

Simulations pilotées par les données : quelle richesse pour la base de données matériau ?

A. Platzer^{1,2}, A. Leygue², L. Stainier²

¹ Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France, auriane.platzer@insa-lyon.fr

² Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, F-44321, Nantes, France, {laurent.stainier, adrien.leygue}@ec-nantes

Résumé — Les méthodes de simulation pilotées par les données inspiré du paradigme *data-driven computational mechanics* (DDCM) introduit par Kirchdoerfer et Ortiz en 2016 [4] reposent sur la définition d'une base de données représentative du comportement matériau, qui vit dans un espace multidimensionnel. Pour explorer la nécessité ou non de couvrir le plus largement possible cet espace, nous générons des bases de données synthétiques adaptées à un problème plan, dans le cadre des grandes déformations élastiques, et confrontons la « richesse » de ces bases de données.

Mots clés — *data-driven*, base de données, grandes transformations, hyperélasticité, invariants.

1 Introduction

Kirchdoerfer et Ortiz ont récemment proposé un « nouveau paradigme », appelé *data-driven computational mechanics* (DDCM), qui permet de se passer de la « modélisation empirique du comportement du matériau » [4]. À la place d'une relation mathématique, la réponse mécanique du matériau est représentée par une base de données de couples tensoriels déformation-contrainte. L'approche repose sur une séparation des équations de la mécanique en deux groupes : la caractérisation de la réponse matériau d'une part, et la satisfaction de principes physiques fondamentaux d'autre part. Tandis que le modèle de comportement ne fait qu'*approcher* la réponse du matériau dans certaines conditions, les équations fondamentales de la mécanique (équilibre et compatibilité) doivent toujours être satisfaites. Le problème mécanique est reformulé en ce sens comme un problème de minimisation de la distance entre deux types de champs d'état déformation-contrainte : l'*état matériau* représente la réponse matériau du corps déformable et prend ses valeurs dans la base de données, l'*état mécanique* vérifie les équations d'équilibre et de compatibilité.

Dans cette approche, les données matériau sont directement injectées dans les modélisations éléments finis sous forme discrète. Il n'y a pas d'apprentissage d'un modèle comme dans les cas où des méthodes de *machine learning* sont utilisées pour déterminer le comportement d'un matériau. La solution *data-driven* obtenue avec la DDCM dépend alors fortement de la base de données. En effet, les paires tensorielles déformation-contrainte vivent dans un espace de grande dimension. La réponse mécanique d'un problème donné pourra parcourir différentes zones dans cet espace. Il convient alors d'interroger la couverture de cet espace par la base de données.

Dans ce travail, on se propose d'étudier la dépendance de la solution à la *richesse* de la base de données matériau dans un cadre élastique en grandes transformations. Pour ce faire, deux méthodes différentes seront employées pour générer des données synthétiques, c'est-à-dire à partir d'un modèle de comportement, mis ensuite de côté. La notion de richesse sera illustrée pour un problème plan, ce qui permet de réduire la dimensionnalité de l'espace dans lequel vit la base de données.

2 Méthodes

2.1 Formulation du problème data-driven

Il existe plusieurs formulations pour la DDCM en grandes transformations [1, 9, 8, 5], nous utiliserons uniquement la formulation Lagrangienne [9]. Dans ce cas, l'état de déformation-contrainte d'un

point matériel \underline{X} de la structure est le champ $z : \underline{X} \mapsto \left(\underline{\underline{E}}(\underline{X}), \underline{\underline{S}}(\underline{X}) \right)$ où $\underline{\underline{E}}$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange et $\underline{\underline{S}}$ le second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff. L'ensemble des champs déformation-contrainte est appelé espace des phases et est noté \mathcal{Z} . On distingue alors les *états matériau*, associant chaque point matériel à couple déformation-contrainte issu d'une base de données préalablement établie, des *états mécaniques*, respectant les conditions d'admissibilité mécanique du problème aux limites considéré.

