

# Optimisation Bayésienne sous contraintes appliquée à l'étude vibratoire de structures intégrant des non-linéarités localisées

L. Laurent<sup>1</sup>, Q. Ragueneau<sup>1,2</sup>, A. Legay<sup>1</sup>, T. Larroque<sup>2</sup>, R. Crambuer<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, EA 3196, Cnam, HESAM Université, Paris, France  
{luc.laurent;quentin.ragueneau;antoine.legay}@lecnam.net

<sup>2</sup> INGELIANCE Technologies, Mérignac, France

**Résumé** — La conception optimale de structures industrielles s'avère être un enjeu important pour répondre aux enjeux normatifs, d'efficacité énergétique ou de réduction des coûts. Ce contexte nécessite la mise en œuvre de démarches d'optimisation paramétrique s'appuyant sur des solveurs haute-fidélité coûteux. On se propose, dans le cadre de ce travail, de développer une méthodologie d'Optimisation Bayésienne sous contrainte adaptée à la dynamique vibratoire intégrant des non-linéarités localisées. La méthodologie complète et des éléments relatifs à la performance sont présentés dans le cadre d'une application à une grue-portique.

**Mots clés** — Optimisation globale sous contrainte ; Vibrations non-linéaires ; Optimisation Bayésienne ; Processus Gaussien ; Méthode d'équilibrage harmonique.

## 1 Introduction

La conception de structures mécaniques complexes est aujourd'hui au cœur des considérations des bureaux d'études pour lesquels l'obtention de solutions mécaniques optimales performantes est devenue incontournable en particulier dans un contexte d'évolution permanente des contraintes normatives. C'est, par exemple, le cas du domaine nucléaire au sein duquel de nombreux matériels ont du être réévalués suite à l'incident de Fukushima en 2011 ou du challenge de l'efficacité énergétique dans le domaine des transports. Dans ce cadre, l'optimisation combinée à des simulations numériques haute-fidélité s'avère essentielle pour accompagner l'ingénieur dans sa recherche de solution optimale respectant les cahiers des charges et potentiellement en rupture technologique avec les solutions existantes. Les travaux proposés s'inscrivent dans cette démarche en proposant une méthodologie d'optimisation paramétrique globale sous contraintes adaptée à la dynamique vibratoire intégrant des non-linéarités localisées (contact, frottement...). Le coût en termes de temps de calcul du problème de dynamique non-linéaire engendre cependant des challenges additionnels qui seront le cadre de ce travail : (i) la nécessité de limiter le nombre d'appels au solveur mécanique haute-fidélité et (ii) la nécessité de disposer d'un solveur mécanique robuste et efficace pour la résolution des problèmes non-linéaires dynamiques. Ces contraintes sont prises en compte ici par le biais (i) du développement d'un solveur dynamique vibratoire non-linéaire basé sur la méthode de l'équilibrage harmonique incluant une approche d'alternance temps-fréquence et une procédure de continuation ; et (ii) l'emploi d'un Optimiseur Bayésien sous contraintes basé sur des métamodèles de type Processus Gaussien et une fonction d'acquisition de type Amélioration Espérée sous contrainte (*Constrained Expected Improvement*) afin d'en assurer un enrichissement itératif judicieux.

Après une présentation des différents outils mis en œuvre, la démarche proposée est ici appliquée à une structure industrielle de type grue-portique.

## 2 Solveur mécanique

L'étude porte sur une structure non-linéaire discrétisée en utilisant la méthode des éléments finis, comportant  $n$  degrés de liberté (ddl) et soumise à une excitation harmonique en force. L'équation du mouvement d'un tel système est régie par l'équation générale discrétisée suivante :

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) + f_{nl}(\dot{q}(t), q(t)) = f_{ext}(\omega, t), \quad (1)$$

où  $M$ ,  $C$  et  $K$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur. Le vecteur  $q$  contient le déplacement de chacun des degrés de liberté et les notations  $\dot{\bullet}$  et  $\ddot{\bullet}$  désignent respectivement les dérivées première et seconde par rapport au temps. Le vecteur  $f_{nl}(\dot{q}(t), q(t))$  regroupe les forces non-linéaires tandis que le vecteur  $f_{ext}(\omega, t)$  correspond aux forces d'excitation périodiques de pulsation  $\omega$ . La résolution de l'équation (1) sur une plage de fréquences d'excitation est réalisée à l'aide d'un programme Python basé sur la méthode d'équilibrage harmonique. Les principaux éléments de la méthode sont détaillés dans les sous-sections suivantes.

