

Inclusion de critères de rupture dans l'optimisation topologique composite avec fibres curvilignes

L. Vertonghen¹, F.-X. Irisarri¹, D. Bettebghor¹, B. Desmorat²

¹ DMAS, ONERA, Université Paris Saclay, Châtillon, France
{lander.vertonghen, francois-xavier.irisarri, dimitri.bettebghor}@onera.fr

² Sorbonne Université, CNRS, UMR 7190, Institut d'Alembert, Paris, France, *boris.desmorat@sorbonne-universite.fr*

Résumé —

Une méthode est proposée pour inclure des critères de rupture quadratiques dans l'optimisation topologique avec un matériau anisotrope. Le critère de rupture est calculé localement en exprimant les quantités d'intérêt dans le repère global au moyen de la méthode polaire. La contrainte d'optimisation est obtenue par une approximation par valeur inférieure de la valeur maximale du critère sur la pièce, permettant à la fois de réduire le nombre de contraintes et de relaxer les singularités numériques. La validité de la méthode est démontrée sur deux types d'optimisations, mettant en évidence l'influence de la prise en compte de la résistance sur la forme de la solution optimisée.

Mots clés — paramètres polaires, SIMP, composites, anisotropie distribuée, agrégation

1 Introduction

Les méthodes d'optimisation topologique classiques sont focalisées sur la seule prise en compte de la rigidité [1, 2]. Cependant, cela ne suffit pas pour aboutir à des résultats pratiques. En effet, ce type d'optimisation topologique aboutit généralement à des solutions qui peuvent ne pas satisfaire d'autres contraintes mécaniques, telles que la rupture. Celle-ci a été introduite avec succès en tant que contrainte de l'optimisation topologique avec des matériaux isotropes [3, 4]. Néanmoins, ces travaux identifient trois difficultés principales : i) l'espace de conception peut dégénérer lorsque des contraintes d'optimisation sont formulées sur les contraintes mécaniques en provoquant des singularités numériques [5], ii) la contrainte mécanique est une dimension locale, il y a donc une contrainte d'optimisation par élément du maillage EF, et iii) le coût numérique du calcul du gradient peut devenir prohibitif, puisque la contrainte mécanique en un élément dépend du champ complet des variables d'optimisation. Pour contrer la dégénérescence de l'espace de conception et éviter des minima locaux, des techniques de relaxation des contraintes mécaniques peuvent être utilisées [6], combinées à des techniques d'agrégation pour obtenir un nombre restreint de contraintes d'optimisation [7]. Une autre approche proposée par Verbart et al. [8] consiste à pallier le problème de singularité de la contrainte mécanique et de sa nature locale par l'utilisation d'une technique de relaxation et d'agrégation simultanée, au moyen de la fonction "lower Kreisselmeier–Steinhauser" (LKS). Cette technique permet d'obtenir une unique contrainte d'optimisation qui approche par valeur inférieure la valeur maximum du critère de rupture pour tous les éléments de la structure. Finalement, l'agrégation des contraintes permet l'utilisation de la méthode adjointe pour le calcul des gradients de ce critère de rupture, afin de réduire les coûts numériques de l'optimisation.

L'inclusion de l'anisotropie dans l'optimisation topologique constitue un autre défi. Les travaux publiés sont peu nombreux et se limitent le plus souvent à la prise en compte de la rigidité seule [9]. Seules quelques études récentes se sont focalisées sur l'inclusion de la rupture anisotrope. Lund [10] a par exemple utilisé l'optimisation topologique pour déterminer les empilements de stratifiés composites à base de plis Uni-Directionnels (UD) à orientations fixes avec un critère

de rupture. Au contraire, Mirzendehtdel et al. [11] ont incorporé un critère de rupture anisotrope dans des structures obtenues par fabrication additive. Finalement, Ma *et al.* [12] ont proposé une méthode d'optimisation en tenant compte du critère Tsai-Wu avec des fibres courbes. Les contraintes mécaniques y sont exprimées dans le repère matériau des fibres afin d'évaluer la rupture.

Cette communication propose une nouvelle stratégie de prise en compte de critères de rupture anisotropes pour des matériaux composites renforcés de fibres continues, qu'elles soient courbes ou à orientation fixe. La méthode est basée sur la technique d'agrégation et relaxation par valeur inférieure de la rupture locale. La rupture est évaluée pour différents types de critères quadratiques, qui sont décrits par le formalisme polaire, afin de les exprimer dans le même repère global que les contraintes mécaniques. Des résultats de la méthode sont montrés sur des optimisations à fibres courbes et orientations fixes, démontrant l'influence de la prise en compte de la contrainte de résistance sur la forme de la solution optimisée.

