

# Modèle mixte position-courbure pour la statique des rubans élastiques

R. Charrondière<sup>1</sup>, S. Neukirch<sup>2</sup>, F. Bertails-Descoubes<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ. Grenoble Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP, LJK

<sup>2</sup> Sorbonne Université, CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR 7190

**Résumé** — Les rubans élastiques sont des structures intermédiaires entre les plaques et les poutres. Nous utilisons les modèles de rubans développables de Sadowsky et Wunderlich ainsi qu'un modèle récent (Ribext) où la contrainte de développabilité (inextensibilité de la surface moyenne) est levée. Nous introduisons une approche numérique où la courbure ainsi que la position/orientation du ruban sont traitées comme variables principales. Cette approche mixte permet d'obtenir une dépendance linéaire du temps de calcul tout en garantissant une convergence quadratique par rapport au nombre d'éléments.

**Mots clés** — plaques, poutres, optimisation sous contrainte.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons aux rubans élastiques, des structures à mi-chemin entre les plaques et les poutres. Nous étudions les solutions d'équilibre de ces rubans en utilisant les modèles de rubans développables de Sadowsky et Wunderlich ainsi qu'un modèle récent (Ribext) où la contrainte d'inextensibilité de la surface moyenne est levée. Pour le calcul de la statique de ces rubans, nous introduisons une approche numérique basée sur une discrétisation spatiale de haut degré. Sur chaque élément la courbure normale du ruban est linéaire par morceau (et la torsion géodésique quadratique) par rapport à l'abscisse curviligne le long du ruban. En complément des courbures et torsions, nous utilisons les variables additionnelles de position et d'orientation du ruban en chaque début d'élément. Cette approche mixte position-courbure permet de retrouver une dépendance linéaire du temps de calcul ainsi qu'une convergence quadratique par rapport au nombre d'éléments. De plus, le traitement du contact avec des obstacles se trouve simplifié, ce que nous illustrons sur un exemple de ruban de Moebius posé sur un support.

Cette présentation est extraite de notre étude complète menée dans [1].

## 2 Modèle

Nous considérons une structure de longueur  $L$ , largeur  $w$ , et épaisseur  $h$ , voir figure 1. Dans la limite de faible épaisseur,  $h \ll w \sim L$ , cette structure est une plaque mince alors que dans la limite de petite section,  $h \sim w \ll L$ , cette structure est une poutre. La différence principale entre les modèles pour la statique des plaques et poutres est le type d'équation à résoudre, équations aux dérivées partielles pour les plaques (modèle 2D) et équations différentielles ordinaires pour les poutres (modèle 1D).

Les rubans se placent dans un régime intermédiaire,  $h \ll w \ll L$ , où il est possible d'obtenir un modèle 1D en opérant une pré-intégration de la réponse mécanique (homogénéisation) le long de la largeur  $w$  du ruban. Ces modèles 1D ont été introduits par Sadowsky [2] et Wunderlich [3, 4] qui ont fait l'hypothèse que la surface du ruban déformé était développable (sans extension par rapport à la

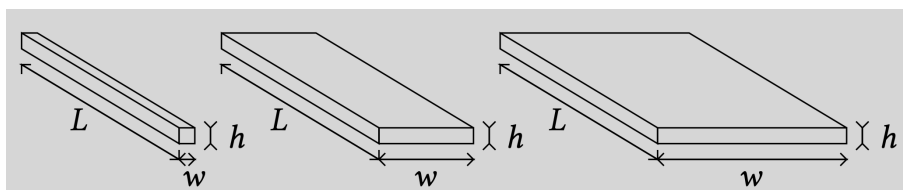


FIGURE 1 – Poutre, ruban, et plaque.

configuration plate). Plus récemment des modèles extensibles ont été proposés [5, 6] et permettent de traiter le cas des rubans étroits  $w \sim \sqrt{Lh}$  et de retrouver la limite de la poutre à section rectangulaire, dans laquelle la surface moyenne est effectivement étirée.

