

# Méthode Lagrangienne explicite totale des points matériels avec modèle de contact frottant implicite pour les matériaux granulaires déformables

S. Nezamabadi<sup>1</sup> et F. Radjai<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMGC, Université de Montpellier, {saeid.nezamabadi,franck.radjai}@umontpellier.fr

**Résumé** — Une approche a été proposée pour traiter les matériaux granulaires mous, combinant une formulation Lagrangienne totale explicite de la méthode des points matériels (MPM) avec la méthode de Dynamique des Contacts (*Contact Dynamics* : CD). La MPM permet de prendre en compte les déformations des particules, tandis que la méthode CD traite le contact entre les particules molles. L'efficacité et la précision de cette approche sont illustrées à travers l'étude du contact hertzien d'une particule molle et de la compaction d'un assemblage de particules molles pour des valeurs élevées de compacité.

**Mots clés** — Matériaux granulaires, Matière molle, Méthode des point matériels, Dynamique des contacts, Méthode des éléments discrets.

## 1 Introduction

Les matériaux granulaires mous, qui consistent en des particules désordonnées très déformables et étroitement empilées, sont omniprésents dans les produits industriels, tels que les produits pharmaceutiques et alimentaires, les cosmétiques, les matériaux chimiques et nucléaires. Leur compréhension est donc non seulement d'un intérêt physique fondamental, mais aussi d'une grande importance pratique. Dans ces matériaux, la présence de l'échelle de longueur interne associée à la taille des particules conduit à des comportements complexes impliquant des réarrangements de particules comme dans les matériaux granulaires durs ainsi que des déformations de particules [1]. En effet, les particules constitutives de la plupart des matériaux granulaires mous peuvent subir de grandes déformations sans rupture.

Les méthodes populaires des éléments discrets (*Discrete Element Method* : DEM) sont basées sur le concept du traitement des matériaux granulaires comme une collection de particules rigides avec des contacts déformables entre elles [2]. Par conséquent, dans ces techniques, on suppose que la forme et le volume des particules ne changent pas. Toutefois, cette hypothèse est trop simpliste pour modéliser les matériaux granulaires mous. Pour surmonter ces limitations et prendre en compte la déformation globale des particules, il est nécessaire de considérer les degrés de liberté internes des particules. Deux stratégies numériques différentes existent pour ce faire : (i) modéliser une particule molle comme un assemblage de particules primaires dures interagissant via une loi de force attractive-répulsive, appelée le modèle de particules liées (*Bonded-Particle Model* : BPM) [3]; (ii) la modélisation des particules molles par la combinaison de la méthode des éléments finis (FEM) ou de la méthode des points matériels (MPM) avec la DEM [4, 5].

Dans nos travaux précédents [3, 4, 6, 7], nous avons proposé une approche numérique qui impliquait le couplage d'une formulation Lagrangienne actualisée implicite de la MPM pour modéliser les déformations globales des particules avec la méthode de Dynamique des Contacts (*Contact Dynamics* : CD) pour traiter les interactions entre les particules molles. La méthode CD, qui est une variante de la DEM basée sur une dynamique non lisse, est un cadre mathématique qui incorpore des contraintes unilatérales aux points de contact et tient compte des discontinuités temporelles résultant des collisions multi-contacts et du frottement de Coulomb [2, 8].

La MPM peut être considérée comme une FEM avec des points d'intégration mobiles (points matériels), qui combine les descriptions Eulérienne et Lagrangienne du matériau. Chaque corps est discrétisé en points matériels de masse constante (description Lagrangienne). Un maillage de calcul sous-jacent est défini (description Eulérienne) pour résoudre les équations du mouvement d'une manière similaire

