

# Réduction de modèle en dynamique transitoire non-linéaire de structures assemblées

F. Dupont<sup>1</sup>, L. Laurent<sup>1</sup>, A. Legay<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, EA 3196, Cnam, HESAM Université, Paris, France  
{florian.dupont, luc.laurent, antoine.legay}@lecnam.net

**Résumé** — Dans le cadre du projet ANR JENII, il est envisagé de créer des travaux pratiques de dynamique transitoire en environnement immersif. L'apprenant manipulant ces structures présentant des non linéarités doit pouvoir avoir accès à des grandeurs d'intérêt en temps interactif. Cependant, la simulation numérique en dynamique transitoire requière des temps de calculs importants en présence de non linéarités mais également lors de la prise en compte d'aspects paramétriques. Ce travail forme un socle pour tendre vers des simulations haute-fidélité paramétriques en des temps réduits. L'accent est mis sur la mise en œuvre d'une méthode de réduction de modèle adaptée au traitement de structures assemblées avec interfaces non-linéaires. Après des développements s'appuyant sur une méthode de sous-structuration classique, des compléments sont apportés pour aller vers la réduction des interfaces non-linéaires.

**Mots clés** — Dynamique transitoire non-linéaire, Structures assemblées, Réduction de modèle

## 1 Introduction

Dans le cadre du projet ANR JENII, le développement de jumeaux numériques de structures mécaniques assemblées utilisables au sein de dispositifs en réalité virtuelle est envisagé pour des applications d'enseignement. Ces derniers doivent être capables de refléter la physique du système réel afin d'illustrer des notions importantes de conception mécanique pour des apprenants lors de travaux pratiques. L'objectif est donc de fournir des résultats expérimentaux temporels simulés le plus rapidement possible. Cela se traduit notamment par la résolution temporelle efficace du problème mécanique de grande taille, non-linéaire aux interfaces, pour plusieurs paramètres de conception (géométrie, conditions aux limites) et de chargement. Différents protocoles expérimentaux mèneront donc les étudiants à poser des accéléromètres et jauges de déformation pour recueillir des données sur le modèle numérique et les post-traiter. L'ambition se porte sur l'étude de structures assemblées présentant de nombreuses interfaces dont un exemple industriel est le stabilisateur de l'ULM Zenair 601 (Figure 1). Dans le cadre de cette présentation, les zones sans interface sont assimilées à un comportement linéaire géométrique et matériau. Les non-linéarités sont donc concentrées aux zones d'interface.

L'objectif de cette présentation est d'établir une stratégie de résolution d'un problème de dynamique transitoire sur une structure assemblée à travers un modèle réduit (ROM). À terme, le but est de créer un modèle paramétrique pour que plusieurs scénarios d'apprentissage soient possibles. Dans une première partie, la stratégie de réduction de modèle est présentée puis, appliquée dans un second temps, sur un exemple numérique. Finalement, la conclusion résume les premiers résultats et détaille les perspectives.

## 2 Stratégie de réduction en dynamique transitoire non-linéaire

Cette section présente la stratégie de réduction d'un problème de dynamique non-linéaire par projection sur base.

### 2.1 Équations du problème dynamique non-linéaire

Pour un problème de dynamique temporelle (le temps est noté  $t$ ) non-linéaire paramétrique (avec le vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$ ) sans amortissement, le déplacement  $\mathbf{u}$  vérifie l'équation d'équilibre semi-

