

Identification des paramètres de matériaux d'un modèle de plasticité cristalline à gradient de déformation

D. V. Nguyen¹, M. Jebahi¹, V. Champaney², F. Chinesta²

¹ Arts et Métiers Institute of Technology, CNRS, Université de Lorraine, LEM3 {duc-vinh.nguyen, mohamed.jebahi}@ensam.eu

² ESI Group Chair @ PIMM Lab, Arts et Métiers Institute of Technology {victor.champaney, francisco.chinesta}@ensam.eu

Résumé — L'objectif de ce travail est de comparer la performance de différentes méthodes d'optimisation pour l'identification des paramètres de matériaux d'un modèle de plasticité cristalline à gradient de déformation. Pour cela, un problème inverse est défini en basant sur des données synthétiques. Trois méthodes sont évaluées : optimisation évolutionnaire, méthode des surfaces de réponses et optimisation bayésienne. La limite des données et le temps de calcul élevé des simulations sont les principales contraintes. Les résultats montrent la robustesse de l'optimisation bayésienne pour ce type de problème. **Mots clés** — plasticité à gradient, identification des paramètres, problème inverse, algorithme évolutionnaire, métamodèle, optimisation bayésienne.

1 Contexte

Durant la conception des produits miniatures, il est important de tenir en compte les effets de taille qui indique une dépendance de la résistance mécanique d'un matériau à la taille caractéristique de la structure. Ce phénomène peut être simulé numériquement à l'aide de la théorie du second gradient du déplacement [1]. Récemment, plusieurs modèles de plasticité à gradient de déformation sont développés par différents auteurs. Ils impliquent en général un grand nombre des paramètres de matériaux dont des longueurs caractéristiques. L'identification de ces paramètres, qui est indispensable pour une application en pratique, doit être faite en basant sur la réponse macroscopique du matériau lors des essais expérimentaux aux petites échelles [2]. Trois défis peuvent être identifiés : le grand nombre des paramètres à identifier, la limitation des données expérimentales et la durée importante des calculs impliquant des modèles de plasticité à gradient de déformation. Cette contribution a pour but d'évaluer différentes méthodes d'identification dans ce nouveau contexte.

Précisément, ce travail traite l'identification des paramètres de matériaux d'un modèle de plasticité cristalline à gradient développé par Jebahi et al. [3]. Trois approches sont appliquées et comparées : optimisation évolutionnaire, méthode des surfaces de réponses et optimisation bayésienne. Dans ce résumé, le problème inverse est tout d'abord défini. Les approches d'identification sont ensuite présentées. Enfin, leurs performances sont comparées.

2 Problème inverse

2.1 Modèle de plasticité cristalline

Le modèle étudié dans ce travail est le modèle de plasticité cristalline à gradient de type Gurtin développé par Jebahi et al. [3]. Dans ce modèle, les déplacements et champs de glissements plastiques sont considérés comme variables contrôlables. Respectivement, deux types d'équations d'équilibre sont définis. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites macroscopiques sont équivalentes à celles des modèles de plasticité traditionnels :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } \mathcal{V} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{sur } \mathcal{S} \end{cases} \quad (1)$$

où \mathcal{V} est un domaine matériel avec la frontière \mathcal{S} , $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contraintes de Cauchy, \mathbf{n} est la normale sortante de \mathcal{S} , \mathbf{t} est la traction macroscopique et $\nabla \cdot (*)$ est l'opérateur divergence. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites microscopiques sont comme suivant :

$$\begin{cases} \tau^\alpha + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^\alpha - \pi^\alpha = 0 & \text{dans } \mathcal{V} \\ \boldsymbol{\xi}^\alpha \cdot \mathbf{n} = \chi^\alpha & \text{sur } \mathcal{S} \end{cases} \quad (2)$$