à la FEM [9]. La MPM permet une discrétisation uniforme des corps de forme complexe en utilisant des points matériels, alors que dans la FEM, la discrétisation en éléments n'est généralement pas strictement uniforme. La MPM est donc plus adaptée aux simulations basées sur des images, car il permet de convertir plus facilement l'image en points matériels. Toutefois, il convient de mentionner que la MPM classique, qui est basée sur une formulation Lagrangienne actualisée de la MPM (*Updated Lagrangian Material Point Method* : ULMPM), peut être moins précise que la FEM, car les points matériels (points d'intégration) ne se trouvent généralement pas aux positions optimales à l'intérieur des éléments du maillage sous-jacent pour l'intégration numérique. En effet, dans l'ULMPM, la définition de la configuration de référence à partir de la configuration du pas de temps précédent peut conduire à l'instabilité du croisement des cellules. Diverses méthodologies ont été proposées pour remédier à ce problème ; pour plus de détails, voir [10]. Néanmoins, une solution efficace consiste à utiliser une formulation Lagrangienne totale de la MPM (*Total Lagrangian Material Point Method* : TLMPM). Dans TLMPM, la configuration de référence reste fixe (Lagrangien total) tout au long de la simulation, ce qui signifie que les points matériels sont toujours associés à leurs positions initiales dans les éléments du maillage sous-jacent. Cette approche est donc plus facile à gérer en termes de stabilité numérique et de simplicité algorithmique. En outre, la méthode ULMPM peut être plus coûteuse en termes de calcul que la méthode TLMPM en raison de la nécessité de mettre à jour la configuration de référence à chaque pas de temps.

Dans cet article, notre objectif est d'améliorer l'approche implicite MPM-CD précédente en utilisant une formulation Lagrangienne totale explicite de la MPM. Dans la formulation implicite, une matrice de rigidité doit être construite, et un problème d'algèbre linéaire doit être résolu à chaque itération. On s'attend donc à ce qu'une formulation explicite réduise considérablement le coût de calcul. En général, on estime qu'un pas de temps plus important peut être appliqué dans les techniques d'intégration temporelle implicites par rapport aux techniques explicites. Cependant, le pas de temps ne peut pas être très grand lorsqu'il s'agit de contacts entre corps, car il doit également tenir compte de la détection des contacts et de la spécification de leurs attributs. Nous envisageons également une résolution implicite des contacts basée sur les contacts entre les points matériels à l'aide de la méthode CD. Ce nouvel algorithme diffère de l'algorithme de contact précédent, dans lequel les forces de contact étaient calculées sur les nœuds du maillage sous-jacent. Cela nous permet de calculer plus précisément les forces de contact (forces normales, de frottement et de cohésion), de définir la zone de contact, et d'établir différentes interactions de frottement et d'adhésion entre les points matériels en contact.

## 2 Approche numérique

Une formulation implicite de la méthode des points matériels, dans le contexte des théories des déformations infinitésimales et finies, a été précédemment proposée dans [3, 4, 6, 7], et elle a été couplée à la méthode de la dynamique des contacts pour le traitement des contacts frottants entre les corps. Dans cette section, nous présentons une formulation Lagrangienne totale explicite de la MPM, qui sera combinée avec un nouvel algorithme de contact implicite basé sur la méthode CD.

Considérons un domaine  $\Omega_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ , où  $D$  est la dimension du domaine, avec une frontière externe  $\partial\Omega_0$ , décrivant un corps continu dans sa configuration initiale. Les grandes déformations sont prises en compte et une formulation Lagrangienne totale est adoptée. La conservation de sa quantité de mouvement peut être définie par l'équation suivante :

$$\nabla \cdot \Pi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \rho(\mathbf{X}, t) \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) \quad \text{in } \Omega_0, \quad (1)$$

où  $\rho(\mathbf{X}, t)$  est la densité du matériau,  $\Pi(\mathbf{X}, t)$  est la première contrainte de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{b}(\mathbf{X}, t)$  représente la force volumique, et  $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$  est l'accélération à la position  $\mathbf{X}$  (dans la configuration initiale  $\Omega_0$ ) et au temps  $t$ .

Dans le cadre de la MPM, le corps est divisé en  $N_p$  points matériels représentant une quantité de matière fixe, permettant de satisfaire la conservation de la masse. En outre, de manière similaire à la méthode des éléments finis, ces points servent de points d'intégration sur le volume dans une formulation faible utilisant une fonction de Dirac. Ainsi, en présence de contacts entre les corps, la forme faible de l'équation du mouvement (1) sous la forme discrétisée peut s'écrire :

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{\text{nodal}}(t) = \mathbf{f}^{\text{int}}(t) + \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) + \mathbf{f}^{\text{C}}(t), \quad (2)$$

où  $\mathbf{a}_{\text{nodal}}$  est l'accélération nodale,  $\mathbf{f}^C$  est la force de contact,  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  représente la force extérieure appliquée, et :

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p^e} m_p \mathbf{N}_{p_0} \quad \text{matrice de masse nodale ,} \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(t) = - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p^e} \mathbf{G}_{p_0} \Pi_p(t) V_{p_0} \quad \text{vecteur de la force intérieure .} \quad (4)$$

Dans les équations (3) et (4),  $\mathbf{N}_{p_0}$  et  $\mathbf{G}_{p_0}$  représentent respectivement la matrice et le gradient de la fonction de forme, définis par rapport à la configuration initiale.  $m_p$  et  $V_{p_0}$  sont la masse et le volume associés au point matériel dans la configuration initiale.