## 2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique (*Harmonic balance Method - HBM* [1, 2]) vise à chercher la solution de l'équation (1) comme une solution périodique de pulsation  $\omega$  approximée par une série de Fourier tronquée à la  $n_h^{\text{ème}}$  harmonique :

$$q(t) \simeq a_0 + \sum_{k=1}^{n_h} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad (2)$$

où  $a_k$  et  $b_k$  sont les vecteurs des coefficients de Fourier réels respectivement associés aux termes cosinus et sinus qui sont les inconnues dans le domaine fréquentiel. De plus,  $f_{nl}$  et  $f_{ext}$  sont approximées par une série de Fourier tronquée où les vecteurs des coefficients de Fourier sont respectivement notés  $(a_k^{nl}, b_k^{nl})$  et  $(a_k^{ext}, b_k^{ext})$ .

Les coefficients de Fourier sont ainsi rassemblés en des vecteurs  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{f}_{nl}$  et  $\tilde{f}_{ext}$  de taille  $n(2n_h + 1)$ .

Les expressions de  $q$ ,  $f_{nl}$  et  $f_{ext}$  sont ensuite substituées dans l'équation (1) et le résultat est projeté sur la base trigonométrique suivant une procédure de Galerkin [3] afin de ne considérer plus qu'un problème en fréquence. Cela conduit au système algébrique non-linéaire de taille  $n(2n_h + 1)$  :

$$\tilde{r}(\tilde{q}, \omega) = Z(\omega) \tilde{q} + \tilde{f}_{nl}(\tilde{q}, \omega) - \tilde{f}_{ext}(\omega) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

En utilisant le symbole  $\otimes$  pour représenter le produit de Kronecker, la matrice diagonale par blocs  $Z(\omega)$  de taille  $n(2n_h + 1) \times n(2n_h + 1)$  s'écrit :

$$Z(\omega) = \omega^2 \nabla^2 \otimes M + \omega \nabla \otimes C + I_{2n_h+1} \otimes K, \quad (4)$$

où  $I_{2n_h+1}$  est la matrice identité de taille  $2n_h + 1$  et  $\nabla$  est un opérateur différentiel.

L'équation (3) intègre ensuite la prise en compte des conditions aux limites en séparant les degrés de liberté associés au chargement en effort des degrés de liberté inconnus du problème.

L'équation non-linéaire (3) peut être résolue en employant un processus itératif tel que la méthode de Newton-Raphson employée dans ce travail. La force extérieure  $f_{ext}$  étant connue dans le domaine temporel et périodique, la détermination de  $\tilde{f}_{ext}$  est directe. Cependant, une expression analytique de la force non-linéaire  $f_{nl}$  n'est souvent pas connue dans le domaine fréquentiel, ce qui rend l'évaluation du terme  $\tilde{f}_{nl}$  difficile et nécessite l'emploi d'une méthode dédiée.

## 2.2 Méthode d'alternance temps/fréquence

La méthode d'alternance temps/fréquence (*Alternating Frequency/Time - AFT* [4]) permet de calculer efficacement le vecteur  $\tilde{f}_{nl}$  en considérant un ensemble de transitions successives entre les domaines fréquentiel et temporel en employant des transformées de Fourier discrètes. La procédure nécessite l'application de la transformée de Fourier discrète directe (DFT), représentée par la fonction  $\mathcal{F}$ , et de la transformée de Fourier discrète inverse (DFT<sup>-1</sup>) notée  $\mathcal{F}^{-1}$ .

À partir du vecteur  $\tilde{q}$ , la transformée de Fourier discrète inverse permet d'évaluer les vecteurs  $q$  et  $\dot{q}$  à  $n_t$  instants de temps  $(t_1, \dots, t_{n_t})$  équidistants sur une période :

$$q = [q(t_1) \quad \dots \quad q(t_{n_t})]^T = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{q}), \quad \dot{q} = [\dot{q}(t_1) \quad \dots \quad \dot{q}(t_{n_t})]^T = \mathcal{F}^{-1}(\omega \nabla \tilde{q}). \quad (5)$$

En supposant que l'expression analytique de  $f_{nl}$  soit connue dans le domaine temporel, le terme non-linéaire est évalué à ces instants de temps formant le vecteur  $f_{nl}$ . L'application de la transformée de

Fourier discrète à ce vecteur permet de revenir dans le domaine fréquentiel et d'obtenir le terme  $\tilde{f}_{nl}$ . L'ensemble de la procédure peut être résumé par l'expression suivante :

$$\tilde{f}_{nl}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathcal{F}(f_{nl}(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}), \mathcal{F}^{-1}(\omega \nabla \tilde{\mathbf{q}}))). \quad (6)$$

La méthode AFT permet de traiter la résolution de l'équation (3) avec une grande variété de non-linéarités. Bien que le coût de calcul puisse être important avec de grandes valeurs de  $n_t$ , la transformée de Fourier discrète peut être réalisée efficacement en utilisant l'algorithme de transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform - FFT*) [5]. De plus, la méthode AFT fournit une expression semi-analytique de la jacobienne du résidu (3) nécessaire pour une résolution itérative (voir [6] par exemple pour plus de détails). Cela permet de gagner un temps important par rapport à une évaluation numérique par différences finies par exemple.