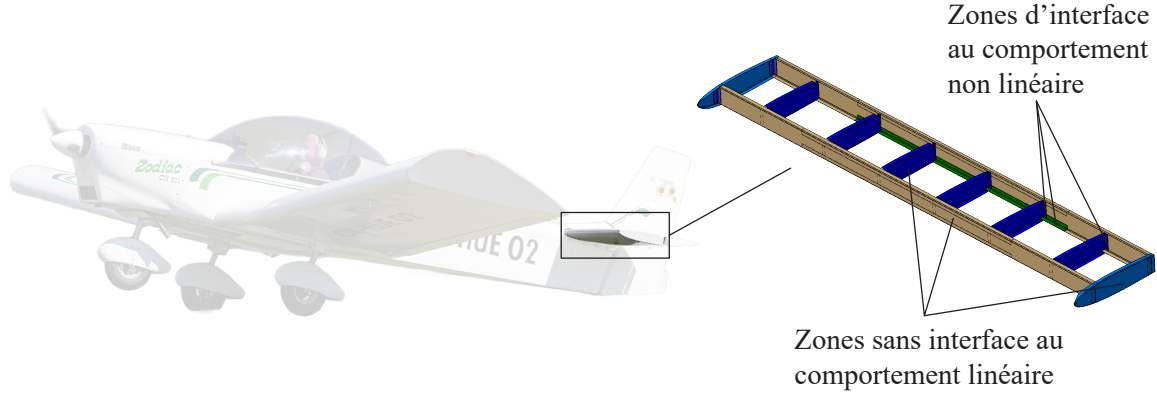


FIGURE 1 – Objectif de structure assemblée étudiée par l'apprenant dans l'environnement immersif : Stabilisateur du Zenair 601

discrétisée en espace :

$$\mathbf{M}(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{p};t) + \mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{u}(\mathbf{p};t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}(\mathbf{p};t);t) = \mathbf{f}_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{p};t);t) + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}(\mathbf{p};t);t), \quad (1)$$

avec la matrice masse  $\mathbf{M}$ , la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ , le vecteur des efforts internes non-linéaires  $\mathbf{f}_{nl}$ , le vecteur des forces de contact  $\mathbf{f}_c$  et le vecteur des efforts externes  $\mathbf{f}_{ext}$ . On se place dans un contexte où ce dernier est parfaitement connu au préalable (choc) donc indépendant de  $\mathbf{u}$ . Les non linéarités d'interface retenues sont ici modélisées par des ressorts à force de rappel cubique. L'aspect paramétrique n'est pas pris en compte dans la suite de cette étude.

La dimension de ce problème est égal au nombre de degrés de liberté de l'ensemble de la structure ( $N_{FOM}$ ). Il est possible de la réduire en projetant les équations sur une base  $\mathbf{V}$  qui concentre tout le contenu physique et qui approxime le déplacement physique par des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$  avec  $\mathbf{u} \approx \mathbf{V}\mathbf{q}$ . En considérant les hypothèses simplificatrices énoncées, le problème projeté s'écrit :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{q}(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{V}\mathbf{q}(t);t) = \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{ext}(t). \quad (2)$$

Finalement, si un nombre restreint de modes ( $N_{ROM}$  degrés de liberté) est choisi, la résolution du problème dynamique est fortement accélérée malgré un retour à l'espace haute dimension pour déterminer  $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{V}\mathbf{q}(t);t)$ .

## 2.2 Stratégie de réduction de modèle sur les sous-structures

Différentes bases de réduction  $\mathbf{V}$  existent, cependant, pour l'étude de structures assemblées, la méthode de Hurty/Craig-Bampton (HCB) est la plus classiquement utilisée ([1], [2]). Cette première étape de sous-structuration dynamique permet de diviser la structure en plusieurs sous-structures. Les zones présentant un comportement linéaire sont distinguées des sous-structures non-linéaires. Même si l'aspect paramétrique n'est pas traité ici, on notera que la méthode développée dans [3] pourrait être utilisée pour interpoler des modes de la base  $\mathbf{V}$  dans les composants linéaires paramétriques.

### 2.2.1 Sous-structuration de Hurty/Craig-Bampton

La méthode HCB vise donc à décomposer la structure entière en plusieurs sous-structures et l'équation du mouvement (Eq. 1) pour une de ces sous-structures  $s$  s'écrit (la dépendance au temps est implicite) :

$$\mathbf{M}^s \ddot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{K}^s \mathbf{u}^s + \mathbf{f}_{nl}^s(\mathbf{u}^s) = \mathbf{f}_{ext}^s, \quad (3)$$

avec l'exposant  $s$  qui désigne la sous-structure étudiée. Pour toute sous-structure, il est possible de partitionner les  $N_i^s$  degrés de liberté intérieurs (indice  $i$ ) et  $N_b^s$  degrés de liberté d'interface (indice  $b$ ) :

$$\mathbf{u}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b^s \\ \mathbf{u}_i^s \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Le même ordonnancement est appliqué sur les opérateurs de l'équation (Eq. 3). La base de réduction HCB est constituée de modes linéaires de vibration à interface fixe pour décrire le comportement interne ainsi que de modes statiques contraints permettant le couplage entre les sous-structures. Les  $m^s$  premiers modes propres de vibration  $\varphi_{ik}^s$  d'une sous-structure ( $k = 1$  à  $m^s$ ) sont calculés à partir du problème aux valeurs propres avec les degrés de liberté d'interface encastres :

$$\mathbf{K}_{ii}^s \varphi_{ik}^s = \omega_k^{s2} \mathbf{M}_{ii}^s \varphi_{ik}^s, \quad k = \{1, \dots, m^s\}. \quad (5)$$