## Équations

Le matériau du ruban est considéré élastique, isotrope, et uniforme. Nous ne considérons que des cas où l'éclatement de la structure fait que même si la configuration déformée est en grandes rotations, le matériau ne quitte pas sa plage de comportement linéaire élastique. La ligne centrale du ruban est notée  $\mathbf{r}(s)$  où  $s$  est l'abscisse curviligne dans la configuration de référence. Nous faisons l'hypothèse que cette ligne centrale est inextensible,  $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ ,  $s$  est donc aussi l'abscisse curviligne dans l'état déformé.

En plus de la ligne centrale, la déformation du ruban est suivie grâce à un trièdre orthonormé de Cosserat :  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ , ces trois vecteurs étant organisés en colonnes dans la matrice de rotation  $\mathcal{R} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ . Ce trièdre est tel que  $\mathbf{d}_2$  est normal à la surface du ruban et  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3\}$  dans le plan tangent, le vecteur  $\mathbf{d}_3$  étant tangent à la ligne centrale  $\mathbf{r}(s)$ ,

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{d}_3(s). \quad (1)$$

La caractéristique orthonormé du trièdre implique l'existence d'un vecteur de Darboux  $\Omega(s) = \kappa_1(s)\mathbf{d}_1(s) + \kappa_2(s)\mathbf{d}_2(s) + \kappa_3(s)\mathbf{d}_3(s)$  qui permet de calculer l'évolution du trièdre le long de la structure

$$\mathcal{R}'(s) = \mathcal{R}(s) [\boldsymbol{\kappa}]_{\times}, \quad (2)$$

où  $[\boldsymbol{\kappa}]_{\times}$  est la matrice anti-symétrique associée au vecteur courbure  $\boldsymbol{\kappa}(s) = \{\kappa_1(s), \kappa_2(s), \kappa_3(s)\}$  [7, section 2.2]. Dans le cas des rubans, la très forte rigidité en courbure autour de  $\mathbf{d}_2$  impose que  $\kappa_2(s) \equiv 0$ ; nous introduisons alors la notation  $\kappa(s) = \kappa_1(s)$ . De plus nous utilisons la variable  $\eta(s)$ , telle que  $\kappa_3(s) = \eta(s)\kappa(s)$ , à la place de  $\kappa_3$ . Ainsi le vecteur de Darboux s'écrit  $\Omega(s) = \kappa(s)\mathbf{d}_1(s) + \kappa(s)\eta(s)\mathbf{d}_3(s)$  et nous avons

$$\mathcal{R}'(s) = \mathcal{R}(s) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s)\eta(s) & 0 \\ \kappa(s)\eta(s) & 0 & -\kappa(s) \\ 0 & \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Les deux équations (1) et (3) et les valeurs initiales de  $\mathbf{r}(0)$ ,  $\mathcal{R}(0)$  permettent de définir de manière unique la déformée du ruban.

En s'appuyant sur cette cinématique, nous pouvons maintenant introduire l'énergie élastique de Wunderlich

$$E_{\mathcal{W}} = \frac{Dw}{2} \int_0^L \kappa^2 (1 + \eta^2)^2 \psi(w\eta') ds, \quad (4a)$$

$$\text{avec } \psi(w\eta') = \frac{1}{w\eta'} \log \left( \frac{2 + w\eta'}{2 - w\eta'} \right), \quad (4b)$$

où  $D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité en courbure de la surface,  $Y$  le module de Young, et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Dans la limite  $\eta'w \rightarrow 0$ , cette énergie de Wunderlich  $E_{\mathcal{W}}$  se simplifie en l'énergie de Sadowsky

$$E_S = \frac{Dw}{2} \int_0^L \kappa^2 (1 + \eta^2)^2 ds. \quad (5)$$

Un troisième modèle, nommé Ribext [5], prend en compte l'extensibilité de la surface moyenne du ruban. C'est une généralisation du travail de R. Shield [8] dans le cas où le ruban peut se tordre (twist) en plus de se courber. Ce modèle Ribext a pour énergie de déformation élastique

$$E_{\mathcal{R}} = \frac{Dw}{2} \int_0^L (1 - \nu^2) \kappa^2 \left( 1 + \frac{2}{1 + \nu} \eta^2 + \frac{(\nu + \eta^2)^2}{1 - \nu^2} \phi(x) \right) ds \quad (6a)$$

$$\phi(x) = 1 - \frac{2 \cosh x - \cos x}{x \sinh x + \sin x}, \quad x = [3(1 - \nu^2)]^{1/4} \left( \frac{w^2 |\boldsymbol{\kappa}|}{h} \right)^{1/2}. \quad (6b)$$