### 2.3 Procédure de continuation

L'usage de la méthode itérative de Newton-Raphson pour résoudre l'équation (3) nécessite un point de départ  $\tilde{\mathbf{q}}^{(0)}$  pertinent. Ce choix a, en effet, un impact important sur la convergence de l'algorithme. En complément, la complexité de la physique du problème dynamique non-linéaire considéré peut conduire à l'apparition de bifurcations et à la singularité de la jacobienne. La résolution du problème devient alors impossible. Afin de surmonter ces difficultés et ainsi d'accroître la robustesse de la méthode, une approche de continuation par pseudo-longueur d'arc a été employée en sein de l'algorithme HBM. Une prédiction tangente est réalisée sur la base de la solution précédemment calculée, puis des corrections orthogonales sont effectuées via une procédure itérative de Newton-Raphson. Le lecteur pourra se référer à [6] pour plus de détails. En particulier des éléments relatifs au choix du pas adaptatif et à la détection des bifurcations y sont présentés.

## 3 Optimisation Bayésienne

Dans le cadre de ce travail, l'objectif sera de parvenir à conduire une optimisation paramétrique globale sous contraintes de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \quad & y(\mathbf{x}), \\ \text{sous les contraintes} \quad & h_j(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket, \end{aligned} \quad (7)$$

où  $y$  et  $h_j$  désignent respectivement les fonctions objectif et contraintes, tandis que  $\mathcal{D}$  est l'espace de conception de dimension  $n_p$ .

Bien que le solveur mécanique défini précédemment dans la partie 2 et qui fournit les valeurs de  $y$  et  $h_j$  pour un jeu de paramètres  $\mathbf{x}$  soit relativement performant, il reste peu adapté à être intégré directement dans une boucle d'optimisation requérant de nombreuses résolutions. Ainsi, il est proposé dans ce travail de faire emploi d'une Optimisation Bayésienne [7, 8] sous contraintes. Basée sur l'emploi d'un métamodèle de type Processus Gaussien et d'une fonction d'enrichissement, elle vise à réduire significativement le nombre d'appels au solveur et ainsi de réduire le temps du processus d'optimisation complet. Quelques éléments théoriques sont développés dans la suite concernant les Processus Gaussien et l'Optimisation Bayésienne. Le lecteur pourra se référer à [9] pour plus de détails.

### 3.1 Processus Gaussien

Dans le cadre de ce travail, les fonctions objectif  $y$  et contraintes  $h_j$  – qui sont des fonctions coûteuses à évaluer – sont approximées par des Processus Gaussiens [10] choisis ici indépendants. On note que les fonctions approximées ici sont supposées déterministes.

Le modèle de substitution (ou métamodèle) d'une fonction  $y$  est construit à partir d'un ensemble de  $n_s$  points d'observation  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{D}$  et des réponses associées  $y(\mathbf{x}^{(i)})$  pour  $i \in \llbracket 1; n_s \rrbracket$ . Dans ce travail, les points d'observation sont déterminés à l'aide d'une méthode de type Latin-Hypercube [11] car elle permet d'obtenir un échantillonnage non-redondant avec une faible discrèpance. La fonction  $y$  est supposée être la réalisation d'un processus stochastique  $Y$  décrit par sa fonction moyenne  $\mu$  et sa fonction de covariance

$\kappa$ . Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ ,  $Y(\mathbf{x})$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu(\mathbf{x}), \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$  telle que  $Y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x})$ , avec  $Z(\mathbf{x})$  une variable aléatoire vérifiant  $\text{cov}(Z(\mathbf{x}^{(i)}), Z(\mathbf{x}^{(j)})) = \kappa(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$  pour  $i, j \in \llbracket 1; n_s \rrbracket$ . La fonction moyenne de  $Y$  est recherchée sous la forme d'une régression  $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^p \beta_m f_m(\mathbf{x})$  où  $(f_m)_{m \in \llbracket 1; p \rrbracket}$  sont  $p$  fonctions de base (généralement polynomiales) et  $(\beta_m)_{m \in \llbracket 1; p \rrbracket}$  les coefficients de régression associés. Ce travail fait usage du noyau Matérn 5/2 qui est reconnu comme un noyau efficace par défaut [12]. Dans ce processus, le vecteur  $\beta = (\beta_m)_{m \in \llbracket 1; p \rrbracket}$  peut être exprimé analytiquement en fonction des autres hyperparamètres comme une régression polynomiale généralisée [10].

