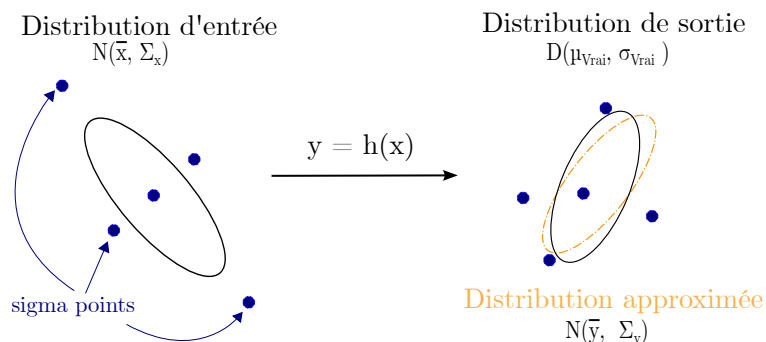


FIGURE 3 – Schéma de principe - Transformation sans-parfum

### 3 Implémentation de l'approche proposée

#### 3.1 Modélisation

Comme annoncé dans l'introduction, l'objectif de ce projet est de mettre en place des outils numérique robuste pour le dimensionnement d'une structure de grande taille. Un première modélisation de la structure globale a été réalisé (figure 4), en accord avec les EuroCodes 1 et 2, de manière à effectuer des calculs préliminaires.

Dans un premier temps, afin de mettre en place les outils nécessaires, on considérera un modèle simplifié de type poutre pour cette structure. Cette poutre (figure 5) sera considérée comme ayant des paramètres variables (masse volumique, module d'Young, longueur et les dimensions de la section rectangulaire) le long de son axe principal afin de se rapprocher de la modélisation globale. Dans cette simplification, on considérera les parties 1 et 3 comme des tronçons, et la partie 2 comme un connecteur. Cette modélisation, nous permet de générer grâce à un code éléments finis, les matrices de masse et de raideur de la structure de manière plus aisée. Ainsi les développements seront tous réalisés en utilisant ce modèle, dans une optique future de le généraliser à la structure globale.

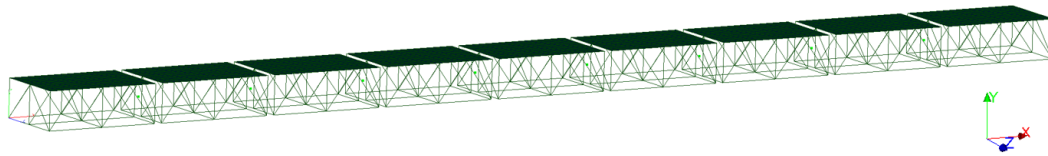


FIGURE 4 – Modélisation structure globale - Code Aster [8]

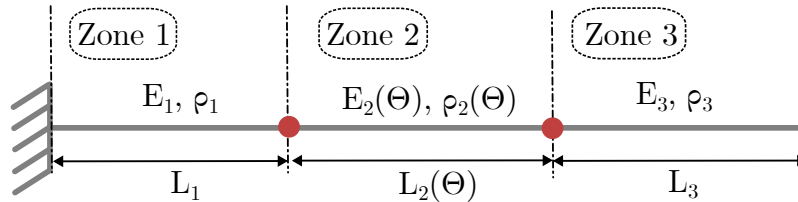


FIGURE 5 – Modélisation simplifiée - Modèle poutre

### 3.2 Cas test : Poutre encastree-libre

Afin de mettre en place le processus recherché, un cas test de poutre encastree-libre, basé sur la modélisation simplifiée en figure 5, est réalisé. L'objectif est dans un premier temps de sous-structurer cette poutre en trois parties distinctes, puis d'y propager des incertitudes sur les caractéristiques de la poutre, afin de caractériser l'influence de la variabilité sur les premiers modes de la structure. Dans cette section, plusieurs tests sont réalisés afin de montrer les performances des méthodes employées. Dans chacun de ces tests, seule la partie centrale de la poutre (zone 2) sera considérée non-déterministe. Les zones 1 et 3 auront les mêmes caractéristiques. L'ensemble des données utilisées, incluant les écart-types utilisés, sont présentées dans la table 1. Chaque noeud de la structure possède deux degrés de liberté, les matrices de masse et de raideur sont alors carrées de taille 182. La méthode de Monte Carlo considérée se base sur un échantillonnage par hypercube latin, et ne sera pas détaillé ici.