La fonction  $\phi$  prend des valeurs entre 0 et 1, et croit de manière monotone de  $\phi(0) = 0$  à  $\phi(+\infty) = 1$ . Dans la limite  $\phi = 0$ , l'énergie du modèle Ribext se simplifie en une énergie de poutre de Kirchhoff à section rectangulaire de grand rapport d'aspect, avec un rapport entre la rigidité de torsion et la rigidité de courbure valant  $2/(1+\nu)$ , voir par exemple [9, chapitre 6, section 6.3.8]. Dans la limite opposée, quand  $\phi = 1$ , nous retrouvons l'énergie élastique de Sadowsky, voir équation 5. Le modèle Ribext permet donc de passer continûment de rubans très étroits (faible largeur  $w$ , donc faible valeur de  $\phi$ ) à de larges rubans (largeur  $w$  importante, donc  $\phi \simeq 1$ ). La quantité adéquate pour juger du comportement du ruban est le nombre de Shield

$$\text{Sh} = \frac{w^2}{hL} \int_0^L |\kappa(s)| ds, \quad (7)$$

le système étant à mi-parcours entre poutre et ruban quand  $\phi = 0.5$ , c'est à dire quand  $\text{Sh} \simeq 10$ . Un point important est que le nombre de Shield dépend de la déformée, via la courbure  $\kappa(s)$ , et pas seulement des paramètres géométriques du système. Ainsi un ruban avec un rapport  $\frac{w^2}{hL}$  modéré peut néanmoins avoir un nombre de Shield faible et donc se comporter comme une poutre si la courbure est faible partout,  $|\kappa(s)|L \ll 1$  pour tout  $s$ .

Nous allons considérer des rubans déformés par leur poids propre. Nous ajoutons l'énergie potentielle de pesanteur du ruban et nous considérons le cas simplifié où la masse du rubans est concentrée sur la ligne centrale

$$E_G = - \int_0^L \rho h w \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{g} ds = -\rho h w \mathbf{g} \cdot \int_0^L \mathbf{r}(s) ds, \quad (8)$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $\mathbf{g}$  le champ (uniforme) de pesanteur.

## Discrétisation

Nous avons ainsi une énergie potentielle totale

$$E(\mathbf{X}) = E_{\text{el}}(\mathbf{X}) + E_G(\mathbf{X}), \quad (9)$$

où  $E_{\text{el}}$  correspond à  $E_S$ ,  $E_W$  ou  $E_{\mathcal{R}}$ . Cette énergie est discrétisée de la manière suivante. Le ruban est divisé en  $p$  éléments (typiquement  $p \sim 100$ ). À chaque élément sont attachées les variables suivantes : (i) accroissement linéaire de la courbure  $\kappa$  et de  $\eta$  (2 scalaires), (ii) position en début d'élément (3 scalaires), (iii) entrées de la matrice de rotation  $\mathcal{R}$  en début d'élément (9 scalaires). Ces variables sont regroupées dans un vecteur  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  avec  $n = 14p + 2$ . Les conditions de raccord en position et orientation entre les éléments ainsi que les conditions d'encastrement aux extrémités, mais aussi les conditions d'orthonormalité sur la matrice  $\mathcal{R}$  font que l'énergie  $E(\mathbf{X})$  est minimisée sous contraintes d'égalité,  $h_j(\mathbf{X}) = 0$ . De plus les conditions de contact unilatéral (sans frottement) fournissent un jeu de contraintes d'inégalité,  $g_k(\mathbf{X}) \geq 0$ . En pratique, nous utilisons le jeu de routines IPOPT [10] pour trouver un minimum local (et donc un équilibre stable) qui satisfait les contraintes d'égalité et d'inégalité.