où τ^α est la contrainte de cisaillement résolue dans le système de glissement α , π^α et $\boldsymbol{\xi}^\alpha$ sont respectivement la contrainte microscopique de premier ordre (la variable associée au glissement plastique γ^α) et le vecteur contrainte microscopique d'ordre élevé (la variable associée au gradient du glissement plastique $\nabla \gamma^\alpha$) et χ^α est la traction microscopique. Dans le cas de l'état de déformations planes avec seul les systèmes de glissement planaires, les équations constitutives sont comme suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \boldsymbol{\xi}^\alpha = X_0 l_{en}^n \left[|\mathbf{s}^\alpha \cdot \nabla \gamma^\alpha|^{n-2} \mathbf{s}^\alpha \otimes \mathbf{s}^\alpha \right] \cdot \nabla \gamma^\alpha + S_\xi^\alpha l_{dis}^2 \left[\frac{\dot{e}_\xi^\alpha}{\dot{\gamma}_0^\alpha} \right]^m \frac{\nabla^\alpha \dot{\gamma}^\alpha}{\dot{e}_\xi^\alpha} \\ \pi^\alpha = S_\pi^\alpha \left[\frac{\dot{e}_\pi^\alpha}{\dot{\gamma}_0^\alpha} \right]^m \frac{\dot{\gamma}^\alpha}{\dot{e}_\pi^\alpha} \\ \dot{S}_\pi^\alpha = \sum_{\beta=1}^q H_\pi e_\pi^\beta, \quad S_\pi^\alpha(0) = S_{\pi 0} > 0 \\ \dot{S}_\xi^\alpha = \sum_{\beta=1}^q H_\xi e_\xi^\beta, \quad S_\xi^\alpha(0) = S_{\xi 0} \geq 0 \\ \dot{e}_\pi^\alpha = |\dot{\gamma}^\alpha|, \quad \dot{e}_\xi^\alpha = \|l_{dis} \nabla^\alpha \dot{\gamma}^\alpha\| \\ \alpha = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (3)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ est le tenseur des déformations élastiques, \mathbf{s}^α est la direction de glissement du système de glissement α , e_π^α et e_ξ^α sont respectivement la déformation plastique effective de premier ordre et d'ordre supérieur pour le système de glissement α . Il y a 12 paramètres de matériaux impliqués dans le système (3). Ils sont résumés dans le Tableau 1.

Dans cette étude, on assume que les coefficients élastiques sont connus. L'exposant de l'énergie de défaut est fixé $n = 2$. Le taux de cisaillement de référence $\dot{\gamma}_0^\alpha$ et le coefficient de la sensibilité à la vitesse de déformation m , qui sont introduits pour la régularisation numérique, sont choisis de telle sorte que le comportement est (quasi-)élastoplastique. Il reste 7 paramètres à identifier.

2.2 Données de référence

Cette étude est réalisée autour d'une configuration de benchmark très utilisée dans le contexte des modèles à gradient de déformation. Il s'agit de la réponse d'une bande encastrée entre deux plaques parallèles sous cisaillement cyclique (Figure 1). Deux systèmes de glissement planaires symétriques orientés à $\theta_1 = -\theta_2 = 60^\circ$ par rapport à la direction horizontale e_1 sont activés. L'encastrement est appliqué sur le bord inférieur :

$$u_1(x_1, 0) = u_2(x_1, 0) = 0 \quad (4)$$

où u_1 et u_2 sont les déplacements selon les directions e_1 et e_2 directions. Le cisaillement est appliqué sur le bord supérieur dans la direction e_1 :

$$u_1(x_1, h) = h\Gamma \quad \text{et} \quad u_2(x_1, h) = 0 \quad (5)$$

où Γ est l'angle de cisaillement macroscopique imposé qui varie de 0 à 0.01 et ensuite de 0.01 à 0. Une condition de passivation est appliquée sur les deux bords inférieur et supérieur :

$$\gamma^\alpha(x_1, 0) = \gamma^\alpha(x_1, h) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 1, 2 \quad (6)$$

Des conditions aux limites périodiques sont appliquées sur les bords aux deux côtés :

$$\begin{aligned} u_i(0, x_2) &= u_i(w, x_2) & \text{pour} & \quad i = 1, 2 \\ \gamma^\alpha(0, x_2) &= \gamma^\alpha(w, x_2) & \text{pour} & \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned} \quad (7)$$