Caractéristique	Unité	Zone 1 et 3	Zone 2	
		Valeur déterministe	Valeur moyenne	Écart-type
Longueur L	m	5	0.5	0.03
Épaisseur b	m	1	1	0.05
Hauteur h	m	0.45	0.45	0.03
Module d'Young E	Pa	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$1.0 \cdot 10^{10}$
Masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$	7800	7800	500
Nombre d'éléments	-	30	30	-

TABLE 1 – Valeurs des caractéristiques de la poutre étudiée par zone (figure 5)

#### 3.2.1 Cas test : Craig-Bampton

Cette sous-section a pour but de valider l'utilisation de la méthode de Craig-Bampton sur notre cas test, au regard d'une référence sans sous-structuration dynamique. Pour ce faire, nous vérifions la valeur de fréquence des 7 premiers modes de la poutre avec ou sans réduction de la base de modes d'interfaces fixes définie en équation (5). Les résultats de comparaison par rapport à la solution de référence sont donnés en table 2. On observe aucune erreur relative jusqu'au septième mode, par rapport à la solution sans sous-structuration, lorsque l'on ne réduit pas la base. En ne conservant que les cinq premiers modes d'interfaces fixes par sous-structures on observe une erreur relative de 0.15% sur le septième mode. La conservation d'uniquement cinq modes conduit à une réduction des matrices de masse et de raideur par un facteur 10. Dans notre cas d'application, il sera considéré, que la méthode de Craig-Bampton n'influe pas sur les valeurs des cinq premiers modes de la poutre, et ce même en appliquant une réduction permettant d'accélérer la phase de simulation.

Numéro de mode	Fréquence (Hz)		
	Poutre complète	Poutre à trois sous-structures (s-s)	
		Sans réduction	Cinq modes d'interfaces fixe par s-s
1	3.421	3.421	3.421
2	21.44	21.44	21.44
3	60.03	60.03	60.03
4	117.6	117.7	117.7
5	194.5	194.5	194.5
6	290.5	290.5	290.6
7	405.7	405.7	406.3

TABLE 2 – Comparaison des fréquences (Hz) des modes propres de poutre encastrée-libre avec la méthode de Craig-Bampton (Paramètres déterministes)

### 3.2.2 Cas test : Craig-Bampton + Monte Carlo

On cherche maintenant à vérifier que la méthode de Craig-Bampton n'influence pas le comportement de la propagation d'incertitude. Pour ce faire, on introduit de la variabilité sur les paramètres de la poutre centrale, puis on récupère via la méthode de Monte Carlo, les deux premiers moments statistiques des séries de valeurs des cinq premiers modes. Les tests sont comparés avec les résultats sur une poutre non sous-structurée. Les résultats sont donnés dans les tables 3 et 4. On remarque dans un premier temps que les valeurs de moyenne ne sont pas identiques à celles de la référence. Cela s'explique par le fait que la distribution de sortie des valeurs n'est pas exactement Gaussienne comme la figure 6 le suggère. Concernant la moyenne et la variance, on observe aucune erreur relative sur la propagation des incertitudes en utilisant la méthode de Craig-Bampton par rapport à la référence. Ce résultat nous permet, dans notre cas test, de valider que l'utilisation de la méthode de Craig-Bampton n'influe pas sur la propagation des incertitudes pour les valeurs regardées. Ainsi il devient possible de vérifier la validité de l'UT en admettant que toutes erreurs proviendraient de l'UT et non de l'utilisation de Craig-Bampton.