Les  $\varphi_{ik}^s$  sont ensuite concaténés dans la matrice des modes propres tronquée  $\Phi_{im^s}^s$  et sont tous orthogonaux au sens de  $\mathbf{M}_{ii}^s$ . D'un autre côté, les modes contraints correspondent aux déformées des degrés de liberté internes à la sous-structure pour un déplacement unitaire d'un degré de liberté d'interface. Ainsi, les modes statiques contraints  $\Psi_{ib}^s$  d'une sous-structure s'expriment par :

$$\Psi_{ib}^s = -(\mathbf{K}_{ii}^s)^{-1} \mathbf{K}_{ib}^s. \quad (6)$$

Finalement, la base de réduction pour une sous-structure permettant de passer des degrés de liberté physiques aux coordonnées généralisées de Hurty/Craig-Bampton est donnée par :

$$\mathbf{u}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Psi_{ib}^s & \Phi_{im^s}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b^s \\ \mathbf{q}_{m^s}^s \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{\text{HCB}}^s \mathbf{q}^s. \quad (7)$$

### 2.2.2 Amélioration de la base de Craig-Bampton avec des modes POD

Pour des sous-structures présentant des non-linéarités ( $\mathbf{f}_{nl}^s \neq \mathbf{0}$ ), les modes de vibration linéaires ne suffisent plus pour modéliser la physique. Des méthodes d'amélioration de la base HCB sont possibles avec, par exemple, l'utilisation de dérivées modales ([4], [5]) qui permet de prendre en compte le couplage des modes linéaires.

Aussi, si des calculs haute-fidélité (FOM) sont pré-calculés, il est envisageable d'utiliser une base POD (Proper Orthogonal Decomposition) à interface fixe. La POD ([6], [7]) permet de trouver l'espace réduit optimal représentant au mieux des données. Ainsi, pour des données de déplacement  $\mathbf{u}^s$  d'une sous-structure issus de calculs haute dimension à des instants  $t_i$ , il est possible de les concaténer dans une matrice :

$$\mathbf{U}^s = [ \mathbf{u}^s(t_1) \quad \mathbf{u}^s(t_2) \quad \dots \quad \mathbf{u}^s(t_n) ]. \quad (8)$$

En effectuant une SVD (Singular Value Decomposition) sur  $\mathbf{U}^s$ , la matrice des vecteurs singuliers gauches est extraite. Une troncature classique visant à conserver les  $n^s$  modes les plus énergétiques de cette matrice (valeurs singulières importantes) permet donc de trouver :

$$\Lambda_{n^s}^s = \begin{bmatrix} \Lambda_{bn^s}^s \\ \Lambda_{in^s}^s \end{bmatrix}, \quad (9)$$

avec l'ordonnancement HCB distinguant les degrés de liberté internes et de frontière de la sous-structure  $s$ . Ces modes ne présentant pas naturellement d'interface fixe, il est nécessaire d'effectuer une déflation, c'est à dire supprimer les informations déjà présentes dans les modes contraints  $\Psi_{ib}^s$  :

$$\widehat{\Lambda}_{in^s}^s = \Lambda_{in^s}^s - \Psi_{ib}^s \Lambda_{bn^s}^s. \quad (10)$$

Finalement, la base de réduction pour une sous-structure permettant de passer des degrés de liberté physiques aux coordonnées généralisées des modes POD est donnée par :

$$\mathbf{u}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Psi_{ib}^s & \widehat{\Lambda}_{in^s}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b^s \\ \mathbf{q}_{n^s}^s \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{\text{POD}}^s \mathbf{q}^s. \quad (11)$$

Pour une sous-structure présentant des non-linéarités, on peut espérer que cette base POD permette de mieux prendre en compte ces phénomènes que la base des modes propres. Il est cependant nécessaire que la phase de récupération des données pour la construction de  $\mathbf{U}^s$  fasse intervenir les phénomènes non-linéaires étudiés.