Pour étudier un assemblage de particules déformables, les forces de contact  $\mathbf{f}^C$  entre les particules nécessitent d'être calculées à l'aide d'un algorithme de contact prenant en compte la condition de non-interpénétration de la matière ainsi que la loi de frottement de Coulomb. Dans le cas des particules rigides, la méthode de dynamique des contacts est une approche implicite pour le traitement des contacts frottants sans régularisation. Cependant, contrairement à des particules parfaitement rigides, la méthode de résolution doit être adaptée aux particules discrétisées en points matériels.

Nous proposons ici un nouvel algorithme de contact basé sur le calcul des forces de contact directement sur les points matériels. Chaque point matériel sur le bord du corps est traité comme une particule circulaire (ou sphérique en 3D) dont le diamètre est égal à la distance moyenne entre les points matériels. Les positions des points matériels sont situées au centre du volume qui leur est associé. Ce volume pour les points matériels sur le bord est presque égal au volume de la particule circulaire/sphérique. Par conséquent, l'hypothèse selon laquelle les points matériels sur le bord sont des particules circulaires/sphériques n'entraîne pas d'excès de volume dans les corps. En se basant sur cette hypothèse, les forces de contact sont calculées en appliquant la méthode CD, qui évite d'introduire des paramètres de rigidité artificiels. Notons que chaque point matériel appartenant à un corps peut être en contact avec plusieurs points matériels des autres corps.

### 3 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons deux applications pour démontrer l'efficacité et la précision de la procédure TLMPM-CD proposée. Le premier exemple concerne le contact Hertzien par la compression diamétrale d'une seule particule élastique. Le second exemple aborde la compaction de 400 particules circulaires élastiques, illustrant ainsi l'efficacité de l'algorithme dans la simulation d'assemblages granulaires mous.

Pour ces exemples, des simulations bidimensionnelles ont été effectuées à l'aide de la méthode TLMPM-CD. Des éléments à quatre nœuds ont été utilisés pour mailler chaque particule. L'interpolation spline cubique a été appliquée [10]. Pour toutes les simulations, un module d'Young de  $E = 1$  MPa, un coefficient de Poisson de  $\nu = 0,45$  et une densité de  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> ont été considérés pour les particules élastiques. L'effet de la gravité a été négligé afin d'éviter des gradients de contrainte supplémentaires.

#### 3.1 Compaction d'une particule molle : Contact Hertzien

Dans cette section, on considère une particule cylindrique élastique soumise à une compression diamétrale entre deux parois rigides ; voir la Figure 1. La particule de diamètre  $D = 20$  mm est comprimée en déplaçant la paroi supérieure vers le bas à une vitesse constante de  $v_i = 0.1$  m/s tandis que la paroi inférieure est fixe. Le pas de temps est fixé à  $\Delta t = 10^{-4}$  ms. Il est à noter que les simulations MPM sont effectuées dans des conditions de contraintes planes. Il n'y a pas de frottement entre les parois et le disque. Comme la continuité des champs de contrainte et de déformation à l'intérieur de la particule dépend de sa discrétisation par points matériels, la simulation a été répétée pour différents niveaux de la résolution spatiale relative des points matériels  $\zeta$  définie comme suit :

$$\zeta = \frac{2\Delta r}{D} , \quad (5)$$

où  $\Delta r$  est la distance moyenne entre les points matériels.

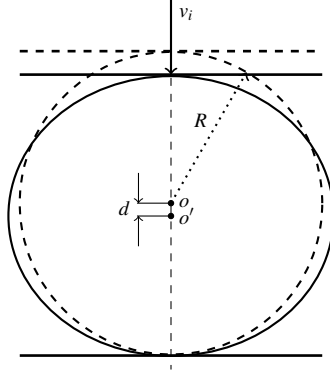


FIGURE 1 – Géométrie de contact entre un disque et deux parois rigides.