La prédiction  $\hat{y}$  et l'erreur  $s^2$  du Processus Gaussien en un point quelconque  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{D}$  sont obtenus en calculant l'espérance et la variance d'un prédicteur linéaire non-biaisé  $\hat{Y}(\mathbf{x}^{(0)})$  du Processus Gaussien  $Y(\mathbf{x}^{(0)})$  :

$$\hat{y}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{f}^{(0)\top} \beta + \kappa^{(0)\top} \mathcal{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F} \beta), \quad (8)$$

$$s^2(\mathbf{x}^{(0)}) = \kappa(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)}) - \begin{bmatrix} \kappa^{(0)} \\ \mathbf{f}^{(0)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathcal{K} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa^{(0)} \\ \mathbf{f}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

où pour  $(i, j) \in \llbracket 1; n_s \rrbracket$  et  $m \in \llbracket 1; p \rrbracket$  :

- $\mathbf{F}$  est la matrice contenant les régresseurs évalués aux points  $\mathbf{x}^{(i)}$  ( $\mathbf{F})_{mi} = f_m(\mathbf{x}^{(i)})$ ,
- $\mathcal{K}$  est la matrice noyau symétrique  $(\mathcal{K})_{ij} = \kappa(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$ ,
- $\mathbf{y}$  est le vecteurs des réponses tel que  $(\mathbf{y})_i = y(\mathbf{x}^{(i)})$ ,
- $\mathbf{f}^{(0)}$  est le vecteur contenant les  $p$  termes  $f_m(\mathbf{x}^{(0)})$  évalués au point  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,
- $\kappa^{(0)}$  le vecteur des fonctions noyaux tel que  $(\kappa^{(0)})_i = \kappa(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(0)})$ .

Dans le cadre de ce travail, les hyperparamètres (définissant principalement la fonction noyau) sont déterminés en optimisant le logarithme de la vraisemblance marginale à l'aide de l'optimiseur Adam [13]. En raison du caractère déterministe de la fonction à approximer, le modèle de substitution ainsi construit réalise une interpolation aux points échantillonnés.

L'usage de Processus Gaussien permet d'obtenir une approximation robuste de la fonction  $y$  et de ses contraintes  $h_j$  avec une estimation de leurs variances en tout point. Cette information permet de mettre en œuvre un critère d'enrichissement (également désigné sous le terme *fonction d'acquisition*) pour réaliser une Optimisation Bayésienne.

### 3.2 Optimisation

L'approximation par Processus Gaussien est employée au sein d'un algorithme d'Optimisation Bayésienne sous contraintes. Cette dernière s'organise autour d'un processus itératif où après une construction initiale de modèles de substitution pour la fonction objectif et les fonctions contraintes à partir de  $n_s$  échantillons, un processus itératif vient enrichir les modèles de substitution dans l'objectif de localiser le minimum global du problème. Une fonction d'acquisition est employée à chaque itération dans l'objectif de sélectionner les candidats pertinents à localiser le minimum. Cette dernière est l'amélioration espérée contrainte (*Constrained Expected Improvement* [14]). Elle est calculée à partir des réponses et variances fournies par les Processus Gaussiens :

$$\alpha_{\text{CEI}}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbb{E}[\mathbb{I}(\mathbf{x}^{(0)} | y_{\min}^c)] \prod_{j=1}^m P(h_j(\mathbf{x}^{(0)}) \geq 0) \quad (10)$$

où  $y_{\min}^c$  est la valeur minimale de  $y$  sur les points échantillonnés dans la région admissible  $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{D} | h_j(\mathbf{x}^{(0)}) \geq 0\}$ ,  $\mathbb{E}[\mathbb{I}(\mathbf{x}^{(0)} | y_{\min}^c)]$  désigne l'*Expected Improvement* "classique" tandis que  $P(h_j(\mathbf{x}^{(0)}) \geq 0)$  désigne la probabilité de satisfaire les contraintes. En pratique, la fonction d'acquisition est maximisée en employant une méthode de type descente de gradient multi-starts. L'algorithme d'optimisation est dans le cadre de ce travail arrêté via une condition de budget en terme de nombre d'appels au solveur mécanique.

## 4 Application de la stratégie à une grue-portique

L'ensemble de la méthode proposée est mise en œuvre sur un exemple industriel d'une grue-portique. Dans le cadre d'un retrofit de cette dernière une étude de l'intégration optimale d'une barre anti-envol est proposée sous sollicitation sismique.