La base de donnée matériau est notée $\mathcal{D}^{loc} = \left\{ \left(\underline{\underline{E}}_i, \underline{\underline{S}}_i \right), i = 1, \dots, m \right\}$, avec m le nombre de points dans la base de donnée. L'ensemble données matériau est défini sur la configuration de référence $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{D} = \left\{ z \mid z(\underline{X}) = \left(\underline{\underline{E}}(\underline{X}), \underline{\underline{S}}(\underline{X}) \right) \in \mathcal{D}_{loc}, \forall \underline{X} \in \Omega_0 \right\}. \quad (1)$$

L'état matériaux sont alors les champs notés $z^* \in \mathcal{D}$.

L'ensemble des états mécaniquement admissibles, noté \mathcal{E} , est défini comme l'ensemble des champs déformation-contrainte $z \in \mathcal{E}$ respectant la compatibilité des déformations, l'équilibre statique et les conditions aux limites du problème considéré. Ces derniers sont appelés état mécaniques. Les contraintes d'admissibilité peuvent être exprimées dans un cadre variationnel et encodés classiquement dans une formulation par éléments finis [9].

La solution du problème data-driven s'écrit alors comme la minimisation d'une distance entre états mécaniques et matériau :

$$\mathcal{S} = \arg \min_{z \in \mathcal{E}} d(z, \mathcal{D}). \quad (2)$$

Ce problème peut alors être formulé comme une double minimisation sous-contrainte, couplant des champs inconnus à valeurs continues (état mécaniques) et à valeurs discrètes (états matériaux). Il peut être résolu par la méthode des éléments finis adossés à un solveur spécifique [4, 9].

Dans une formulation éléments finis, les états mécaniques et matériau sont définis à chaque point d'intégration du maillage (notés $z_e = \left(\underline{\underline{E}}_e, \underline{\underline{S}}_e \right)$ et $z_e^* = \left(\underline{\underline{E}}_e^*, \underline{\underline{S}}_e^* \right)$ respectivement) et la distance d est calculée comme la somme des distances locales :

$$d(z, \mathcal{D}) = \sum_{e=1}^M w_e d_e \left(\left(\underline{\underline{E}}_e, \underline{\underline{S}}_e \right), \left(\underline{\underline{E}}_e^*, \underline{\underline{S}}_e^* \right) \right) \quad (3)$$

avec d_e la distance locale définie comme une fonction énergétique d'écart en déformation et en contrainte et w_e le poids d'intégration.

2.2 Problème mécanique étudié

Nous étudions ici la réponse d'une fine membrane trouée rectangulaire de dimension $l \times h = 20 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$, encadrée à une extrémité et soumise à un déplacement imposé $\underline{u}_D = 30 \text{ mm } \underline{e}_X + 5 \text{ mm } \underline{e}_Y$ à l'autre extrémité. L'hypothèse des contraintes planes est adoptée et le matériau est supposé incompressible. Deux maillages sont étudiés : le maillage « grossier » (resp. « fin ») comporte $N = 1092$ (resp. 2495) nœuds et $M = 4060$ (resp. 9500) points d'intégration.

Le modèle de comportement utilisé pour la génération des bases de données et pour produire la solution éléments finis de référence est le modèle neo-Hookéen, formulé en 2D grâce aux hypothèses de contraintes planes et d'incompressibilité :

$$\check{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{C}}) = \mu \left(\underline{\underline{I}} - \left(\det \underline{\underline{C}} \right)^{-1} \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \quad (4)$$

avec $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ le tenseur de Cauchy-Green droit réduit à ses composantes 2D, $\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité 2D et μ le module du cisaillement.

2.3 Génération de la base données

La performance du solveur data-driven va beaucoup dépendre de la base de données matériau. Celle-ci peut être obtenue par une méthode inverse à partir de mesures expérimentales [7, 3]. Néanmoins,

pour étudier la richesse nécessaire de cette base de données nous utiliserons ici uniquement des données synthétiques. Les couples déformation-contrainte de la base de données matériau sont générés artificiellement à partir d'un modèle de comportement hyperélastique.