## 3 Benchmark

Notre précédente implémentation numérique des modèles de ruban [7], le modèle dit 'chaîné', ne comportait pas les positions ni les orientations comme variables. Ce modèle avait moins de degrés de liberté ( $2p + 2$ ) mais la position de la ligne centrale était obtenue par intégration numérique du système (1)-(2) en partant de l'extrémité gauche,  $s = 0$ , ce qui rendait la solution sensible aux petites différences ou erreurs de conditions initiales. De plus la matrice Hessienne de l'énergie (i.e. la matrice jacobienne dans l'algorithme de Newton) était donc dense et son inversion lors d'une itération de Newton coûteuse à grand nombre d'éléments, puisque de complexité cubique, voir figure 2. Le présent modèle en revanche compte plus de degrés de liberté ( $14p + 2$ ) mais l'introduction des variables de position et d'orientation aux jonctions entre éléments rend la Hessienne creuse (typiquement à structure en bande), ce qui permet d'obtenir une complexité linéaire (typique des approches basées uniquement sur les positions), voir figure 2. Cette figure 2 montre le temps de calcul pour converger vers une solution de flambage latéral dans une configuration où le ruban est encastré à une extrémité et libre à l'autre. Le ruban est par ailleurs

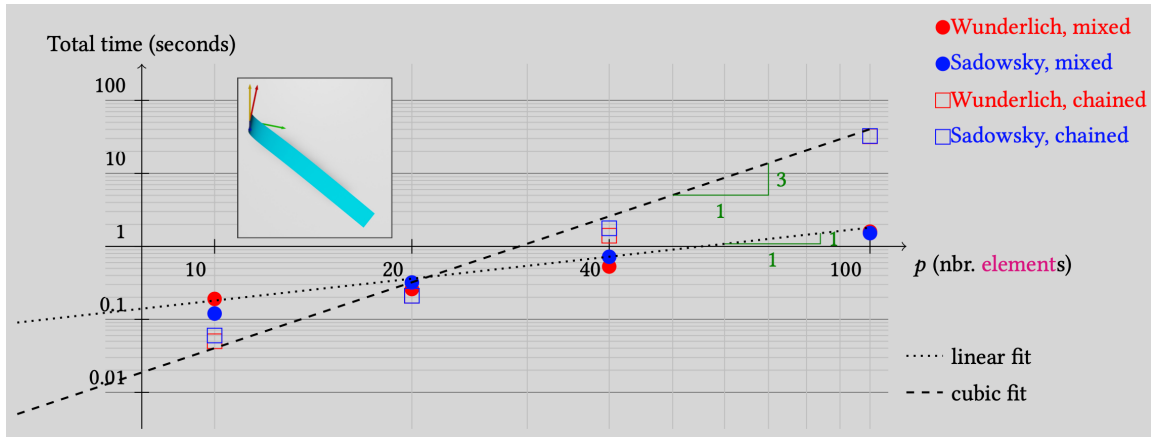


FIGURE 2 – Temps de calcul pour le présent modèle mixte comparé au modèle 'chaîné' [7] pour un scénario de ruban encastré-libre soumis à son poids propre. Le modèle mixte devient compétitif lorsque le nombre d'éléments dépasse un seuil, ici  $p = 20$ .

soumis à son poids propre, charge qui est donc distribuée sur toute sa longueur. On voit donc que le modèle mixte est un peu plus lourd à faible nombre d'éléments (moins de 20) mais devient vite compétitif dès que ce nombre d'éléments augmente. Enfin notons que le fait de conserver une approche de haut degré (variables en courbures et leurs dérivées) permet d'approcher de manière précise la solution exacte avec un nombre total d'éléments somme toute restreint (dans tous nos scénarios, de l'ordre de quelques dizaines à deux cents au plus).