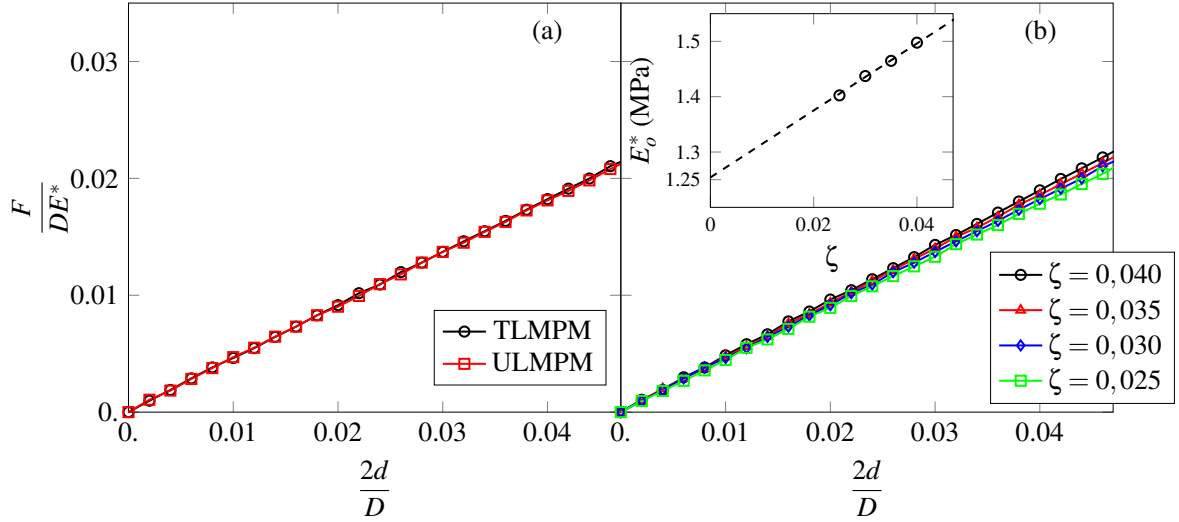
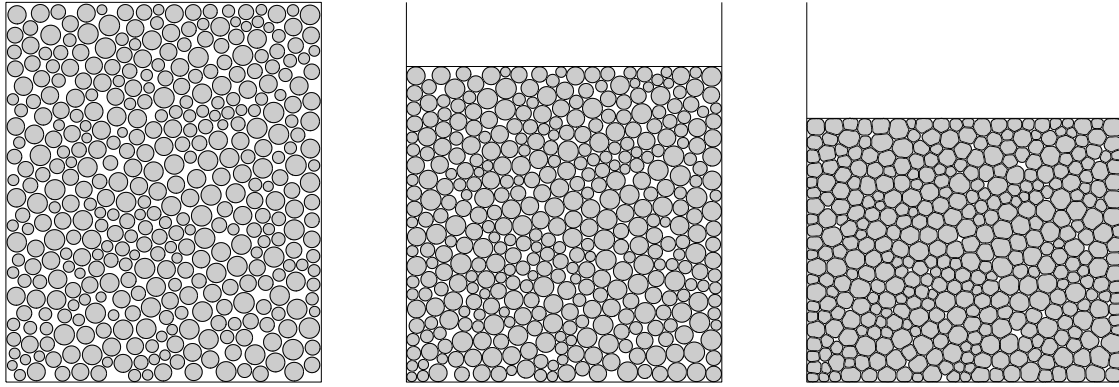


FIGURE 2 – La force de compression  $F$  normalisée par le diamètre de la particule  $D$  et le module élastique effectif théorique  $E^*$  (avec  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ ) en fonction du déplacement  $d$  normalisé par  $D$  pour la compression diamétrale d'une particule circulaire pour les approches ULMPM et TLMPM ( $\zeta = 0,030$ ) (a), et pour différentes valeurs de résolutions spatiales relatives de  $\zeta$  en utilisant la simulation TLMPM (b). Encadré : Le module élastique effectif  $E_o^*$  obtenu pour différentes valeurs de  $\zeta$  sur la base de la théorie du contact de Hertz en 2D (voir l'équation (6)) en fonction de  $\zeta$ .  $E_o^*$  tend vers sa valeur théorique  $E^* \simeq 1.25$  MPa.