Générer des données synthétiques pour la simulation pilotée par les données consiste à échantillonner l'espace des phases. Le plus naturel est alors de discrétiser l'espace des tenseurs de déformations $\underline{\underline{E}}$ et de calculer les contraintes correspondantes à l'aide d'un modèle de comportement. On choisit pour une première démonstration de se placer dans le cas d'un problème bi-dimensionnel, en contraintes planes. Les tenseurs n'ont alors que 3 composantes indépendantes et l'espace des phases est de dimension plus réduite (6).

Nous étudions deux types de bases de données présentées dans [9] :

- Méthode d'échantillonnage dense (DB-DENSE) : l'espace des tenseurs $\underline{\underline{E}}$ est échantillonné de façon dense en s'inspirant de la méthode proposée par [6] et de la formulation des invariants du tenseurs de Hencky proposée par [2];
- Méthode d'échantillonnage préférentiel (DB-DDI) : la base de données est directement générée à partir d'une analyse de *clustering* des résultats d'une simulation éléments finis sur une structure similaire au problème considéré.

2.3.1 Méthode d'échantillonnage dense

Nous effectuons un échantillonnage dense de l'espace du tenseur des déformations pures symétrique $\underline{\underline{U}}$ issu de la décomposition polaire droite du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}$. Cette méthode a été développée par [6] pour de générer des bases de données pour des modèles réduits d'homogénéisation de la réponse d'une microstructure en grandes transformations. La représentation utilisée est dense : pour n'importe quel tenseur $\underline{\underline{U}}$ dans l'espace il est possible de raffiner la méthode d'échantillonnage afin de d'obtenir un tenseur $\underline{\underline{U}}'$ qui s'en approche aussi près que possible. Afin de générer des bases de données aussi denses et aussi riches que possible nous mettons donc à profit leur méthode :

1. Nous échantillonons l'espace des tenseurs $\underline{\underline{U}}$ de façon dense grâce à la méthode de [6];
2. Les déformations de Green-Lagrange sont obtenues par $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^2 - \underline{\underline{I}})$;
3. Les contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{U}}^2)$ sont obtenues par le modèle neo-Hookéen $\underline{\underline{S}}$ (4).

Cette famille de base de données est appelée DB-DENSE.

La méthode originale de [6] a été développée pour des problèmes en trois dimensions, elle est donc adaptée au problème 2D considéré. On donne ensuite un sens physique aux paramètres d'échantillonnage en utilisant les invariants du tenseur de Hencky $\underline{\underline{H}} = \ln \underline{\underline{V}}$ introduits par [2].

La méthode repose sur la séparation multiplicative volumétrique-déviatorique du tenseur $\underline{\underline{U}} = J^{1/3} \hat{\underline{\underline{U}}}$ avec $J = \det \underline{\underline{F}} = \det \underline{\underline{U}}$ le Jacobien de la transformation et $\hat{\underline{\underline{U}}}$ la partie déviatorique du tenseur $\underline{\underline{U}}$, c.-à-d. $\det \hat{\underline{\underline{U}}} = 1$. On note \mathcal{U} l'espace des tenseurs $\underline{\underline{U}} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ admissibles. L'échantillonnage de \mathcal{U} est ainsi séparé en l'échantillonnage du déterminant J d'une part, et l'échantillonnage des tenseurs déviatoriques $\hat{\underline{\underline{U}}}$ d'autre part :

$$\left\{ \left(J^{(m)} \right)^{1/3} \hat{\underline{\underline{U}}}^{(j)} \right\}_{m,j=1}^{m=N_{\text{det}}, j=N_{\text{dev}}} . \quad (5)$$