2 Méthodologie

Le problème d'optimisation global considéré ici est donnée en (1). Cela consiste en une minimisation de la fraction volumique v_f , représentant le ratio de matière par rapport à l'espace de conception. L'optimisation est soumise à une contrainte de rigidité par le biais d'une valeur maximale de la compliance C_0 (la compliance étant égale à l'énergie de déformation de la structure). Finalement, g_k^{LKS} est la contrainte d'optimisation qui prend en compte la rupture. L'obtention de cette contrainte est expliquée en plus de détail dans la Section 2.3.

$$\begin{aligned}
& \min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}_1} v_f(\boldsymbol{\rho}) \\
& \text{s.t. } C(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}_1) \leq C_0 \\
& \quad g_k^{LKS}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}_1) \leq 0 \\
& \quad \boldsymbol{\rho} \in [\rho_{\min}, 1] \\
& \quad \boldsymbol{\phi}_1 \in [-\phi_1, \phi_1]
\end{aligned} \tag{1}$$

La résolution du problème mécanique est faite au moyen de la méthode des éléments finis (EF) ($[K]\mathbf{U} = \mathbf{F}$). $[K]$ est la matrice de rigidité globale, \mathbf{F} le vecteur de force et \mathbf{U} les déplacements nodaux. La compliance C est alors calculée comme $C = \mathbf{U}^T[K]\mathbf{U}$. L'espace de conception est défini par le maillage EF. Les variables de conception sont les distributions de densité $\boldsymbol{\rho}$ et celle des directions de fibres d'un pli Uni-Directionnel (UD), $\boldsymbol{\phi}_1$. Le problème d'optimisation est résolu par une méthode à gradient, l'algorithme MMA, comme détaillé en [13].

2.1 Variables d'optimisation

La topologie dans le problème d'optimisation est décrite par un champ de densité, conformément à la méthode SIMP (Solid Isotropic Material Interpolation) [1]. Cette méthode consiste à assigner à chaque élément une densité $\rho_{(i)}$, utilisée pour représenter la présence ($\rho = 1$) ou l'absence de matière ($\rho = \rho_{\min}$). ρ_{\min} est fixé à 0.001 afin d'éviter des problèmes de singularité lors de l'analyse EF. Le tenseur d'élasticité $[Q_{(i)}]$ utilisé pour l'analyse mécanique est obtenu à partir de (2), où $[Q_0]$ est le tenseur élastique du matériau de base. p est l'exposant SIMP qui permet de forcer la convergence des valeurs de densité vers leur valeur maximale ou minimale, de sorte à obtenir un design aux contours clairement définis, fixée à $p = 3$ dans cette communication. Finalement, pour éviter le phénomène de damier sur la solution optimisée, un filtre linéaire est utilisé sur les variables de densité.

$$[Q_{(i)}] = \rho_{(i)}^p [Q_{0(i)}] \tag{2}$$

Le comportement élastique anisotrope macroscopique du composite est décrit par le formalisme polaire [14]. Un tenseur d'élasticité $[Q_{0(i)}]$ est défini pour chaque élément, qui dépend de

l'orientation ϕ_1 du matériau UD. Le même filtre linéaire est également appliqué aux orientations pour garantir la régularité des distributions.

2.2 Critère de rupture

La modélisation de la rupture pour des plis UD est décrite par un critère quadratique. Le critère le plus fréquent est le critère de Tsai-Wu, décrit en (3). Ce critère dépend d'admissibles différents selon la direction considérée et différentie également la tenue en traction et en compression (X_t, X_c, Y_t, Y_c, S). Ce critère est basé sur les contraintes mécaniques locales ($\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$) exprimées dans le même repère que les admissibles, qui est typiquement le repère matériau du pli.

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \sqrt{\frac{1}{X_t X_c} \frac{1}{Y_t Y_c}} \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2 + \frac{\tau_{12}}{S^2} \leq 1 \quad (3)$$

L'enveloppe de rupture de Tsai-Wu (3) peut être écrite sous une forme tensorielle compacte comme indiqué dans (4). Cette notation réduite est aussi valable pour d'autres critères du type Tsai-Hill ou Hoffman [15]. $\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur des contraintes mécaniques, et $[F(\phi_1)]$ et \mathbf{G} contiennent les informations sur les admissibles selon le type de critère.

$$\boldsymbol{\sigma}^T [F(\phi_1)] \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{G}(\phi_1) \leq 1 \quad (4)$$

On reformule (4) en introduisant le facteur multiplicatif s_1 (5). Si $s_1 \geq 1$, le critère est considéré comme satisfait et il n'y a pas de rupture.

$$s_1^2 \boldsymbol{\sigma}^T [F(\phi_1)] \boldsymbol{\sigma} + s_1 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{G}(\phi_1) - 1 = 0 \quad (5)$$

Dans la méthode proposée, les contraintes mécaniques restent exprimées dans le repère EF global. Ce sont les admissibles $[F(\phi_1)]$ et \mathbf{G} qui sont tournés du repère matériau local au repère EF global. Pour cela, la décomposition polaire [14] des critères de rupture [15] est utilisée. Cela permet d'exprimer les composants de $[F(\phi_1)]$ et \mathbf{G} dans le repère global selon (6) et (7) pour une orientation de fibre donnée ϕ_1 . $l, \gamma, \gamma_0, \gamma_1, \lambda, \lambda_0$ et λ_1 sont les invariants polaires du critère de rupture, calculés à priori pour des admissibles donnés.