TABLE 1 – Paramètres de matériaux du modèle de plasticité cristalline à gradient, leur valeurs de référence et les plages de recherche associés.

| Nom des paramètres | Symbole | Valeur de référence | Plage de recherche | Unité |
|--|-------------------------|---------------------|--------------------|----------|
| Premier coefficient de Lamé | λ | 150 | Fixé | GPa |
| Second coefficient de Lamé | μ | 100 | Fixé | GPa |
| Taux de cisaillement de référence | $\dot{\gamma}_0^\alpha$ | 0.04 | Fixé | s^{-1} |
| Coefficient de la sensibilité à la vitesse de déformation | m | 0.01 | Fixé | – |
| Résistance énergétique au glissement | X_0 | 100 | [0, 500] | MPa |
| Valeur initiale de la résistance au glissement dissipative de premier ordre | $S_{\pi 0}$ | 50 | [0, 100] | MPa |
| Valeur initiale de la résistance au glissement dissipative d'ordre supérieur | $S_{\xi 0}$ | 10 | [0, 100] | MPa |
| Module d'écroissage de premier ordre | H_π | 200 | [0, 500] | MPa |
| Module d'écroissage d'ordre supérieur | H_ξ | 100 | [0, 500] | MPa |
| Longueur interne énergétique | l_{en} | 8 | [0, 10] | μm |
| Longueur interne dissipative | l_{dis} | 5 | [0, 10] | μm |
| Exposant de l'énergie de défaut | n | 2 | Fixé | – |

Cette configuration est simulée en utilisant le solveur Abaqus/Standard. La loi de comportement est implémentée à travers une subroutine User-ELEMENT. Chaque simulation dure de 60 à 90 minutes sur un cœur d'un processeur Intel® Core™ i9-10900K.

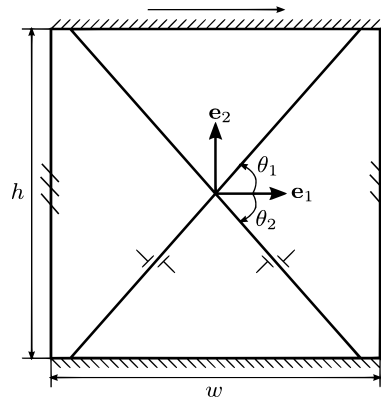


FIGURE 1 – Illustration d'une bande cristalline à dimension $h \times w$ avec deux systèmes de glissement soumis à un cisaillement pur.

En l'absence des données expérimentales pertinentes, l'identification des paramètres est faite sur des données synthétiques dites de référence. Elles sont générées à travers des simulations en utilisant un jeu spécifique des paramètres (Tableau 1). Pour assurer l'objectivité des résultats, les valeurs de ces paramètres de référence sont complètement cachées pendant les procédures d'identification ultérieures. Pour reproduire la limitation des données expérimentales en réalité, seules trois configurations avec différentes épaisseurs de la bande ($h = 8 \text{ mm}$, 10 mm et 15 mm) sont simulées pour générer les données de références. Les évolutions de la contrainte de cisaillement macroscopique en fonction de l'angle de cisaillement macroscopique (Figure 2) sont utilisées pour l'identification des paramètres. On observe bien l'effet de taille où les contraintes de cisaillement macroscopique d'une bande moins épaisse sont plus grandes que celles d'une bande plus épaisse. Ainsi, l'identification est définie sous forme d'un problème inverse dont l'objectif est d'identifier les 7 paramètres de matériau à l'intérieur des larges plages de recherche (Tableau 1) qui permettent de reproduire ces comportements macroscopiques.