Dans le cas incompressible ($J = 1$), seul l'espace des tenseurs $\hat{\underline{\underline{U}}}$ est échantillonnée au moyen d'un passage par l'exponentielle matrice des tenseurs de Hencky Langrangien déviatoriques $\hat{\underline{\underline{Y}}} = \ln \hat{\underline{\underline{U}}} = \ln (\text{dev } \underline{\underline{U}})$. On note $\underline{\underline{Y}}$ la matrice de représentation des tenseurs $\hat{\underline{\underline{Y}}}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\underline{\underline{e}}_X, \underline{\underline{e}}_Y, \underline{\underline{e}}_Z)$. La matrice $\underline{\underline{Y}}$ prend ses valeurs dans l'espaces des matrices 3×3 symétriques à trace nulles respectant l'hypothèses des contraintes planes. C'est un espace de dimension 3 dont on peut facilement écrire une base orthonormale $\mathcal{Y} = (Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)})$. La matrice $\underline{\underline{Y}}$ est alors obtenue comme la décomposition linéaire unique des matrices de la base \mathcal{Y} :

$$\underline{\underline{Y}} = \beta \sum_{k=1}^3 a_k Y^{(k)}, \quad (6)$$

avec β l'« amplitude déviatorique » et le vecteur unitaire $a = [a_1, a_2, a_3]^T \in \mathbb{R}^3$ la « direction » de la matrice Y et donc du tenseur \underline{U} [6].

L'ensemble \mathcal{U} des tenseurs de déformation pure \underline{U} est donc échantillonné comme suit :

1. Générer une distribution uniforme de N_{dir} directions \underline{a} sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 ;
2. Prendre N_{amp} valeurs d'amplitude déviatorique β régulièrement espacées dans $[0, \beta_{\text{max}}]$
3. Générer ainsi la base de données des représentations matricielles de \underline{U} dans la base canonique \mathcal{B} par

$$\left\{ \exp \left(\beta^{(i)} \sum_{k=1}^5 [a^{(j)}]_k Y^{(k)} \right) \right\}_{i,j,l=1}^{i=N_{\text{amp}}, j=N_{\text{dir}}} \subset \mathcal{U}. \quad (7)$$

Pour donner un sens physique plus clair aux paramètres β et $\underline{a} = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{R}^3$ nous faisons appel à la formulation des invariants du tenseur de Hencky proposée par [2], qui repose elle aussi sur la séparation volumétrique-déviatorique du tenseur.

Les trois invariants proposés ont chacun un sens physique particulier [2] :

- Le premier invariant $K_1 = \text{tr} \underline{Y} = \ln J$ décrit la « quantité de dilatation » ;
- Le second invariant $K_2 = \sqrt{\text{dev} \underline{Y} : \text{dev} \underline{Y}}$ mesure l'« amplitude de distorsion » ;
- Le troisième invariant $K_3 = \frac{3\sqrt{6}}{(K_2)^3} \det(\text{dev} \underline{Y})$ décrit le « mode de distorsion ».

Dans le cas incompressible $K_1 = 0$ et les deux invariants restants sont reliés par des relations univoques aux valeurs principales $y_I > y_{II} > y_{III}$ du tenseur \underline{Y} . En étudiant les valeurs propres des tenseurs \underline{Y} générés par la combinaison linéaire (6) des matrices de la base \mathcal{Y} , on peut donner un sens physique aux paramètres β et \underline{a} par l'intermédiaire des invariants K_2 et K_3 .

Néanmoins, dans le cas de contraintes planes, l'ordre des trois valeurs principales n'est pas nécessairement respectées dans le plan. On note $\theta = (\underline{p}_1, \underline{e}_X)$ l'angle entre le vecteur de la plus grande valeur propre dans le plan ($\underline{e}_X, \underline{e}_Y$) du tenseur bidimensionnel \underline{Y} et le vecteur \underline{e}_X . Cette angle est appelé l'*angle d'orientation* de l'extension principale dans le plan. Grâce à ces définitions, nous montrons que l'« amplitude déviatorique » β n'est autre que l'invariant K_2 , ce qui confirme l'intuition de [6] d'une amplitude de distorsion [9]. Nous montrons également que les coefficients a_1, a_2, a_3 sont reliés par une relation univoque à l'invariant K_3 , l'angle d'orientation θ et l'ordre des valeurs propres dans le plan. La « direction » \underline{a} du tenseur de Hencky est donc relié au *mode de déformation* (K_3) et à la direction préférentielle de cette déformation dans le plan (θ).