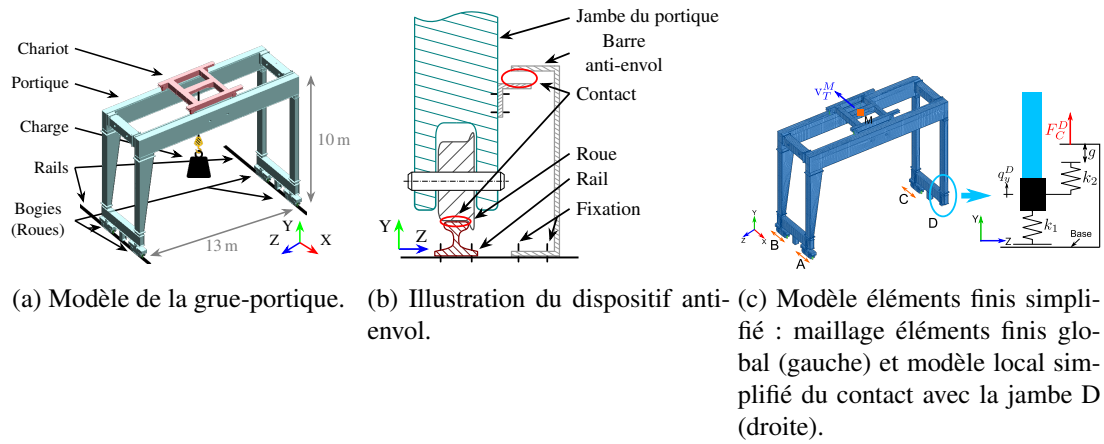


FIGURE 1 – Présentation du modèle de la grue-portique et modélisation.

#### 4.1 Description du modèle

Le modèle de la structure considérée est présenté en Figure 1a. D'une hauteur de 10 m et d'une largeur de 13 m, elle supporte une charge de 65 t. Le modèle éléments finis contient environ 45 000 éléments (principalement des éléments coques) pour un total d'environ 260 000 ddl. Une illustration schématique d'un dispositif anti-ensoul est donnée en Figure 1b. Il est constitué d'une poutre ancrée au sol dont l'extrémité supérieure est placée à une distance initiale d'une jambe de la grue pour bloquer son déplacement vertical. Avec un tel dispositif, deux phénomènes de contact local peuvent apparaître : après le décollement de la roue, la jambe de la grue peut atteindre le dispositif anti-ensoul et lors de la rechute de la structure, un contact avec le sol (ou le rail de support) peut se produire. Tout au long du mouvement, la vitesse du centre de gravité de la structure doit être contrôlée pour éviter le renversement et la force de contact sur le dispositif anti-ensoul doit être suffisamment limitée pour assurer la tenue mécanique de l'ancrage au sol.

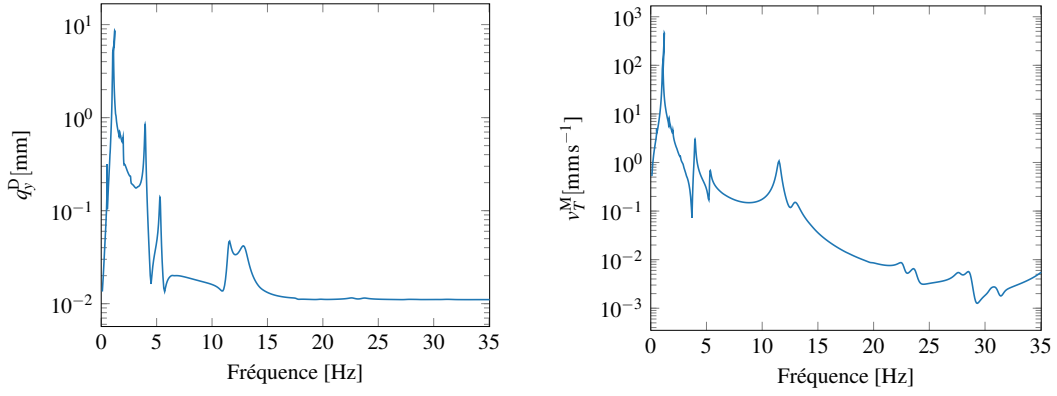
Afin d'éprouver la méthodologie proposée, le modèle complet est simplifié (voir Figure 1c) : la charge est modélisée comme une masse ponctuelle au centre de la poutre (point M) et la vitesse transversale de ce nœud est étudiée dans cette étude. Le décollement d'une seule jambe à la fois est étudié : les jambes A, B et C sont considérées ancrées au sol et seule la jambe D peut subir des phénomènes de décollement et de contact. Le complexe bogie à l'extrémité de cette jambe est remplacé par une seule roue modélisée par un seul nœud dont le déplacement vertical (noté  $q_y^D$ ) est soumis au contact. Comme représenté en Figure 1c, le contact est pris en compte en utilisant une méthode de pénalisation : une raideur  $k_2$  est ajoutée pour le contact avec le dispositif anti-ensoul avec un écart initial noté  $g$  et une raideur  $k_1$  est ajoutée pour le contact avec le sol sans écart initial. La force théorique non-linéaire s'écrit après régularisation [6] :

$$F_c^D(g, k_1, k_2) = \frac{k_1 q_y^D}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_1 q_y^D}{2}\right)^2 + \varepsilon_1^2} + \frac{k_2 (q_y^D - g)}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_2 (q_y^D - g)}{2}\right)^2 + \varepsilon_2^2}, \quad (11)$$