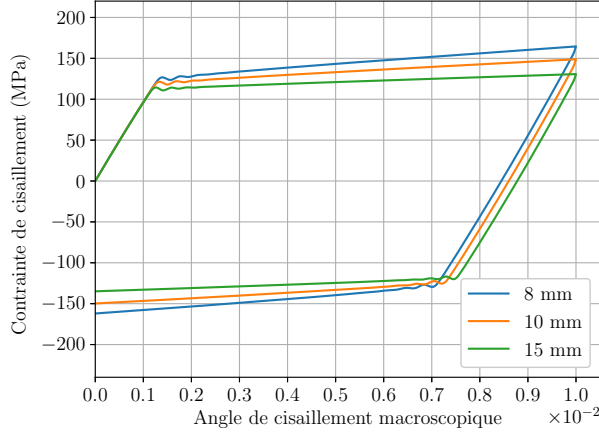


FIGURE 2 – Réponses macroscopiques des bandes cristallines de trois différentes épaisseurs $h = 8\text{ mm}, 10\text{ mm}$ et 15 mm .

3 Méthodes appliquées

3.1 Fonctions objectives

Le problème inverse est reformulé comme un problème d'optimisation. La similarité entre les résultats de simulation et les réponses macroscopiques de référence est quantifiée par des fonctions objective à minimiser. Comme le comportement macroscopique élastique et plastique est quasi-linéaire, chaque courbe macroscopique correspondant à une épaisseur de la bande cristalline peut être caractérisée par trois contraintes représentatives : limite d'élasticité durant le chargement notée σ_1 , contrainte de cisaillement à $\Gamma = 0,01$ notée σ_2 et limite d'élasticité durant le déchargement σ_3 . Pour pouvoir capturer l'effet de taille, les fonctions objective doivent être définies sur au moins deux configurations de la bande. Dans cette étude, on définit une seule objective comme ci-dessous :

$$f = \frac{1}{3m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^3 (\delta_j^i)^2 \quad (8)$$

où $m = 2$ ou 3 est le nombre des configurations utilisées pour l'identification et δ_j^i est l'erreur relative associée à la configuration i sur la contrainte représentative j :

$$\delta_j^i = \frac{\sigma_j^i - \hat{\sigma}_j^i}{\hat{\sigma}_j^i} \quad (9)$$

avec $\hat{\sigma}_j^i$ et σ_j^i représentant respectivement les contraintes représentatives mesurées sur les courbes de référence et les courbes de simulation.

Par ailleurs, pour explorer la pertinence de l'optimisation multi-objectif sur le problème étudié, deux différentes manières de définir des fonctions multi-objectif sont évaluées. Soit chaque fonction objectif est définie sur chaque configuration de la bande :

$$f^i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 (\delta_j^i)^2 \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

, soit chaque fonction objective est définie sur une même contrainte représentative dans tous les configurations :

$$f_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\delta_j^i)^2 \quad \text{avec} \quad j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

Ces deux définitions des fonctions multi-objectif seront évaluées et comparées l'une à l'autre et à la fonction objectif unique définie par (8), dans le cadre de l'optimisation bayésienne.

3.2 Algorithmes d'optimisation

Trois types d'algorithmes d'optimisation sont appliquées pour résoudre le problème inverse :

Algorithme évolutionnaire Cette famille d'algorithmes groupe les algorithmes d'optimisation inspirés par la théorie de l'évolution des populations biologiques. Tandis que ces algorithmes sont robustes pour résoudre des problèmes complexes, une large population est généralement demandée. Dans le contexte de cette étude, comme l'évaluation des fonctions objectif demande des simulations coûteuses en terme de temps de calcul, une large population n'est pas tolérable. Pour cette raison, l'algorithme CMA-ES (Covariance Matrix Adaptation – Evolution Strategy), qui est connu être effectif avec une petite population, a été choisi [4]. La librairie *pymoo* [5] est utilisée pour son implémentation dans cette étude.

Méthode des surfaces de réponses (RSM) Une base de données est générée à partir des simulations par éléments finis en utilisant des jeux de paramètres échantillonnés de manière quasi-aléatoire dans les plages de recherche via la suite de Sobol. En utilisant cette base de données, des métamodèles de processus gaussiens sont ensuite entraînés pour lier les contraintes représentatives pour différentes épaisseurs de la bande cisailée et les paramètres. Leurs prédictions sont regroupées pour fabriquer le métamodèle final donnant la valeur de la fonction objectif scalaire définie par (8). Il faut noter qu'il est impossible d'entraîner directement un métamodèle capable de prédire la fonction objectif avec une bonne précision dans la limite du nombre d'évaluations. Enfin, les paramètres de matériau sont identifiés en minimisant le métamodèle final à l'aide d'un algorithme du gradient. Les paramètres identifiés sont évalués par éléments finis. Cette méthode est testée avec différentes tailles de la base de données (50, 100, 200).