Numéro du mode	Moyenne des premiers modes de la structure (Hz) avec la méthode de Monte Carlo ( $10^5$ tirages)		Erreur Relative(%)
	Référence	Craig-Bampton	
1	3.420	3.420	0.00
2	21.41	21.41	0.00
3	60.03	60.03	0.00
4	117.5	117.5	0.00
5	194.5	194.5	0.00

TABLE 3 – Comparaison des moyennes (Hz) des premiers modes propres de la poutre encastrée-libre sous-structurée en présence d'incertitudes via Monte Carlo

Numéro du mode	Variance des premiers modes de la structure (Hz) avec la méthode de Monte Carlo ( $10^5$ tirages)		Erreur Relative(%)
	Référence	Craig-Bampton	
1	0.000	0.000	0.00
2	0.045	0.045	0.00
3	0.118	0.118	0.00
4	1.239	1.239	0.00
5	1.243	1.243	0.00

TABLE 4 – Comparaison des variances (Hz) des premiers modes propres de la poutre encastrée-libre sous-structurée en présence d'incertitudes via Monte Carlo

### 3.2.3 Cas test : Craig-Bampton + UT

Cette section a pour but de montrer les performances de l'Unscented Transform, au regard d'une comparaison avec la méthode de Monte Carlo. Pour ce faire on applique le même test que la partie précédente (3.2.2) avec la variabilité définie dans la table 1. On se retrouve dans un cas où la dimension  $N$  de la distribution d'entrée est de cinq au regard des équations (13).

Numéro de mode	Moyenne Monte Carlo ( $10^5$ tirages)	Moyenne UT	Erreur relative (%)
1	3.420	3.420	0.00
2	21.41	21.41	0.00
3	60.03	60.03	0.00
4	117.5	117.5	0.00
5	194.5	194.5	0.00

TABLE 5 – Comparaison des moyennes (Hz) obtenues via les méthodes de Monte Carlo et Unscented Transform

Numéro de mode	Variance Monte Carlo ( $10^5$ tirages)	Variance UT	Erreur relative (%)
1	0.000	0.000	0
2	0.045	0.044	-2.22
3	0.118	0.118	0
4	1.239	1.224	-1.21
5	1.243	1.238	-0.4

TABLE 6 – Comparaison des variances (Hz) obtenues via les méthodes de Monte Carlo et Unscented Transform

La table 5 montre que la méthode de l'UT a des performances similaires à la méthode de Monte Carlo en ce qui concerne la moyenne avec une erreur relative nulle sur les cinq premiers modes. En ce qui concerne la variance, présentée table 6, les erreurs relatives des modes 2 à 5 sont inférieurs à 2.3%. Comme il est possible de l'observer sur la distribution des valeurs de sortie, présentée figure 6, l'hypothèse de distribution Gaussienne sur les valeurs de sortie est une bonne approximation. Il est cependant observable que les distributions des modes 2 et 4 possèdent une asymétrie supérieure aux autres modes, ceci explique les valeurs plus importantes d'erreur relative. Notons de plus que, dans notre application, augmenter les écart-types des incertitudes d'entrée implique une augmentation de l'asymétrie des distributions de sortie et donc de l'erreur relative.

## 4 Conclusions et perspectives

Une méthode combinant la sous-structuration de Craig-Bampton avec l'Unscented Transform, a été présentée sur un exemple de poutre encastrée-libre. La précision de la démarche a par la suite été évaluée sur un cas test par la comparaison à la méthode de Monte Carlo. On observe que la méthode de l'UT, couplée avec la méthode de Craig-Bampton, permet d'obtenir une erreur nulle sur la moyenne et inférieure à 2.3% sur la variance, comparée à Monte Carlo pour les cinq premiers modes observés. La prochaine étape est de vérifier si, dans le cadre de notre application, l'hypothèse Gaussienne peut être applicable sur les distributions d'entrée et/ou de sortie. Dans le cas où l'hypothèse de ne serait plus valable, il sera envisagé d'enrichir la méthode de l'UT afin de récupérer les coefficients d'asymétrie et l'aplatissement de la distribution de sortie, pour des distributions d'entrée quelconques. Malgré cette forte hypothèse, la méthode de l'UT reste un choix intéressant dans notre démarche de conception robuste, de par sa rapidité, sa facilité de mise en place ainsi que son comportement en boîte noire. La méthode de Craig-Bampton permet d'obtenir une réduction efficace de notre modèle, cependant la nécessité de recalculer la matrice de transformation à chaque tirage mitige ses performances en terme de gain de temps, nous avons donc pour objectif d'étendre ce processus à notre structure grande échelle, en considérant l'application de méthodes permettant de ne pas recalculer la matrice de transformation de Craig-Bampton tel que proposé par Mencik et al. [5]. La caractérisation de la variabilité expérimentale des structures assemblées sera