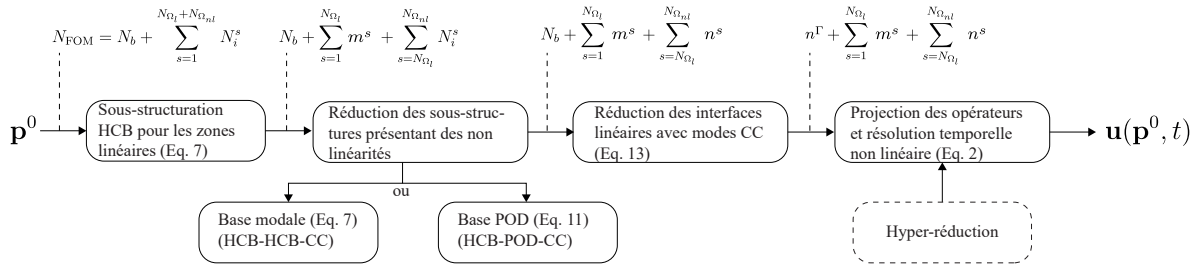


FIGURE 2 – Premières stratégies de réduction d’une structure assemblée présentant des interfaces non linéaires pour un paramètre donné

### 2.2.3 Réduction des modes d’interface pour les frontières au comportement linéaire

Dans la stratégie développée ici, les zones d’interface non-linéaires entre les structures sont isolées dans des sous-structures et n’apparaissent plus dans les interfaces au sens de Craig-Bampton. Elles sont donc distinctes des interfaces linéaires entre les composants.

L’utilisation de la base HCB (améliorée ou non avec une base POD) réduit donc considérablement le nombre de degrés de liberté pour la résolution temporelle. Cependant, cette réduction est limitée par le nombre de degrés de liberté d’interface linéaire pour des structures présentant de nombreux sous-domaines. Ainsi, une étape de réduction supplémentaire pour diminuer le nombre de degrés de liberté aux interfaces linéaires est nécessaire. Ils existent de nombreuses méthodes de réduction d’interface pour des comportements linéaires [8]. La méthode la plus connue étant l’utilisation de modes caractéristiques contraints (CC) [9]. Cette approche globale permet de réduire tous les degrés de liberté d’interface linéaire d’une structure à l’aide d’une unique analyse modale :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{bb} \xi_{bk}^{CC} = \omega_k^2 \tilde{\mathbf{M}}_{bb} \xi_{bk}^{CC}, \quad k = \{1, \dots, n^\Gamma\}, \quad (12)$$

avec  $n^\Gamma$ , le nombre de modes CC pris en compte après troncature,  $\tilde{\mathbf{K}}_{bb}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_{bb}$  les matrices de raideur et de masse correspondant aux degrés de libertés des interfaces linéaires après projection (Eq. 2). Tous les modes CC sont regroupés dans la matrice  $\Xi_{bn^\Gamma}^{CC}$ . Ces derniers permettent donc d’exprimer les degrés de liberté des interfaces physiques linéaires  $\mathbf{u}_b$  en fonction des coordonnées généralisées d’interface  $\mathbf{q}_{n^\Gamma}$  :

$$\mathbf{u}_b = \Xi_{bn^\Gamma}^{CC} \mathbf{q}_{n^\Gamma}. \quad (13)$$

## 2.3 Bilan des différentes réductions proposées

Finalement, la matrice globale  $\mathbf{V}$  est constituée des modes classiques de vibration pour les zones linéaires. Pour les sous-structures présentant des non-linéarités, plusieurs possibilités sont envisageables dont deux sont décrites ici avec l’utilisation de modes linéaires (Eq. 7) ou de modes POD (Eq. 11). La dernière étape consiste à réduire les interfaces linéaires qui sont dans les deux cas projetées sur des modes CC (Eq. 13).