Optimisation bayésienne L'optimisation bayésienne est une méthode d'optimisation globale qui équilibre l'exploration et l'exploitation [6]. Dans cette approche, une stratégie d'échantillonnage séquentiel est adoptée. À partir d'une base de données initiale de petite taille, un métamodèle de processus gaussiens est entraîné pour la fonction objectif. En basant sur la prédiction moyenne et la mesure d'incertitude données issues du métamodèle, une fonction d'acquisition qui est définie sur le domaine des paramètres. La maximisation de cette fonction permet d'identifier les jeux de paramètres prometteurs d'un point de vue de la minimisation. Ces jeux de paramètres sont ensuite évalués par éléments finis et les nouvelles données sont ajoutées à la base de données. Le métamodèle est actualisé et le processus mentionné ci-dessus est répété dans une nouvelle itération jusqu'à l'obtention d'un résultat satisfaisant. Cette méthode est appliquée à l'aide de la librairie *Trieste* [7].

4 Résultats et discussion

Les trois méthodes d'optimisation sont appliquées pour résoudre le problème inverse. Les courbes macroscopiques de référence pour deux épaisseurs de la bande cisailée $h = 8$ mm et 10 mm sont utilisées pour l'identification. La troisième courbe est utilisée pour la validation. La même fonction objective définie par (8) est appliquée pour les trois méthodes. Pour la suite, la qualité des paramètres identifiés est évaluée par un scalaire appelé erreur moyenne qui est la racine carrée de la fonction objective.

La Figure 3 présente l'évolution de l'erreur moyenne en fonction du nombre d'évaluations de la fonction objective pour différentes méthodes d'optimisation. D'abord, après 200 évaluations, toutes les trois méthodes atteignent une erreur moyenne moins de 1% qui est bien plus petite qu'une erreur moyenne plus de 7% pour la meilleure solution trouvée par une approche aléatoire. Cela démontre la pertinence des approches basant sur l'optimisation. Ensuite, la différence au niveau de la performance des trois méthodes d'optimisation peut être observée au-delà des premières 50 évaluations. L'algorithme évolutionnaire CMA-ES présente des larges plateaux à 2% et à 1% de l'erreur moyenne. Ce problème de stagnation est particulièrement problématique pour ce type de problème en raison du temps de calcul élevé des simulations. De plus, le comportement macroscopique n'est pas bien reproduit par les paramètres de matériau identifiés (Figure 4a).

En revanche, la méthode des surfaces de réponses et l'optimisation bayésienne offrent une diminution progressive de l'erreur, ce qui conduit à une erreur moyenne moins de 0.5% après 200 évaluations. Les paramètres identifiés par ces deux méthodes reproduisent bien le comportement macroscopique (Figure

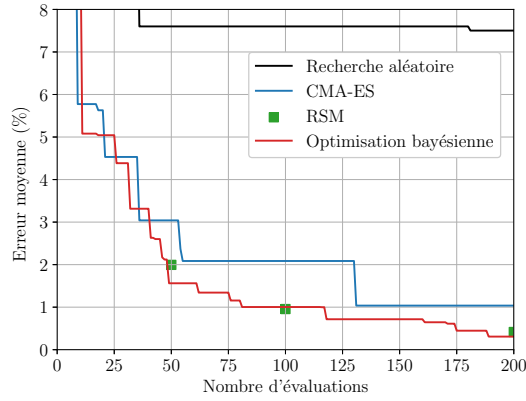


FIGURE 3 – Comparaison de la convergence pour différentes méthodes d’optimisation.