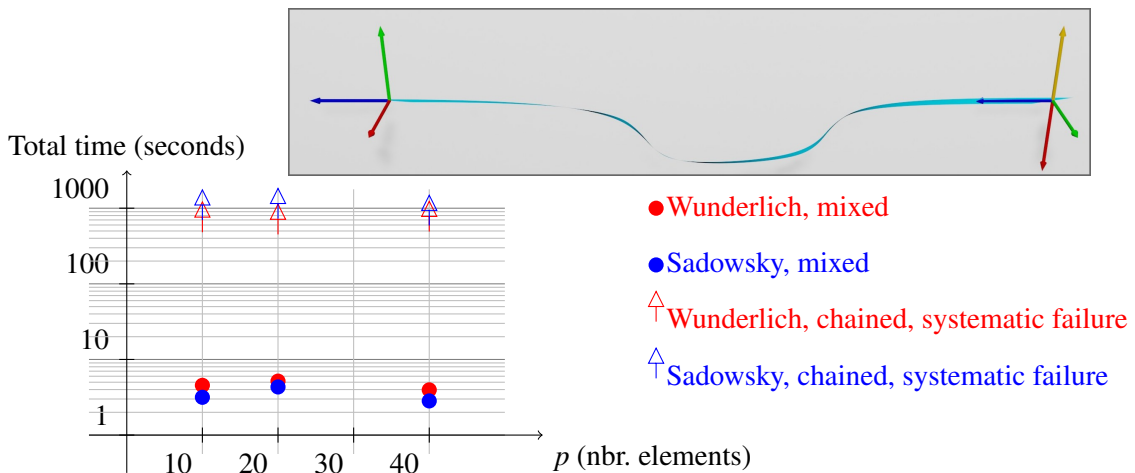


FIGURE 3 – Efficacité des modèles chaîné et mixte pour une expérience de ruban bi-encastré soumis à une compression et une rotation. Le modèle chaîné n'est en fait pas capable de converger correctement vers la solution (nombre maximum d'itérations (1000) atteint). Le modèle mixte, lui, converge en quelques secondes, et ce quel que soit le modèle physique de ruban utilisé (Wunderlich ou Sadowsky). Insert : configuration d'équilibre du ruban, la flèche jaune montrant la verticale, et les flèches rouges, vertes, bleues montrant les trièdres de Cosserat aux deux encastresments, ce qui permet de faire apparaître la rotation d'un quart de tour imposée au système.

La différence entre modèle chaîné et modèle mixte est en fait encore plus marquée dans la deuxième comparaison, que nous documentons en Figure 3. Cette deuxième expérience est plus difficile à réaliser numériquement car le ruban est encastré à ses deux extrémités. Le modèle chaîné n'arrive d'ailleurs pas à converger vers la solution, et c'est d'ailleurs cet échec qui nous a poussé dans un premier temps à développer un modèle alternatif. Le modèle mixte ne prend que quelques secondes pour converger et ce même en présence de plusieurs points singuliers (points où  $\kappa_2 = 0$  et  $\kappa_3 \neq 0$  et donc où  $\eta = \kappa_3/\kappa_2$  est mal défini) le long de la structure.

## 4 Résultats

### Ruban de Moebius

Un test, maintenant devenu un classique pour les implémentations numériques de ruban, est le calcul du ruban de Moebius, voir figure 4. Historiquement, c'est d'ailleurs pour répondre à la question de savoir quelle était la forme d'équilibre d'un ruban élastique de Moebius que Sadowsky a introduit son énergie (5). Expérimentalement, pour former une configuration de Moebius il suffit de prendre une bande de papier, la courber en cercle, puis tourner une extrémité d'un demi-tour. Nous avons observé que les méthodes numériques existantes, celles qui résolvent les équations fortes d'équilibre (type méthode de tir), ou bien celles basées sur une discrétisation en positions [11], ont besoin d'effectuer un cheminement numérique assez fastidieux pour atteindre la solution de Moebius, en décomposant chacune des étapes décrites ci-dessus en petits pas incrémentaux. Ce n'est pas le cas de notre démarche, qui par la robustesse de l'approche variationnelle (minimisation d'énergie) et de la discrétisation mixte, permet d'atteindre la configuration de Moebius en une seule étape de minimisation, soit plus de 10 fois plus rapidement que les approches alternatives.

Enfin, sur la figure 4 de droite, nous montrons deux équilibres stables de ruban de Moebius pesant posé sur un support horizontal rigide. On peut montrer que la configuration 'debout' est stable par rapport au roulement pour une large gamme de largeur  $w$  et d'intensité de pesanteur. Nous avons donc perturbé fortement l'orientation de la pesanteur pour obtenir la configuration 'couchée', avant de rétablir son orientation d'origine (perpendiculaire au plan).