La méthode d'échantillonnage dense permet donc de contrôler les modes de déformations et leurs amplitudes contenues dans la base de données.

2.3.2 Méthode d'échantillonnage préférentiel

Pour simuler les résultats pouvant être obtenu par la méthode inverse, appelée *data-driven identification* (DDI), nous avons généré une base de données à partir d'une analyse de *clustering* sur des états de déformation-contrainte obtenus par simulations éléments finis. La structure utilisée pour générer la solution éléments finis est une plaque rectangulaire de même dimension que le problème décrit en Section 2.2, percée de deux trous et sollicitée suivant différentes directions sur son bord supérieur (traction, cisaillement, compression) et encastrée sur le bord inférieur.

Les états tensoriels de déformation-contrainte $\left\{ z_p = \left(\underline{E}_{\underline{p}}, \underline{S}_{\underline{p}} \right), p = 1, \dots, P \right\}$ résultant de chaque chargement étudié sont collectés à chaque point d'intégration du maillage, et sont numérotés de 1 à P arbitrairement. Un algorithme de *k-means* est alors utilisé dans l'espace à 6 dimensions des $z_p = \left(\underline{E}_{\underline{p}}, \underline{S}_{\underline{p}} \right) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ pour construire une base de données, constituée des points $z_i^* = \left(\underline{E}_i^*, \underline{S}_i^* \right)$, les centroïdes des m clusters déterminés, obtenus par la minimisation :

$$\sum_{p=1}^P \min_{z_i^* \in Z_c} \|z_p - z_i^*\|^2 \quad (8)$$

où Z_c est l'ensemble des m clusters disjoints. La méthode est illustrée sur la Figure 1.

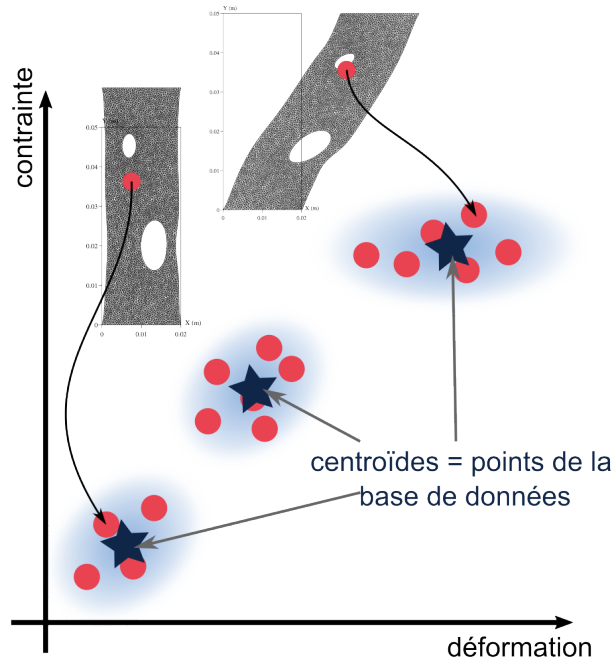


FIGURE 1 – Méthode d'échantillonnage préférentiel pour générer la base de données DB-DDI.

3 Résultats et Discussion

3.1 Base de données générées

On génère des bases de données des deux familles DB-DENSE, et DB-DDI selon les méthodes précédemment présentées. Pour DB-DENSE, on fait varier les paramètres d'échantillonnage pour générer des bases de données de différentes tailles qui comportent chacune $m = N_{\text{dir}} \times N_{\text{amp}}$ points avec $N_{\text{dir}} \in \{25, 256, 2500, 25600\}$ et $N_{\text{amp}} \in \{10, 1000, 1000\}$.

La base de données DB-DDI est générée par le *clustering* d'un total de 429 520 couples déformation-contrainte et comprend $m = 2200$ points. Nous remarquons dans ce cas que la base de données DB-DDI comprend moins de points qu'il n'y a de points d'intégration dans le maillage. Nous insistons également sur le fait que celle-ci ne contient pas la solution de référence : les états matériau ont été obtenus par l'analyse de la réponse d'une structure différente (bien que similaire) à celle étudiée ici. Mais surtout, ils ne respectent ni la compatibilité ni l'équilibre car aucune contrainte n'a été imposée dans le *k-means*.