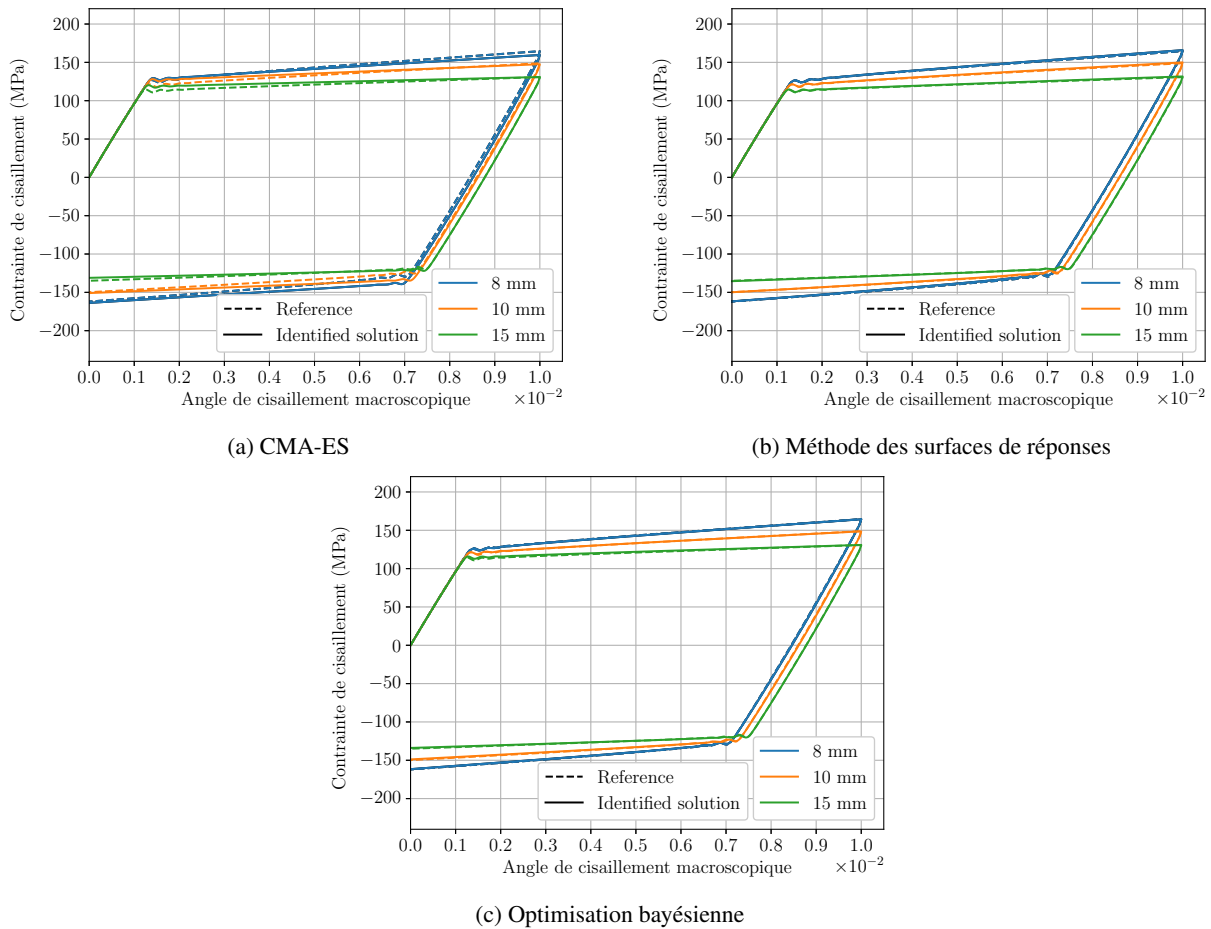


FIGURE 4 – Réponses macroscopiques simulées avec les paramètres de matériau identifiés.

4b et 4c). La performance comparable de ces deux méthodes peut sembler contre-intuitive au premier regard vu que la stratégie d’échantillonnage séquentiel adopté par l’optimisation bayésienne est attendue plus efficace qu’un échantillonnage en une fois. Ce résultat inattendu est lié à la différence au niveau du choix de la sortie des métamodèles entre les deux méthodes. Dans le cas de la méthode des surfaces de réponses, les métamodèles sont entraînés pour prédire les contraintes macroscopiques dont l’évolution en fonction des paramètres de matériaux est relativement simple. Dans le cas de l’optimisation bayésienne, le métamodèle prédit directement la fonction objective qui est complexe, ce qui rend plus difficile la minimisation. Cette différence est compensée par la stratégie d’échantillonnage séquentiel.