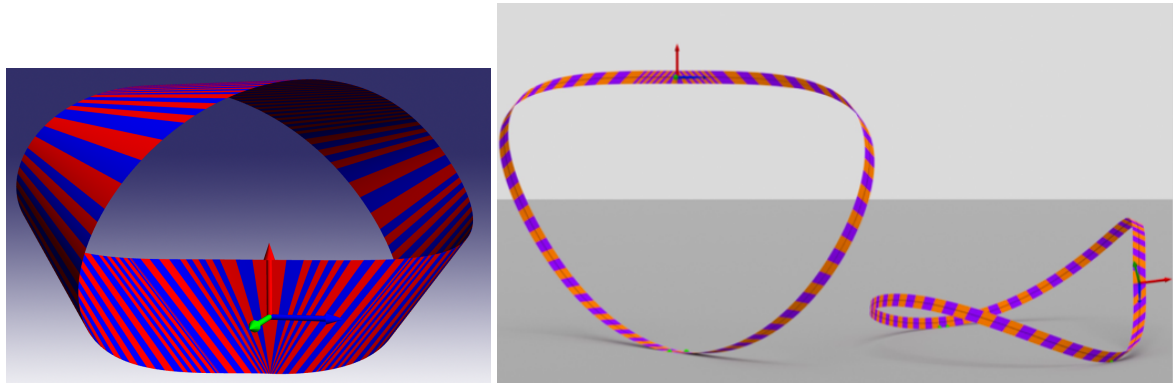


FIGURE 4 – À gauche : configuration de Moebius, sans pesanteur (rapport largeur sur longueur  $w/L = 0.01$  et  $p = 169$  éléments). À droite : configurations de Moebius sous pesanteur, l'une en équilibre sur la tranche et l'autre couchée sur le côté (rapport largeur sur longueur  $w/L = 0.01$ , et rapport poids sur rigidité  $\Gamma = 0.1$ ).

### Flambage latéral en torsion

Nous comparons pour finir les trois modèles physiques introduits en Section 2 sur un cas test classique de flambage de plaque : l'instabilité de torsion latérale, qui peut survenir lorsqu'une poutrelle en voile mince est chargée sur sa tranche [12]. On considère une plaque encastrée à un bord (les trois autres bords étant libres de contraintes) et soumise à son poids propre. L'orientation de l'encastrement est choisie pour que la pesanteur agisse dans la direction de la largeur  $w$ , voir Figure 5. La faible épaisseur de la plaque (nous utilisons  $h/L = 10^{-3}$ ) fait que le système, même en présence de pesanteur, tient en équilibre sur la tranche. Si néanmoins la pesanteur (nous utilisons le nombre sans dimension  $\Gamma = \frac{\text{masse } g}{Dw/L^2} = \frac{\rho ghwL}{Dw/L^2}$  comme mesure de l'intensité de la pesanteur) devient trop forte, alors le système fléchit sur le côté (flambage latéral). Pour des valeurs de  $v = 0.35$ ,  $w/L = 0.1$ ,  $h/L = 10^{-3}$ , une résolution du modèle de coque non-linéaire de Naghdi [13], via le code éléments finis FEniCS-Shell [14], montre que pour  $\Gamma = 20$ , le système est en flambage latéral, voir Figure 5. La faible valeur de la largeur  $w/L = 0.1$  nous autorise à considérer la plaque comme un ruban : nous pouvons alors comparer les différentes variantes implémentées dans notre simulateur de ruban (Sadowsky, Wunderlich et Ribext), et les confronter à FEniCS-Shell. Il apparaît que, pour ces valeurs de paramètres, le modèle Ribext reproduit très bien la configuration d'équilibre trouvée avec FEniCS-Shell, tandis que les modèles de Sadowsky et Wunderlich prédisent

une configuration non flambée. Cette forte différence de comportement entre les modèles vient du fait que, proche de l’encastrement, le ruban subit une déformation extensionnelle importante et que seul Ribext prend en compte l’extensibilité de la surface du ruban.