Les échantillonnages dense et préférentiel des espaces de déformations ainsi obtenus sont représentés sur la Figure 2. On remarque que la zone couverte par les données prend une forme conique pour DB-DENSE et non triviale pour DB-DDI. Elles se distinguent toutes les deux de la couverture qu'on aurait pu obtenir par un échantillonnage selon une grille régulière de l'espace des déformations.

3.2 Résultats numériques

Les résultats sont d'abord validés en comparaison à la solution de référence éléments finis, obtenue avec le modèle de comportement utilisé pour générer les bases de données. Les courbes de chargement représentées Figure 3 donnent une bonne concordance des résultats éléments finis et data-driven pour les deux types de base de données testés. À noter que plus le nombre de points dans la base de données (DB-DENSE) augmente, plus les résultats sont proches de la solution de référence (Figure 3(a)).

Après avoir validé les résultats, nous développons des outils pour analyser les résultats *data-driven pour eux-mêmes* et non plus en référence avec une solution éléments finis. En effet, l'approche a été introduite pour les cas où il n'est pas possible de représenter fidèlement la réponse du matériau avec un modèle de comportement (complexité de l'élaboration du modèle ou de l'identification de ses paramètres). Dans ces cas, il n'existe pas de « solution de référence ». Il faut donc pouvoir analyser les résultats de la DDCM pour ce qu'ils sont : la réponse mécaniquement admissible de la structure la plus proche possible de ce qui a été mesuré de la réponse matériau à travers seulement un nuage de points discrets.

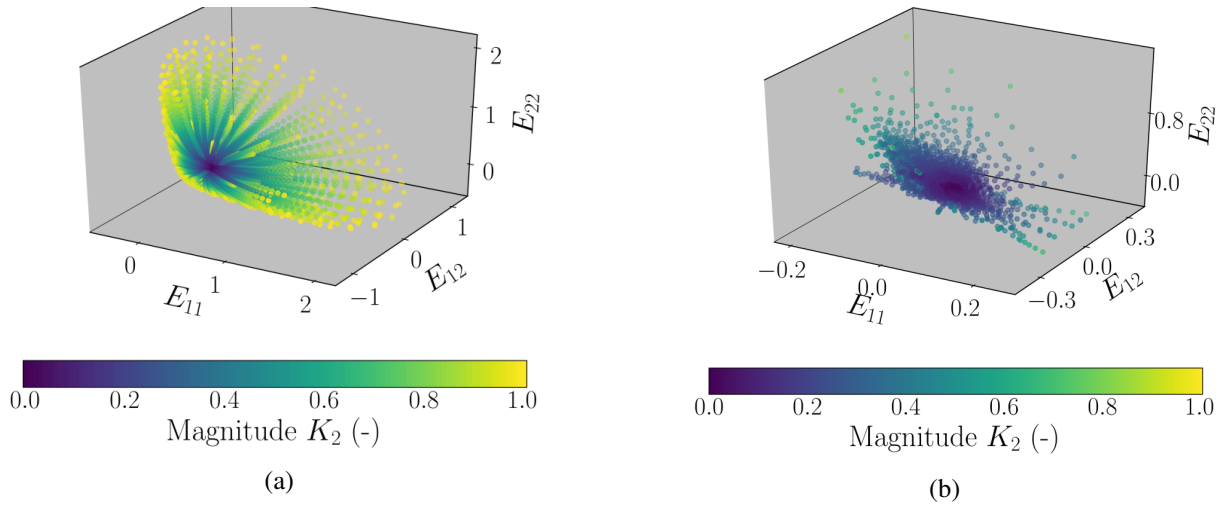


FIGURE 2 – Représentation des points de la base de données dans l’espace des déformations E_{11}, E_{12}, E_{22} . (a) DB-DENSE avec $N_{amp} \times N_{dir} = 100 \times 256$. (b) DB-DDI.