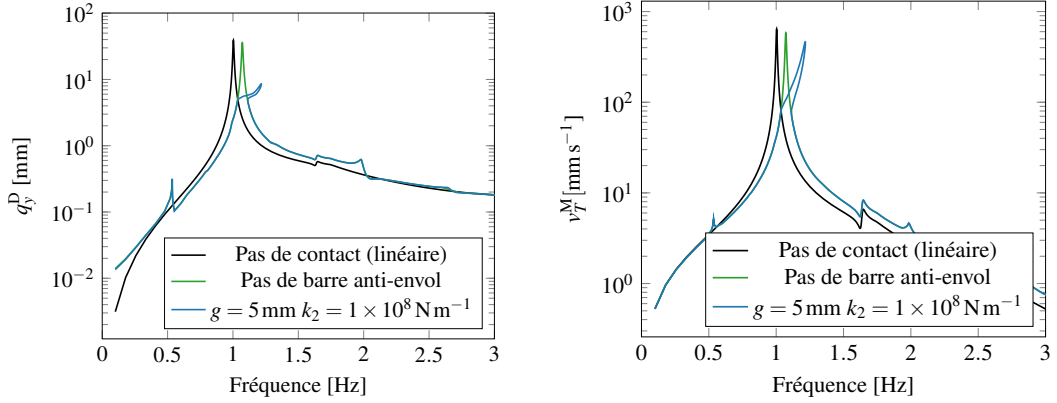
avec les paramètres fixés  $\varepsilon_1 = 1 \times 10^2$  N et  $\varepsilon_2 = 1 \times 10^3$  N.

La structure est soumise à une sollicitation harmonique par la base générée sur la plage [0;35] Hz obtenue en cohérence avec l'Eurocode 8.

Le modèle éléments finis est réduit par le biais d'une méthode de Craig-Bampton [15]. Le problème à résoudre comporte ainsi 24 ddl d'interface DOFs et 87 ddl condensés. Le degré de liberté de l'interface non-linéaire reste inchangé par la condensation. Le solveur mécanique introduit dans la partie 2.1 est employé pour résoudre le problème réduit. Les résultats sont présentés en Figures 2a et 2b sur une plage de fréquence [0;35] Hz pour un jeu  $g = 5$  mm et une raideur  $k_2 = 1 \times 10^8$  N m<sup>-1</sup>. La simulation requière 40 min et 649 pas de fréquence adaptatifs. La présence de points d'inflexion et de retournement illustrent la pertinence de la mise en œuvre du solveur mécanique proposé.



(a) Déplacement vertical  $q_y^D$  pour  $g = 5$  mm et  $k_2 = 1 \times 10^8$   $\text{Nm}^{-1}$ . (b) Vitesse transverse  $v_T^M$  pour  $g = 5$  mm et  $k_2 = 1 \times 10^8$   $\text{Nm}^{-1}$ .



(c) Déplacement vertical  $q_y^D$  sur une plage de fréquence réduite pour différentes configurations. (d) Vitesse transverse  $v_T^M$  sur une plage de fréquence réduite pour différentes configurations.

FIGURE 2 – Courbe de réponse en fréquence. Paramètres HBM :  $n_h = 20$ ,  $n_t = 2000$ ,  $\Delta s_{\max} = 0,25$ .

## 4.2 Problème d'optimisation

Le problème d'optimisation s'écrit dans le cas de la grue-portique :

$$(g^*, k_2^*) = \arg \min_{(g, k_2) \in \mathcal{D}} y(g, k_2), \quad (12)$$

$$\text{s.l.c. } h(g, k_2) < 0.$$

Il revient à chercher le jeu  $g$  et la raideur  $k_2$  dans la liaison entre la roue et la barre anti-envol de la jambe  $D$  (cf. Figure 1c) dans l'espace de conception  $\mathcal{D}$  :

$$\mathbf{x} = (g, k_2) \in \mathcal{D} \text{ avec } \mathcal{D} = [5 \times 10^{-3}; 40 \times 10^{-3}] \times [0; 1 \times 10^8]. \quad (13)$$