La force de contact normale  $F$  en fonction du déplacement  $d$  du centre du cylindre est représentée pour les approches ULMPM et TLMPM ( $\zeta = 0,030$ ) et pour quatre valeurs de  $\zeta$  en utilisant la simulation TLMPM dans la Figure 2. Nous observons que les simulations ULMPM et TLMPM donnent presque les mêmes résultats, comme le montre la figure 2(a). Toutefois, il convient de noter que le temps de calcul de la TLMPM est environ deux fois inférieur à celui de l'ULMPM. Dans la Figure 2(b), nous observons que  $F$  varie linéairement avec  $d$  pour toutes les valeurs de  $\zeta$ , mais avec des taux différents. Cette variation linéaire de  $F$  en fonction de  $d$  correspond à la prédiction de l'analyse de Hertz pour un cylindre de longueur unitaire [11] :

$$F = \frac{\pi}{4} E^* d, \quad (6)$$

où  $E^*$  est le module élastique effectif défini comme  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ ; cependant, dans la Figure 2(b), on peut observer que  $E_o^*$ , tel que déterminé par la pente, dépend de  $\zeta$ . La résolution spatiale a en effet un impact sur les propriétés élastiques effectives, et l'élasticité du continuum peut ne pas être représentée avec précision par une discrétisation en points matériels, en particulier à l'interface de contact. Néanmoins, comme les modules élastiques sont généralement des fonctions affines de la résolution spatiale, nous pouvons obtenir une valeur exacte des modules élastiques par extrapolation à partir de points de



(a) Initial state :  $\Phi = 0,70$

(b)  $\mu_s = 0 - \Phi = 0,84$

(c)  $\mu_s = 0 - \Phi = 0,98$

FIGURE 3 – L'état initial de l'assemblage de 400 particules (a) et deux états de l'assemblage compacté de particules non frottantes ( $\mu_s = 0$ ) pour les compacités  $\Phi = 0,84$  (b) et  $0,98$  (c)

données à travers différentes résolutions spatiales, atteignant finalement la limite d'une résolution infiniment élevée. L'encadré de la Figure 2(b) illustre ce phénomène, où le module élastique effectif obtenu  $E_o^*$  est représenté en fonction de  $\zeta$ . Il est évident que  $E_o^*$  varie linéairement avec  $\zeta$  et s'approche de la valeur théorique de  $E^* \simeq 1.25$  MPa dans nos simulations. Cet exemple souligne la précision de notre algorithme de contact MPM, qui reproduit correctement le comportement du contact de Hertz en 2D et fournit des prévisions de plus en plus précises de la rigidité du contact avec des résolutions spatiales plus élevées.

### 3.2 Compression uni-axiale d'un assemblage de particules molles

Considérons un assemblage de 400 particules présentant une faible polydispersité, confinées dans une boîte rectangulaire où seule la paroi supérieure est mobile, comme illustré dans la Figure 3a. La configuration initiale est préparée en utilisant la méthode CD. À partir de cette configuration, la procédure de compaction est modélisée en déplaçant la paroi supérieure vers le bas à une vitesse constante de 0.5 m/s, avec un pas de temps de  $\Delta t = 10^{-5}$  ms. Il est supposé qu'il n'y a aucun frottement entre les parois et les particules, bien que cinq valeurs du coefficient de frottement soient prises en compte entre les particules :  $\mu_s = 0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 5$  et  $0, 7$ . Notons que les simulations sont effectuées dans des conditions de déformation plane.

La Figure 3 montre la configuration initiale et les états de l'assemblage lors de l'essai de compaction pour  $\mu_s = 0, 0$ . Au début, l'assemblage granulaire n'est pas compacté (Figure 3a). Au cours de la phase initiale de compaction, de nouveaux contacts se forment entre les particules jusqu'à ce qu'elles soient bloquées, atteignant ainsi le point de blocage (comme illustré dans la Figure 3b qui se situe autour du point de blocage pour  $\mu_s = 0, 0$ ). À ce stade, les particules ne peuvent plus se déplacer ni se réarranger, et la compacité (définie comme  $\Phi = V_s/V$ , où  $V_s$  est le volume des particules et  $V$  est le volume total) n'augmente que grâce aux changements de forme des particules résultant de leurs déformations. Cela permet aux particules de remplir presque entièrement l'espace à la fin de la compaction, comme le montre la Figure 3c. De plus, la forme des particules évolue progressivement d'une forme circulaire à une forme presque polygonale.