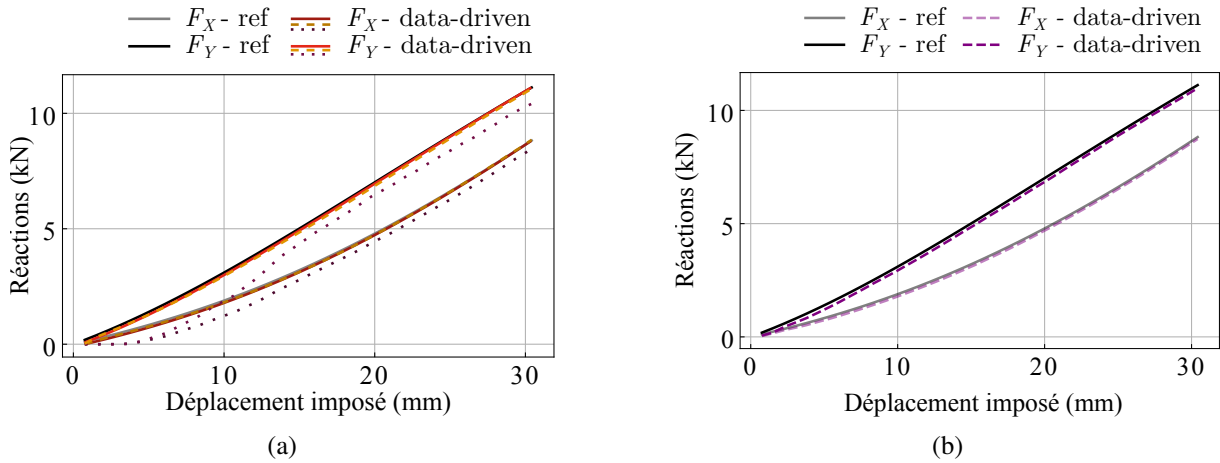


FIGURE 3 – Comparaison des solutions data-driven avec la référence éléments finis (courbes noires et grises) pour les réactions F_X, F_Y sur le bord supérieur de la membrane, en fonction de la norme du déplacement imposé sur ce bord. (a) Courbes de chargement des solutions DB-DENSE. Les lignes continues rouges correspondent à la base $N_{amp} \times N_{dir} = 1000 \times 25600$, les tirets jaunes à $N_{amp} \times N_{dir} = 100 \times 2500$ et les pointillés violets à $N_{amp} \times N_{dir} = 10 \times 256$. (b) Solution DB-DDI.

Parmi ces outils, un indicateur de la pertinence de la solution data-driven est la valeur finale de la fonction objectif du problème de minimisation (2). Pour chaque base de données générées, les résultats sont résumés sur la Figure 4. Comme attendu, la fonction objectif diminue avec le nombre de points dans

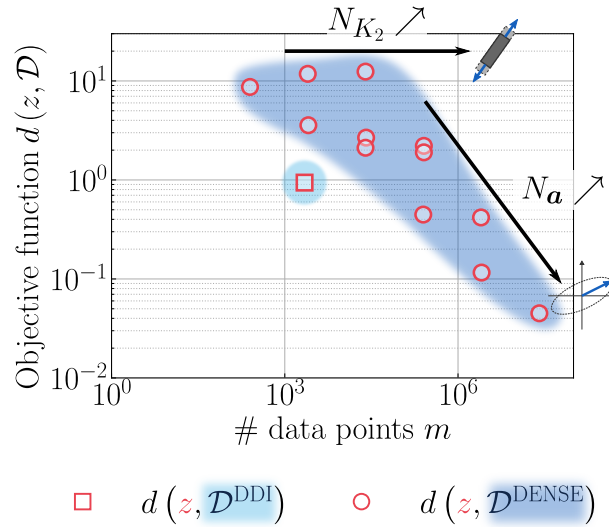


FIGURE 4 – Convergence de la solution data-driven avec le nombre de points dans la base de données.

la base de données. Néanmoins, l'augmentation du nombre $N_{K_2} = N_{amp}$ d'amplitudes échantillonnées a moins d'impact que le nombre $N_a = N_{dir}$ de direction échantillonnées. Ainsi, la richesse de la base de données se mesure davantage en terme de modes de déformation. On constate également que la base de données DB-DDI présente des performances comparables aux bases DB-DENSE pour un nombre de points très inférieur, ce qui montre l'intérêt de l'échantillonnage préférentiel. En effet, la structure qui a été sollicitée, étant similaire au cas étudié, présente des modes de déformations similaires et suffisant pour représenter le comportement du matériau et sa plage de sollicitation.