La Figure 5 présente les paramètres de matériaux identifiés qui sont satisfaisants. En utilisant différents points d’initialisation, différentes solutions peuvent être identifiées par la méthode des surfaces de réponses. En examinant les différentes solutions, on trouve que les paramètres identifiés de premier

ordre (S_{π_0} et H_{π}) sont proches des valeurs de référence tandis que les paramètres identifiés d'ordre supérieur (X_0 , S_{ξ_0} , l_{en} et l_{dis}) présentent de grandes divergences. Pourtant, les produits $X_0 l_{en}^n$ et $S_{\xi_0} l_{dis}^2$ restent toujours constants et proches des valeurs de référence. Cela montre l'interdépendance entre les paramètres d'ordre supérieur et que l'effet de taille est géré par leur combinaison au lieu de leur valeur individuelle. Cette observation suggère une piste pour l'optimisation du nombre des paramètres de la loi de comportement étudié.

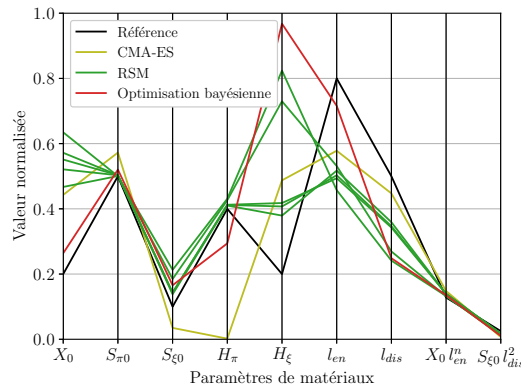


FIGURE 5 – Paramètres de matériaux identifiés par les trois méthodes d'optimisation.

Pour étudier l'effet du nombre des données de référence, la méthode d'optimisation bayésienne est appliquée pour identifier les paramètres de matériaux en utilisant toutes les trois courbes macroscopique de référence incluant celle de la bande cisailée d'épaisseur $h = 15$ mm. Comme montré sur la Figure 6, la convergence est plus rapide dans ce cas. Une erreur moyenne de 0.5% est atteinte après 50 évaluations seulement. Ainsi, l'ajout d'une nouvelle courbe microscopique permet d'appliquer des nouvelles contraintes et ainsi de diriger la recherche au chemin plus court vers la solution.

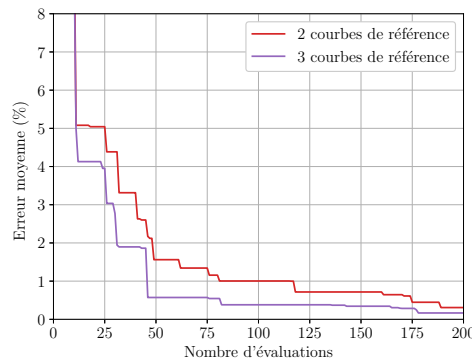


FIGURE 6 – Comparaison de la convergence pour deux et trois courbes macroscopique de référence dans le cadre de la méthode de l'optimisation bayésienne.

Le choix de la fonction objectif est aussi un facteur impactant la résolution du problème inverse. Dans cette étude, on étudie la performance de l'optimisation bayésienne dans le contexte de l'optimisation multi-objectif. Pour cela, deux types des fonctions multi-objectif définies par (10) et (11) sont testés. La convergence est reportée sur la Figure 7. En utilisant les fonctions multi-objectif définies par (10) (cas 1 - chaque fonction présente l'erreur pour une épaisseur de la bande cisailée), la diminution de l'erreur moyenne stagne après 50 évaluations, ce qui donne une mauvaise solution par rapport à l'optimisation mono-objective. En revanche, les fonctions multi-objectif définies par (11) (cas 2 - chaque fonction présente l'erreur pour une contrainte représentative à travers différentes épaisseurs de la bande cisailée) donnent une convergence plus rapide. Une erreur de moins de 0.5% est atteinte après 50 valuations seulement (200 évaluations pour l'optimisation mono-objective). Cette différence au niveau de la performance peut être attribuée au phénomène physique derrière le problème inverse. Dans le premier cas, l'effet de taille qui est la dépendance des contraintes d'écoulements en fonction de l'épaisseur de la bande cisailée est tenu en compte que par l'ensemble des fonctions multi-objectif. Dans le deuxième cas, l'effet de taille