Pour étudier les effets de la discrétisation, nous considérons quatre valeurs de la résolution spatiale relative des points matériels  $\zeta = 0, 10, 0, 11, 0, 13$ , et  $0, 15$ . Dans la figure 4(a), nous représentons la contrainte verticale  $\sigma$ , calculée à partir des forces de contact agissant sur la paroi inférieure, en fonction de la compacité  $\Phi$  pour un coefficient de frottement de  $\mu_s = 0, 0$  et diverses valeurs de  $\zeta$ . Il est important de noter que  $\sigma$  est également équivalent à la contrainte moyenne dans la direction  $y$  des particules. Nous observons que les tendances de  $\sigma$  par rapport à  $\Phi$  pour  $\zeta = 0, 10$  et  $0, 11$  sont similaires et légèrement différentes de celles pour  $\zeta = 0, 13$  et  $\zeta = 0, 15$ . Par conséquent, le choix de  $\zeta = 0, 11$  semble convenir aux prochaines simulations.

La figure 4(b) montre la contrainte verticale ( $\sigma$ ) en fonction de la compacité ( $\Phi$ ) pour différentes

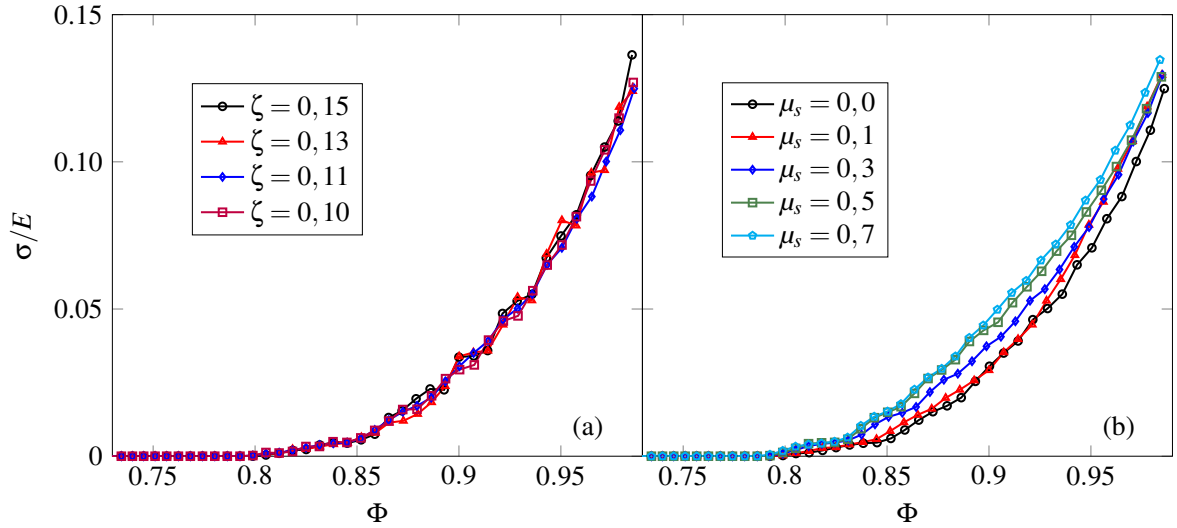


FIGURE 4 – La contrainte verticale appliquée par l’assemblage à la paroi inférieure,  $\sigma$ , normalisée par le module d’Young des particules  $E$ , en fonction de la compacité  $\Phi$  (a) pour différentes valeurs de  $\zeta$  ( $\mu_s = 0.0$ ) et (b) pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu_s$  ( $\zeta = 0.11$ ).

valeurs du coefficient de frottement  $\mu_s$ . Pour chaque valeur de  $\mu_s$ ,  $\sigma$  fluctue initialement près de zéro en dessous d’un seuil spécifique de  $\Phi$ , représentant la transition de rigidité ou l’état d’empilement aléatoire lâche (*Random Loose Packing : RLP*), qui varie avec  $\mu_s$ . Au-delà de ce seuil de  $\Phi$ ,  $\sigma$  augmente de manière significative. Comme nous l’avons déjà mentionné, à des compacités très élevées, les petits pores restants ne peuvent être remplis qu’en changeant la forme des particules sous des niveaux de contrainte très élevés. Il convient également de noter que, pour atteindre le même niveau de  $\Phi$ ,  $\sigma$  augmente à mesure que  $\mu_s$  augmente. Immédiatement après l’état RLP, l’assemblage reste fragile, permettant aux particules de se déplacer et de se réarranger jusqu’à ce qu’elles atteignent l’état d’empilement aléatoire compact (*Random Close Packing : RCP*) ou blocage.