La première option est appelée HCB-HCB-CC tandis que la deuxième est dénommée HCB-POD-CC. La Figure 2 schématise les différentes étapes de réduction pour un jeu de paramètres donné  $\mathbf{p}^0$  et indique le nombre de degrés de liberté après chaque étape. Pour rappel, les indices  $i$  et  $b$  sont utilisés pour désigner les degrés de liberté internes et de frontière d’une sous structure repérée par l’exposant  $s$ .  $N_{\Omega_l}$  (resp.  $N_{\Omega_{nl}}$ ) représente le nombre de sous-structures présentant un comportement linéaire (resp. non-linéaire).

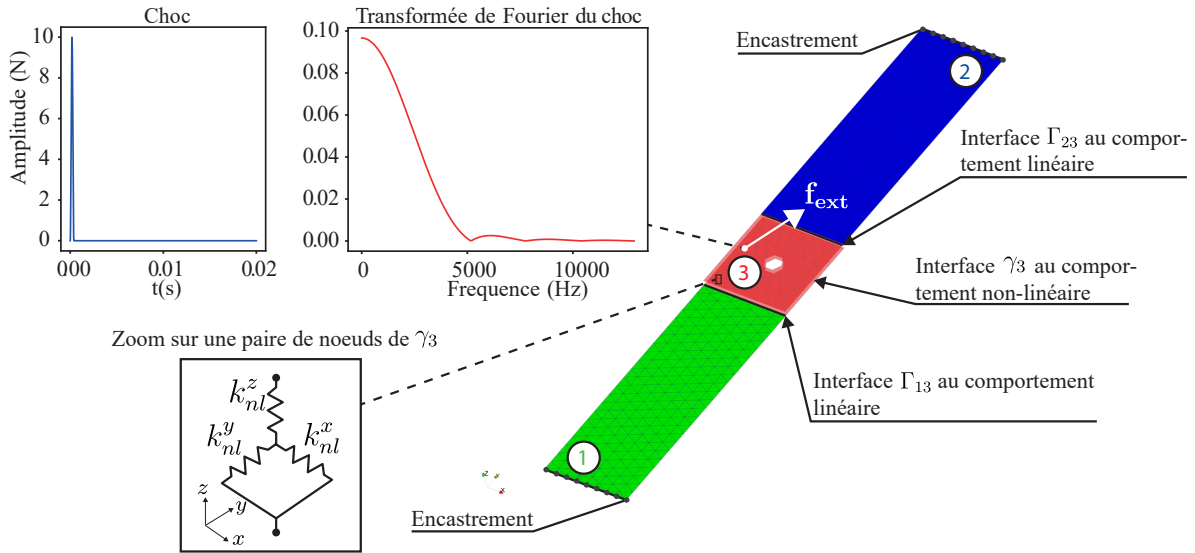


FIGURE 3 – Description de l'étude simplifiée d'un choc ponctuel sur un assemblage de deux plaques liées par une interface non-linéaire

### 3 Exemple numérique : choc sur un assemblage de deux plaques reliées par une interface non-linéaire

#### 3.1 Description du modèle numérique

La structure étudiée ici est un exemple simplifié d'un assemblage avec deux plaques chacune encastree à une extrémité présentant un comportement linéaire et reliées par une interface non-linéaire (Figure 3). L'interface non-linéaire présente des maillages compatibles avec chaque paire de nœuds liée par des ressorts à force de rappel cubique dans les trois directions. La raideur dans la direction normale est très importante modélisant un non décollement tandis que les raideurs transversales permettent un mouvement relatif entre les plaques. À terme, les non-linéarités d'interface pourront être modélisées par des modèles rhéologiques [10] ou par le contact physique avec pénalisation ou avec multiplicateurs de Lagrange [11].

Ces plaques élancées sont discrétisées à l'aide d'éléments DKT (Discrete Kirchoff Triangle) négligeant les déformations de cisaillement transverse [12]. La matrice masse est classiquement construite pour les degrés de liberté en translation et la méthode proposée dans [13] est appliquée sur les degrés de liberté de rotation pour éviter son mauvais conditionnement. Le choc dynamique appliqué ponctuellement est présenté en Figure 3. L'intégration temporelle est réalisée à l'aide d'un algorithme de Newmark implicite ( $\alpha = 0,5$ ;  $\beta = 0,25$ ) avec 2000 pas de temps (0,2 s de simulation) et la résolution non-linéaire est menée grâce à un algorithme classique de Newton-Raphson. Le maillage contient 604 nœuds avec un nombre de degrés de liberté total de  $N_{FOM} = 3624$ . Les sous structures 1 et 2 sont chacune composées de 1158 degrés de liberté tandis que 3 est constituée de 1092 degrés de liberté. 100 paires de nœuds (600 degrés de liberté au total) forment l'interface non-linéaire  $\gamma_3$ .  $\Gamma_{13}$  et  $\Gamma_{23}$  sont chacune caractérisées par 9 nœuds soit 108 degrés de liberté au total comme pour les deux encastremets.