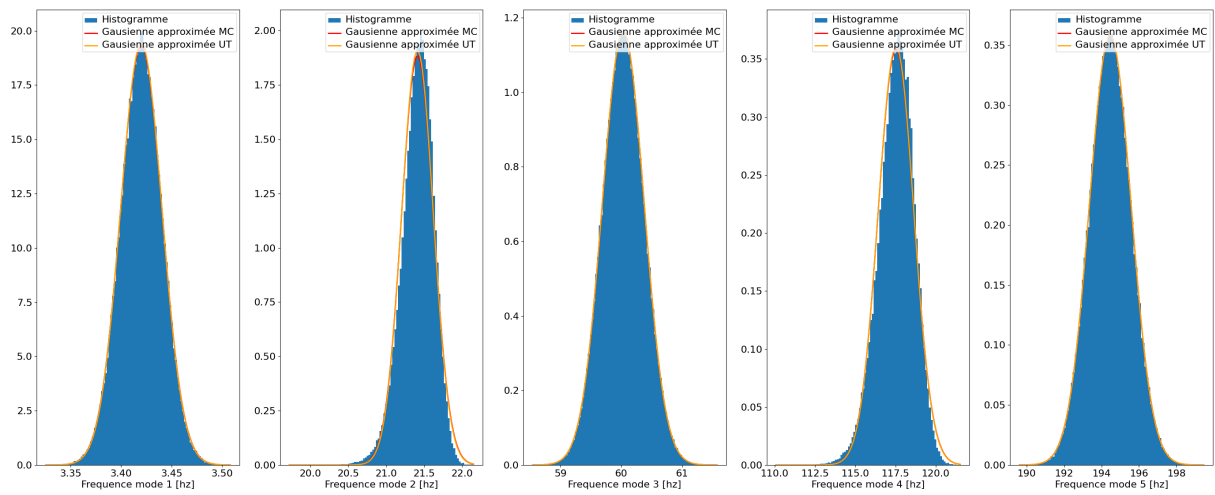


FIGURE 6 – Histogramme des distributions de sortie

effectuée sur une structure de laboratoire, ainsi que sur un prototype grande échelle. Finalement, un modèle non-linéaire dédié de connecteur sera investigué afin de rendre compte du comportement globale de notre structure grande échelle.

## Références

- [1] C.R. Craig, M.C.C. Bampton *Coupling of substructures for dynamic analyses*, AIAA Journal, 1968
- [2] M. Géradin, D.Rixen *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*, Wiley, Third edition, 2015
- [3] S.J. Julier, J.K. Uhlmann *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*, Proceedings of the IEEE, Vol. 92, NO. 3, 2004
- [4] D. Li, J. Zhang *Stochastic finite element model updating through Bayesian approach with unscented transform*, Structural Control and Health Monitoring, 2022
- [5] J.M. Mencik, N. Bouhaddi *Méthode adaptative de réduction de modèles par sous-structuration en présence de variabilité géométrique et d'incertitudes paramétriques*, 15ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2022
- [6] M. Padulo, M.S. Campobasso, M.D. Guenov *Comparative analysis of uncertainty propagation methods for robust engineering design*, INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING DESIGN, ICED'07, 2007
- [7] M.H. Shih, W.P. Sung, Y.C. Wang. *Developing a neutral equilibrium device as dynamic virtual piers for an emergency relief bridge*, Journal of Measurements in Engineering, 2018
- [8] *Code Aster* <https://code-aster.org/>