La fonction objectif  $y$  consiste en le maximum de la vitesse transversale du point M sur la plage de fréquence  $[0; 35]$  Hz tandis que la fonction contrainte vise à s'assurer que la force de contact  $F_c^D$  entre la roue et la barre anti-envol ne dépasse pas  $F_{c \max}^D = 200$  kN :

$$y(g, k_2) = \max_{f \in [0; 35] \text{ Hz}} v_T^M(g, k_2, f) \text{ et } h(g, k_2) = \max_{f \in [0; 35] \text{ Hz}} F_c^D(g, k_2, f) - F_{c \max}^D. \quad (14)$$

On notera par ailleurs que la raideur  $k_1$  est fixée à une valeur de  $1 \times 10^7$   $\text{Nm}^{-1}$ .

## 4.3 Résultats de l'optimisation

Le problème d'optimisation Équation (12) est ici traité en employant la démarche décrite précédemment. La Figure 3 présente plusieurs étapes du processus d'enrichissement pour un tirage initial comportant 20 échantillons. Les courbes de niveau représentent l'approximation par Processus Gaussien

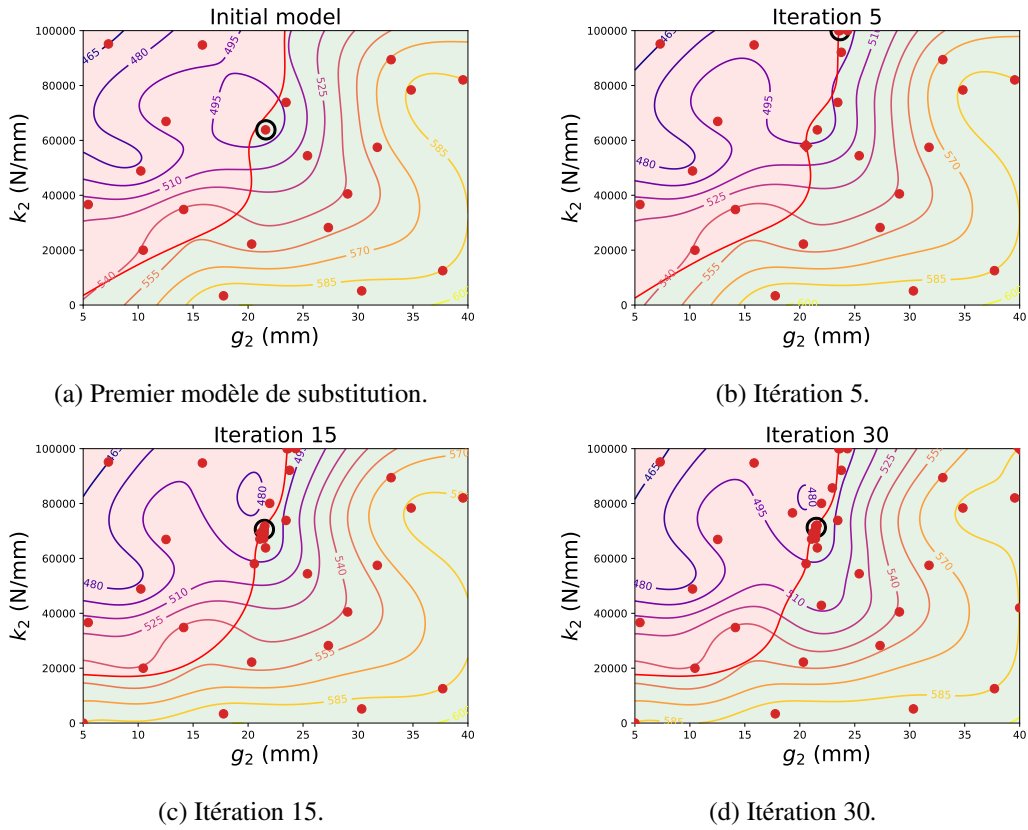


FIGURE 3 – Optimisation Bayésienne sous contrainte pour 20 échantillons initiaux. Les lignes de niveau représentent la fonction objectif  $y$  et la zone verte représente la zone admissible définie par la contrainte  $h$ .