Une sous-structuration à trois composants (Figure 3) permet donc d'isoler l'interface non-linéaire  $\gamma_3$  dans une sous-structure distincte. Cela permet de distinguer facilement le paramétrage des interfaces non-linéaires qui peut être différent des zones aux comportements totalement linéaires. De plus, dans la perspective d'un assemblage avec plusieurs interfaces non-linéaires, ce choix permet de clairement différencier le comportement de chacune d'entre elles. Les degrés de liberté d'interface au comportement linéaire sont situés sur  $\Gamma_{13}$  et  $\Gamma_{23}$ .

Dans la suite, les sous-structures 1 et 2 sont classiquement réduites par la méthode HCB. D'un autre coté, la réduction des degrés de liberté de la sous-structure 3 contenant l'interface non-linéaire  $\gamma_3$  est effectuée avec les deux méthodes (base HCB-HCB-CC utilisant les modes propres et base HCB-POD-CC avec les modes POD) décrites en 2.2 afin de les comparer. Les degrés de liberté associés à  $\Gamma_{13}$  et  $\Gamma_{23}$  sont réduits sur des modes CC dans les deux cas. Les résultats sont comparés à un calcul de référence.

### 3.2 Critère de performance

Un indicateur de performance  $I$  des méthodes de réduction basé sur un critère global en énergie  $e_1$  et un critère local  $e_2$  en déplacement au niveau du choc ( $\mathbf{u}_{\text{choc}}$ ) est construit dans la même idée que dans [4] :

$$I = e_1 + e_2, \quad (14)$$

avec

$$e_1 = \max \left( 0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\sum_t [\Delta E(t)]^2}}{\sqrt{\sum_t [E^{\text{ref}}(t)]^2}} \right), \quad (15)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}(t)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}(t)^T \mathbf{K} \mathbf{u}(t), \quad (16)$$

$$\Delta E(t) = E^{\text{ref}}(t) - E^{\text{ROM}}(t), \quad (17)$$

et

$$e_2 = \max \left( 0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\sum_t \Delta \mathbf{u}_{\text{choc}}(t)^T \Delta \mathbf{u}_{\text{choc}}(t)}}{\sqrt{\sum_t \mathbf{u}_{\text{choc}}^{\text{ref}}(t)^T \mathbf{u}_{\text{choc}}^{\text{ref}}(t)}} \right), \quad (18)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{\text{choc}}(t) = \mathbf{u}_{\text{choc}}^{\text{ref}}(t) - \mathbf{u}_{\text{choc}}^{\text{ROM}}(t). \quad (19)$$

Plus  $I$  tend vers 1, plus la solution reconstruite par réduction de modèle est proche de la référence.

### 3.3 Calcul de référence

Un calcul de référence est nécessaire pour pouvoir comparer les méthodes de réduction du comportement à l'interface non-linéaire. Cette référence est établie avec un calcul sur base HCB où les degrés de liberté à l'interface non-linéaire (sous-structure 3) sont totalement conservés. Aucune réduction supplémentaire sur les interfaces linéaires n'est effectuée. Ce calcul est pris comme référence car les méthodes HCB-HCB-CC et HCB-POD-CC ne seront pas meilleures que la méthode HCB sans réduction sur la sous-structure 3 définissant  $\gamma_3$ . De plus, ce calcul de référence est validé avec le calcul complet (FOM) sans aucune réduction. Cela permet notamment de valider que 20 modes linéaires de vibration pour les sous-structures 1 et 2 sont suffisants pour représenter la physique du problème. En effet, en comparant ce calcul de référence HCB au calcul FOM, on trouve un indicateur de performance  $I = 0,9994$  donc très proche de 1. Pour les méthodes décrites par la suite, 20 modes linéaires sont donc utilisés pour les sous-structures 1 et 2 ( $m^1 = m^2 = 20$ ).