est imposé directement dans chaque fonction multi-objectif, ce qui demande l’algorithme d’optimisation à considérer le phénomène physique dans chaque itération et rend la recherche des paramètres de matériaux plus efficace.

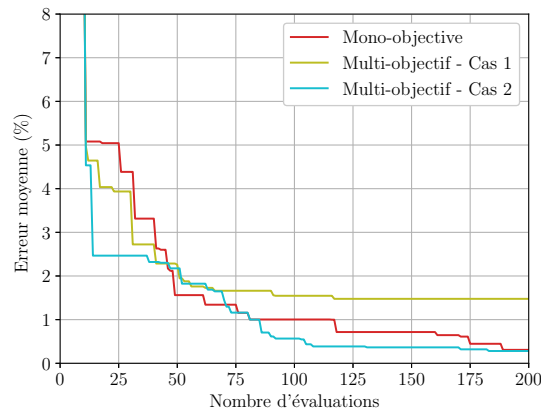


FIGURE 7 – Comparaison de la convergence pour différentes définitions des fonctions objectif dans le cadre de la méthode de l’optimisation bayésienne.

5 Conclusions

La performance de différentes méthodes pour l’identification des paramètres de matériaux d’un modèle de plasticité cristalline à gradient de déformation est étudiée dans ce travail. Elles sont testées dans la situation où les données concernant le comportement macroscopique expérimental à petites échelles sont limitées. Les résultats montrent que l’algorithme évolutionnaire CMA-ES présente le problème de stagnation, ce qui le rend non pertinent pour ce type de problème en raison du temps de calcul important. En décomposant la fonction objectif complexe en plusieurs métamodèles élémentaires, la méthode des surfaces de réponses peut arriver à bien capturer l’effet de taille. Elle permet d’identifier plusieurs jeux de paramètres de matériaux admissibles et ainsi de révéler l’indépendance entre des paramètres. Grâce à la stratégie d’échantillonnage séquentiel, l’optimisation bayésienne permet d’affronter directement la fonction objective complexe de manière efficace. Par ailleurs, il est montré que l’augmentation des données expérimentales et la considération du phénomène physique lors de la définition des fonctions objectif permettent d’améliorer la performance des algorithmes d’optimisation.

Références

- [1] M. E. Gurtin. *A gradient theory of single-crystal viscoplasticity that accounts for geometrically necessary dislocations*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 20, 5-32, 2002.
- [2] G. Z. Voyiadjis, Y. Song. *Strain gradient continuum plasticity theories : Theoretical, numerical and experimental investigations*, International Journal of Plasticity, 121, 21–75, 2019.
- [3] M. Jebahi, L. Cai, F. Abed-Meraim. *Strain gradient crystal plasticity model based on generalized non-quadratic defect energy and uncoupled dissipation*, International Journal of Plasticity, 126, 102617, 2020.
- [4] N. Hansen, A. Ostermeier. *Completely Derandomized Self-Adaptation in Evolution Strategies*, Evolutionary Computation, 9, 159–195, 2001.
- [5] J. Blank, K. Deb. *Pymoo : Multi-Objective Optimization in Python*, IEEE Access, 8, 89497–89509, 2020.
- [6] B. Shahriari, K. Swersky, Z. Wang., R. P. Adams, N. Freitas. *Taking the Human Out of the Loop : A Review of Bayesian Optimization*, Proceedings of the IEEE, 104, 148–175, 2016.
- [7] V. Picheny et al. *Trieste : Efficiently Exploring The Depths of Black-box Functions with TensorFlow*, arXiv, 2023.