4 Conclusion

Les méthodes de simulation pilotée par les données reposent nécessairement sur la qualité et la richesse des base de données utilisées. Celles-ci peuvent être générées artificiellement par un échantillonnage de l'espace des déformations. Pour un problème élastique bi-dimensionnel, cet espace est en trois dimensions. Dans ce travail, nous avons exploré deux méthodes pour générer des bases de données : l'une repose sur un échantillonnage dense de l'espace des déformations, l'autre sur un *clustering* des états de déformation-contrainte obtenu par simulation éléments finis. Les deux méthodes ont fait usage d'un modèle de comportement qui est ignoré par la suite dans les simulations pilotées par les données. On a démontré une bonne adéquation des résultats issus de la DDCM à ceux de la simulation éléments finis de référence. Comme attendu, la solution est d'autant plus fidèle que le nombre de points dans la base de données augmente. Mais c'est surtout la richesse des modes de déformation contenus dans la base de données qui impacte la qualité des résultats. Il s'agit donc de peupler *préférentiellement* l'espace des déformations-contraintes, et notamment les zones effectivement explorées par le problème mécanique que l'on cherche à simuler, plutôt que de multiplier aveuglément le nombres de points matériau dans la base de données.

Si cette étude a été appliquée au cas particulier de la (DDCM), où les couples déformation-contrainte sont directement injectés dans le modèle numérique, on pourrait aussi l'appliquer au cas des modèles de comportement élaborés par des méthodes d'apprentissage. La bonne définition de la richesse de la base de données permettrait alors d'assurer la qualité de l'apprentissage du modèle. Enfin, dans un cas où les points matériau peuvent être générés par des calculs éléments finis à une échelle inférieure (pour des matériaux hétérogènes par exemple), l'approche proposée ici pourrait permettre de bien choisir les calculs à effectuer plutôt qu'à travers l'échantillonnage régulier cubique de l'espace des déformations [10].

Références

- [1] S. Conti, S. Müller, M. Ortiz. *Data-driven finite strain elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1-33, 2020.
- [2] J. C. Criscione, J. D. Humphrey, A. S. Douglas, W. C. Hunter. *An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2445-2465, 2000.
- [3] M. Dalémat, M. Coret, A. Leygue, E. Verron. *Measuring stress field without constitutive equation*. Mechanics of Materials, 103087, 2019.
- [4] T. Kirchdoerfer, M. Ortiz. *Data-driven computational mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 81-101, 2016. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 115487, 2022.
- [5] T. F. Korzeniowski, K. Weinberg. *Data-driven finite element computation of open-cell foam structures*.
- [6] O. Kunc, F. Fritzen. *Finite strain homogenization using a reduced basis and efficient sampling*. Mathematical and Computational Applications, 56, 2019.
- [7] A. Leygue, M. Coret, J. Réthoré, L. Stainier, E. Verron. *Data-based derivation of material response*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 184-196, 2018.
- [8] A. Platzer. *Finite element solver for data-driven finite strain elasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 113756, 2021.
- [9] A. Platzer. *Mécanique Numérique En Grandes Transformations Pilotée Par Les Données : De La Génération De Données Sur Mesure À Une Stratégie Adaptative De Calcul Multiéchelle*, Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2020.
- [10] J. Yvonnet, E. Monteiro, Q.-C. He. *Computational homogenization method and reduced database model for hyperelastic heterogeneous structures*. International Journal for Multiscale Computational Engineering, 2013.