### 3.4 Calcul avec réduction des sous-structures présentant des non-linéarités

L'interface non-linéaire  $\gamma_3$  est maintenant réduite avec les deux méthodes décrites en section 2.2 pour effectuer une comparaison. Dans les deux cas, 20 modes sont conservés ( $m^3 = 20$  ou  $n^3 = 20$ ) afin de comparer la solution obtenue à la référence. Aussi, 20 modes caractéristiques contraints (CC) sont utilisés pour réduire les degrés de liberté d'interface linéaire sur  $\Gamma_{13}$  et  $\Gamma_{23}$  pour les deux méthodes ( $n_\Gamma = 20$ ). Ajouter plus de modes CC dans la base de projection n'améliore pas considérablement les résultats, de plus, les deux méthodes bénéficieraient de cette amélioration. La taille du modèle réduit est finalement de 80 coordonnées généralisées (pour les deux méthodes) à comparer aux 3624 degrés de liberté physiques.

Les résultats du déplacement au niveau du choc dans les trois directions sont présentés pour le calcul de référence et les deux méthodes de réduction (Figure 4). Les indicateurs de performance démontrent que ces dernières sont capables de reproduire fidèlement la référence dans ce cas très simplifié ( $I^{\text{HCB-HCB-CC}} = 0,9654$  et  $I^{\text{HCB-POD-CC}} = 0,9940$ ). Comme attendu, la méthode basée sur la POD (HCB-POD-CC) reste tout de même plus pertinente que la base modale (HCB-HCB-CC) pour définir le comportement local à l'interface non-linéaire  $\gamma_3$  ( $e_2^{\text{HCB-HCB-CC}} = 0,4730 < e_2^{\text{HCB-POD-CC}} = 0,4999$ ).

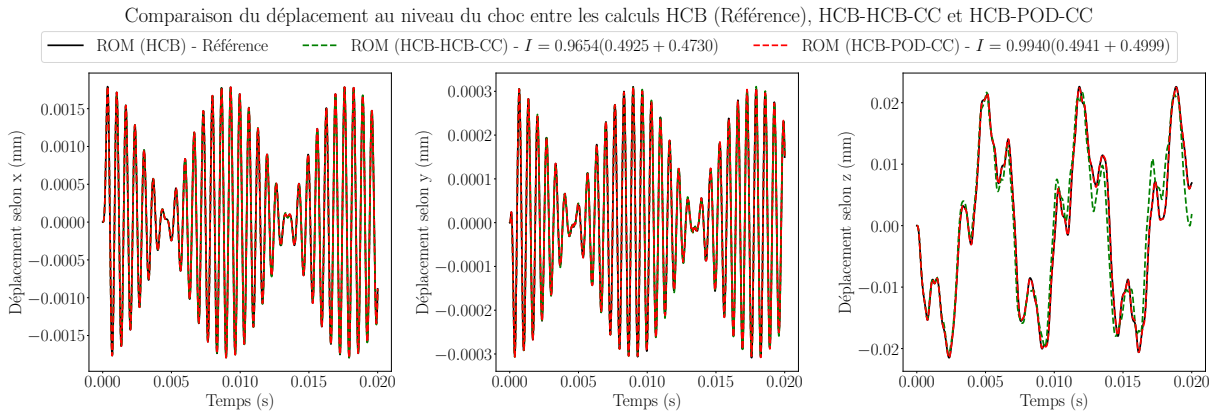


FIGURE 4 – Comparaison du déplacement au noeud du choc pour la méthode de référence et les méthodes de réduction HCB-HCB-CC et HCB-POD-CC

Sur cet exemple où l’interface non linéaire  $\gamma_3$  représente une partie importante de la structure globale, les gains de temps obtenus par les deux méthodes de réduction sont négligeables par rapport au calcul complet. En effet, les calculs de l’opérateur non-linéaire projeté  $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{V}\mathbf{q})$  de l’équation (Eq. 2) ainsi que de la matrice tangente effective projetée à chaque itération de Newton-Raphson coûtent chers. Pour palier à ce problème, l’hyper-réduction se présente comme une alternative viable pour les non-linéarités réparties. En effet, des méthodes telles que la DEIM ou l’ECSW [14] ont beaucoup été utilisées pour traiter des non-linéarités géométriques mais peu pour des problèmes de contact moins réguliers. Sur une structure plus complexe où les interfaces non linéaires sont plus nombreuses mais minimales en terme de degrés de liberté (et avec l’utilisation de l’hyper-réduction), des gains de temps non négligeables sont espérés.