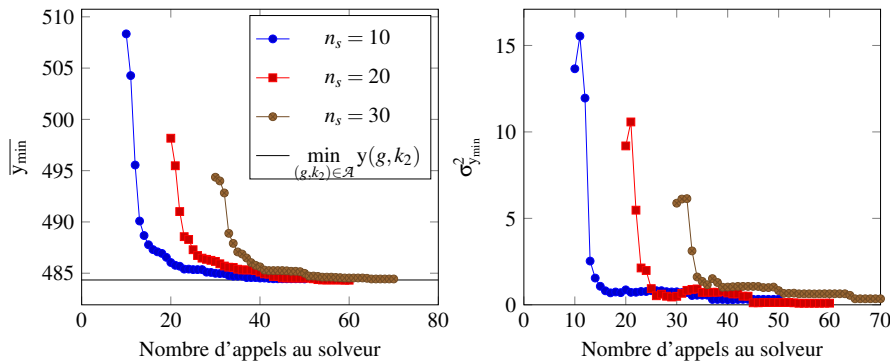


FIGURE 4 – Moyenne et écart-type de la meilleure valeur échantillonnée (en  $\text{mms}^{-1}$ ) pour 10, 20 et 30 échantillons initiaux.

de la fonction objectif  $y$  tandis que la ligne rouge délimite la zone admissible (surface verte) définie par la contrainte  $h$ . L'Optimisation Bayésienne parvient à localiser le minimum en un nombre limité d'appels au solveur (cf. Figure 3). Enfin une étude de robustesse succincte est réalisée en relançant le tirage initial de manière répétée pour un même nombre d'échantillons. La Figure 4 présente la moyenne et l'écart-type de la meilleure valeur obtenue au cours du processus en fonction du nombre d'appels au solveur mécanique. Cela confirme que la stratégie proposée permet d'obtenir le minimum global avec un nombre d'appels au solveur mécanique limité. Ces résultats sont également en accord avec la conclusion de [12] qui préconise un nombre d'échantillons initial limité.

Les paramètres optimaux obtenus pour la conception de la barre anti-envol sont  $g^* = 21,47 \text{ mm}$  et  $k_2^* = 7,1281 \times 10^7 \text{ Nm}^{-1}$ . Cela correspond à une vitesse transverse maximale de  $484,34 \text{ mms}^{-1}$  et à une force de contact maximale de  $199,992 \text{ kN}$ .

## 5 Conclusion

Ce travail présente une démarche de mise en œuvre d'une Optimisation Bayésienne sous contrainte adaptée au traitement d'un problème de dynamique vibratoire intégrant des non-linéarités localisées. Un solveur mécanique basé sur la méthode d'équilibrage harmonique, l'alternance temps/fréquence et une continuation est présenté. Basée sur l'emploi de Processus Gaussiens, l'Optimisation Bayésienne intègre un dispositif d'enrichissement itératif adapté à la prise en compte des contraintes. La méthodologie complète est enfin appliquée à une grue-portique industrielle. Les résultats obtenus montrent la capacité de la méthodologie à localiser le minimum global du problème sous contrainte avec un nombre limité d'appels au solveur mécanique. Les travaux futurs se concentreront sur l'amélioration de la robustesse de la méthode, entre autres du solveur mécanique, et sur l'extension à des problèmes plus complexes intégrant plusieurs non-linéarités localisées. Par ailleurs, un accent sera mis sur l'intégration de méthodes de continuation paramétrique permettant, par exemple, le suivi des pics de résonance. Des développements seront également réalisés dans la perspective de calculer efficacement les gradients des fonctions objectifs et contraintes au sein du solveur mécanique.

## Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse Cifre N° 2020/0272 soutenue par l'ANRT (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie).

## Références

- [1] N. Krylov and N. Bogoliuboff. *Introduction to Non-Linear Mechanics*, volume 11 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950.
- [2] M. Nakhla and J. Vlach. A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 23(2) :85–91, February 1976.
- [3] Minoru Urabe. Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20(2) :120–152, January 1965.
- [4] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1) :149–154, March 1989.
- [5] James W. Cooley and John W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90) :297–301, 1965.
- [6] Y. Colaitis and A. Batailly. The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 502 :116070, June 2021.
- [7] J. Mockus, Vytautas Tiesis, and Antanas Zilinskas. *The application of Bayesian methods for seeking the extremum*, volume 2, pages 117–129. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [8] Donald R. Jones, Matthias Schonlau, and William J. Welch. Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions. *Journal of Global Optimization*, 13(4) :455–492, December 1998.
- [9] Robert B. Gramacy. *Surrogates : Gaussian Process Modeling, Design and Optimization for the Applied Sciences*. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2020.
- [10] Carl Edward Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 11 2006.
- [11] M. D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover. Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometrics*, 21(2) :239–245, May 1979.
- [12] Rodolphe Le Riche and Victor Picheny. Revisiting Bayesian optimization in the light of the COCO benchmark. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64(5) :3063–3087, November 2021.
- [13] Diederik P. Kingma and Jimmy Ba. Adam : A Method for Stochastic Optimization, January 2017.
- [14] Matthias Schonlau, William J. Welch, and Donald R. Jones. Global versus local search in constrained optimization of computer models. *Lecture Notes-Monograph Series*, 34 :11–25, 1998.
- [15] Roy R. Craig Jr and Mervyn Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.