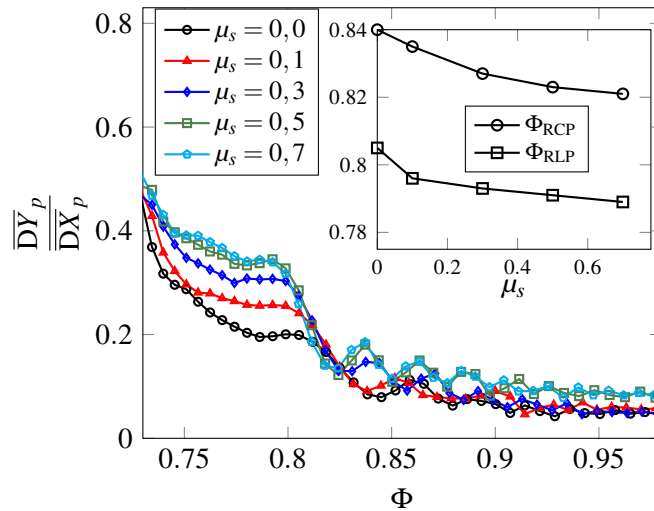


FIGURE 5 – Le rapport entre le déplacement moyen des particules dans la direction  $y$  et celui dans la direction  $x$ ,  $\frac{\overline{DY}_p}{\overline{DX}_p}$ , en fonction de la compacité  $\Phi$  pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu_s$ . Encadré : les valeurs de la compacité aux états RLP et RCP,  $\Phi_{\text{RLP}}$  et  $\Phi_{\text{RCP}}$ , en fonction de  $\mu_s$ .

Pour déterminer le point de blocage, les déplacements globaux moyens des particules dans les directions  $x$  et  $y$  sont pris en compte. La vitesse étant imposée à la paroi supérieure (c’est-à-dire dans la direction  $y$ ), nous nous attendons à ce que les déplacements des particules dans la direction  $x$  subissent un changement discontinu lorsque le point de blocage est atteint, en raison de la transition vers un état

où les déplacements des particules sont régis par les changements élastiques des particules. Par conséquent, le rapport entre le déplacement moyen des particules dans la direction  $y$  et celui dans la direction  $x$ ,  $\frac{\overline{DY}_p}{\overline{DX}_p}$ , est représenté en fonction de la compacité  $\Phi$  pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu_s$  dans la Figure 5. Ici, le point RLP correspond au premier pic et le point de blocage (ou RCP) au premier creux pour chaque valeur de  $\mu_s$ . Dans l’encadré de la figure 5, les compacités aux points RLP et RCP sont représentées en fonction de  $\mu_s$ . Tant  $\Phi_{\text{RLP}}$  que  $\Phi_{\text{RCP}}$  diminuent lorsque  $\mu_s$  augmente. C’est une conséquence de l’effet stabilisateur du coefficient de frottement sur les configurations des particules. Il convient de noter que, pour  $\mu_s = 0,0$ , l’état RCP se produit pour  $\Phi \approx 0,84$ , ce qui correspond à la transition de blocage pour un système de particules de type disque sans frottement [1]. Cependant, il faut noter qu’à proximité de l’état RLP, un comportement linéaire est observé en raison des petites déformations des grains ; voir la Fig. 4. Ce comportement peut être modélisé à l’aide de la loi de contact de Hertz [12].

## 4 Conclusions

Dans cet article, nous avons développé une nouvelle procédure numérique pour simuler les systèmes granulaires mous. Cette approche combine une formulation Lagrangienne totale explicite de la méthode des points matériels (MPM) pour les déformations des particules individuelles avec la méthode de la dynamique des contacts (CD) pour traiter les contacts frottants. La MPM est capable de prendre en compte le comportement mécanique réaliste des particules individuelles, y compris les comportements élastiques et inélastiques, avec la possibilité de grandes déformations avec ou sans rupture. Dans des travaux antérieurs [3, 4, 6], une formulation Lagrangienne actualisée implicite de la MPM a été couplée à la méthode CD. Notre nouvelle méthode Lagrangienne totale explicite présente l’avantage de réduire considérablement les coûts de calcul par rapport au modèle implicite. De plus, l’algorithme de contact basé sur la méthode CD gère les contacts entre les points matériels, contrairement à l’approche précédente où les contacts étaient traités sur les nœuds du maillage sous-jacent. Cela permet un calcul plus précis des composantes de contact par rapport aux changements de forme des particules.