## 4 Conclusion et perspectives

Dans ce cas très simplifié, les bases présentées HCB-HCB-CC et HCB-POD-CC permettent de reconstruire la quantité d’intérêt (déplacement) avec précision. La méthode basée sur la POD permet tout de même d’obtenir de meilleurs résultats. Cela s’explique notamment par une phase d’entraînement (off-line) qui permet d’apprendre la physique plus efficacement que la base modale. Cependant, la POD reste très fortement dépendante de cette dernière qui peut rapidement devenir coûteuse. Dans le contexte du projet, une longue phase offline ne représente pas un problème tant que le calcul on-line reste minime. L’ajout de l’aspect paramétrique constitue également une perspective de ce travail en se basant par exemple sur des travaux existants [3] proposant d’interpoler les matrices de transformation HCB et les opérateurs associées pour les zones linéaires. Concernant les zones d’interfaces non-linéaires, une modélisation plus physique du contact sera réalisée. Finalement, le challenge reste la réduction de ces interfaces non-linéaires tout en gérant leur côté paramétrique.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier l’Agence Nationale de la Recherche (ANR) pour le financement de cette recherche dans le cadre du projet ANR-21-DMES-0006.

## Références

- [1] W.C. Hurty, *Dynamic analysis of structural systems using component modes*, AIAA Journal, 678–685, 1965.
- [2] R-R Craig, M-C. C Bampton, *Coupling of substructures for dynamic analyses*, AIAA Journal, 1313-1319, 1968.
- [3] Jaehun Lee, Maenghyo Cho, *An interpolation-based parametric reduced order model combined with component mode synthesis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 258-286, 2017.
- [4] E. Delhez, F. Nyssen, J-C. Golinval, A. Batailly, *Reduced order modeling of blades with geometric nonlinearities and contact interactions*, Journal of Sound and Vibration, 116037, 2021.

- [5] P.J. Hughes, R.J. Kuether, M.S. Allen, P. Tiso, M.R.W. Brake, *Nonlinear Interface Reduction for Time-Domain Analysis of Hurty/Craig-Bampton Superelements with Frictional Contact*, Journal of Sound and Vibration, 116154, 2021.
- [6] M. Karhunen, *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Annals of Academic Science Fennicae, Series A1 Mathematics and Physics, 1946.
- [7] M. Loeve, P. Levy, *Fonctions Aléatoires du Second Ordre*, Processus stochastiques et mouvement Brownien, 1948.
- [8] D. Krattiger, L. Wu, M. Zacharczuk, M. Buck, R.J. Kuether, M.S. Allen, P. Tiso, M.R.W. Brake, *Interface reduction for Hurty/Craig-Bampton substructured models : Review and improvements*, Mechanical Systems and Signal Processing, 579-603, 2019.
- [9] M-P. Castanier, Y-C. Tan, C. Pierre, *Characteristic Constraint Modes for Component Mode Synthesis*, AIAA Journal, 1182-1187, 2001.
- [10] Y. Song, C.J. and Hartwigsen, D.M. McFarland, A.F. Vakakis, L.A. Bergman, *Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements*, Journal of Sound and Vibration, 249-276, 2004.
- [11] NJ. Carpenter, RL. Taylor, MG. Katona, *Lagrange constraints for transient finite element surface contact*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 103-128, 1991.
- [12] J-L. Batoz, G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis - Volume 2 : Poutres et plaques*, Hermes, 1990.
- [13] T. J.R. Hughes, M. Cohen, M. Haroun, *Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates*, Nuclear Engineering and Design 46, North-Holland Publishing Company, 203-222, 1978.
- [14] JB. Rutzmoser *Model Order Reduction for Nonlinear Structural Dynamics*, Thèse de doctorat, Fakultät für Maschinenwesen Lehrstuhl für Angewandte Mechanik, 2018.