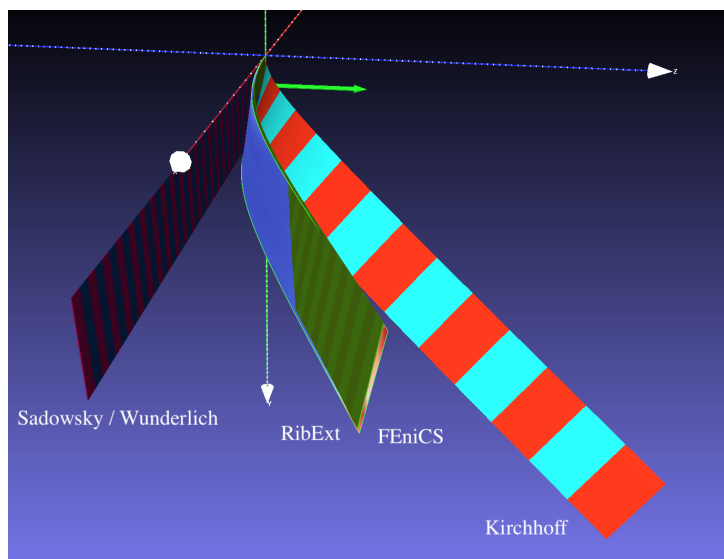


FIGURE 5 – Flambage latéral d’une plaque d’épaisseur  $h/L = 10^{-3}$ , largeur  $w/L = 0.1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.35$ , sous l’effet de son poids. L’intensité de la pesanteur est telle que  $\Gamma = \frac{\text{masse } g}{Dw/L^2} = \frac{\rho ghwL}{Dw/L^2} = 20$ . Les modèles de ruban de Sadowsky, Wunderlich, et Ribext, implémentés dans notre simulateur, sont utilisés et comparés à la solution éléments finis du modèle de coque de Naghdi implémentée dans le logiciel libre FEniCS-Shell.

## Références

- [1] R. Charrondière, F. Bertails-Descoubes, and S. Neukirch. MERCI : Mixed curvature-based elements for computing equilibria of thin elastic ribbons. Under review, 2023.
- [2] M. Sadowsky. Die differentialgleichungen des MÖBIUSSchen bandes. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 39 :49–51, 1929.
- [3] W. Wunderlich. Über ein abwickelbares möbiusband. *Monatshefte für Mathematik*, 66(3) :276–289, 1962.
- [4] R. E. Todres. Translation of W. Wunderlich’s “On a Developable Möbius Band”. *Journal of Elasticity*, 119(1) :23–34, 2015.
- [5] B. Audoly and S. Neukirch. A one-dimensional model for elastic ribbons : A little stretching makes a big difference. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 153 :104457, 2021.
- [6] T. G. Sano, T. Yamaguchi, and H. Wada. Slip Morphology of Elastic Strips on Frictional Rigid Substrates. *Physical Review Letters*, 2017.
- [7] R. Charrondière, F. Bertails-Descoubes, S. Neukirch, and V. Romero. Numerical modeling of inextensible elastic ribbons with curvature-based elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 364 :112922, 2020.
- [8] R. T. Shield. Bending of a beam or wide strip. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 45(4) :567–573, 1992.
- [9] A. I. Lurie. *Theory of Elasticity*. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Berlin, 2005.
- [10] A. Wächter and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1) :25–57, 2006.
- [11] K. Korner, B. Audoly, and K. Bhattacharya. Simple deformation measures for discrete elastic rods and ribbons. *Proceedings of the Royal Society A*, 477(2256) :20210561, 2021.
- [12] N.S. Trahair. *Flexural-torsional buckling of structures*. Chapman & Hall, 1993.
- [13] P. M. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. In I. N. Sneddon and R. Hill, editors, *Progress in Solid Mechanics*, volume 4, pages 1–90. North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [14] J. S. Hale, M. Brunetti, S. P. A. Bordas, and C. Maurini. Simple and extensible plate and shell finite element models through automatic code generation tools. *Computers & Structures*, 209 :163–181, 2018.