Deux exemples ont été présentés pour illustrer le potentiel de cette approche TLMPM-CD dans la simulation des comportements des particules molles. Nous avons d’abord effectué des simulations de la compression diamétrale d’une seule particule afin d’évaluer l’efficacité de notre nouvelle approche pour traiter les interactions de contact entre les particules molles et les effets de la discrétisation des particules. Nous avons démontré qu’à mesure que la résolution spatiale augmente, les résultats numériques se rapprochent de la solution théorique.

L’approche proposée a ensuite été utilisée pour simuler la compression uni-axiale d’un assemblage de particules élastiques. Pour différentes valeurs du coefficient de frottement entre les particules, les états d’empilement aléatoire lâche et compact ont été déterminés. Comme prévu, les assemblages ayant des coefficients de frottement plus élevés se bloquent plus rapidement et à une compacité plus faible. Il a été démontré que la contrainte de compression au-delà de l’état de référence (ici, l’état RLP a été considéré comme l’état de référence) varie de manière logarithmique avec la compacité.

Les simulations analysées dans cet article valident l’approche TLMPM-CD proposée et son adéquation à l’étude d’assemblages de particules déformables réalistes soumis à des charges complexes. L’extension de cette approche à la 3D est simple, car les comportements de masse et de contact sont traités aux points matériels et aux nœuds du maillage sous-jacent, et le même algorithme de contact est applicable en 3D.

## Remerciement

Nous remercions l’Agence Nationale de la Recherche (ANR) de son soutien dans le cadre de la subvention ANR-20-CE08-0011 (projet PaMaCo). Nous remercions également la plateforme bioinformatique de Genotoul à Toulouse-Occitanie (Bioinfo Genotoul, <https://doi.org/10.15454/1.5572369328961167E12>) d’avoir fourni des ressources de calcul.

## Références

- [1] M. van Hecke. *Jamming of soft particles : geometry, mechanics, scaling and isostaticity*, Journal of Physics : Condensed Matter, 22, 033101, 2010.
- [2] F. Radjai, F. Dubois. *Discrete Numerical Modeling of Granular Materials*, Wiley-ISTE, New-York, 2011.
- [3] S. Nezamabadi, T.H. Nguyen, J.-Y. Delenne, F. Radjai. *Modeling soft granular materials*, Granular Matter 19, 8, 2017.
- [4] S. Nezamabadi, F. Radjai, J. Averseng, J.-Y. Delenne. *Implicit frictional- contact model for soft particle systems*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 83, 72–87, 2015.
- [5] T.-L. Vu, S. Nezamabadi, S. Mora. *Effects of particle compressibility on structural and mechanical properties of compressed soft granular materials*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 146, 104201, 2021.
- [6] S. Nezamabadi, X. Frank, J.-Y. Delenne, J. Averseng, F. Radjai. *Parallel implicit contact algorithm for soft particle systems*, Computer Physics Communications 237, 17–25, 2019.
- [7] S. Nezamabadi, M. Ghadiri, J.-Y. Delenne, F. Radjai. *Modelling the compaction of plastic particle packings* Computational Particle Mechanics 9, 45-52, 2022.
- [8] J.-J. Moreau. *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, Journal of Differential Equations 26, 347–374, 1977.
- [9] S.G. Bardenhagen, J.E. Guilkey, K.M. Roessig, J.U. Brackbill, W.M. Witzel, J.C. Foster. *An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material*, Computer Modelling in Engineering and Sciences 22, 509–522, 2001.
- [10] A. de Vaucorbeil, V.P. Nguyen, S. Sinaie, J.Y. Wu. *Material point method after 25 years : Theory, implementation, and applications*, Advances in Applied Mechanics 53, 185–398, 2020.
- [11] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*, University Press, Cambridge, 1999.
- [12] S. Nezamabadi, F. Radjai, S. Mora, J.-Y. Delenne, M. Ghadiri. *Rheology of soft granular materials : uniaxial compression*, EPJ Web of Conferences 249, 05008, 2021.