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \gamma_0 + 2\gamma_1 + (-1)^l \lambda_0 \cos 4(\phi_1) + 4\lambda_1 \cos 2(\phi_1) \\ F_{xy} &= -\gamma_0 + 2\gamma_1 - (-1)^l \lambda_0 \cos 4(\phi_1) \\ F_{xs}/2 &= (-1)^l \lambda_0 \sin 4(\phi_1) + 2\lambda_1 \sin 2(\phi_1) \\ F_{yy} &= \gamma_0 + 2\gamma_1 + (-1)^l \lambda_0 \cos 4(\phi_1) - 4\lambda_1 \cos 2(\phi_1) \\ F_{ys}/2 &= -(-1)^l \lambda_0 \cos 4(\phi_1) + 4\lambda_1 \sin 2(\phi_1) \\ F_{ss}/4 &= \gamma_0 - (-1)^l \lambda_0 \cos 4(\phi_1) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} G_x &= \gamma + \lambda \cos 2(\phi_1) \\ G_y &= \gamma - \lambda \cos 2(\phi_1) \\ G_s/2 &= \lambda \sin 2(\phi_1) \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 Contrainte d'optimisation de rupture

La stratégie adoptée pour définir la contrainte d'optimisation est basée sur celle proposée par Verbart *et al.* [8], où la relaxation est combinée à l'agrégation grâce à l'utilisation d'une approximation inférieure de la valeur maximale du critère de rupture. Par conséquent, une valeur équivalente des contraintes mécaniques peut être utilisée. Cela consiste à utiliser le tenseur d'élasticité correspondant au matériau de base (densité de 1) pour calculer les contraintes mécaniques à partir des déformations évaluées par EF selon (8).

$$\boldsymbol{\sigma}_{(i)}^{eq} = [Q_{0(i)}] \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} \quad (8)$$

La valeur de $\sigma_{(i)}^{eq}$ est alors utilisée dans (5) avec les admissibles exprimés dans le repère global obtenu par la rotation ϕ_1 équivalente à l'orientation des fibres. Par après, une contrainte d'optimisation locale $\bar{g}_{(i)}$ est obtenue comme suit :

$$\bar{g}_{(i)} := \rho_{(i)} \left(\frac{1}{s_{1(i)}} - 1 \right) \leq 0 \quad (9)$$

Finalement, l'agrégation par valeur inférieure est réalisée au moyen de la fonction "lower Kreisselmeier-Steinhauser" (LKS), exprimée en (10).

$$g_k^{LKS} = \bar{g}_{\max} + \frac{1}{\mu} \ln \left[\frac{1}{N} \sum_{j \in \Omega_k} \exp \left(\mu \left[\bar{g}_{(j)} - \bar{g}_{\max} \right] \right) \right] \quad (10)$$

Ω_k est l'ensemble des éléments considérés dans l'agrégation, et g_k^{LKS} devient la valeur de la contrainte d'optimisation pour cet ensemble. N est le nombre de valeurs dans l'ensemble Ω_k . \bar{g}_{\max} est le maximum des $g_{(i)}$ de cet ensemble, et est introduit pour éviter des problèmes numérique. μ est le paramètre d'agrégation, dictant la précision de l'approximation. Le gradient cette contrainte d'optimisation est obtenue par méthode adjointe.

3 Résultats et discussion

La méthode proposée est testée sur le cas académique de la poutre en L [3], pour des optimisations topologiques en considérant la rupture. Tout d'abord, des résultats d'optimisations topologiques avec des fibres rectilignes à orientations fixes sont montrés pour différents critères de rupture quadratiques. Ceci est suivi de solutions pour des optimisations de la topologie et des orientations de fibres distribuées sur la structure.

3.1 Topologie et orientations fixes

Une minimisation de v_f avec seule la contrainte de rupture est abordée avec des orientations fixes des fibres UD ($\phi_1 = 0^\circ, 135^\circ$ et 90°). Différents critères de rupture sont comparés dans l'optimisation : Tsai-Wu, Hoffman et Tsai-Hill. La visualisation des enveloppes de ces critères dans le repère matériau est donnée dans la Figure 1. Les résultats d'optimisation avec ces différents critères sont montrés dans la Figure 2.

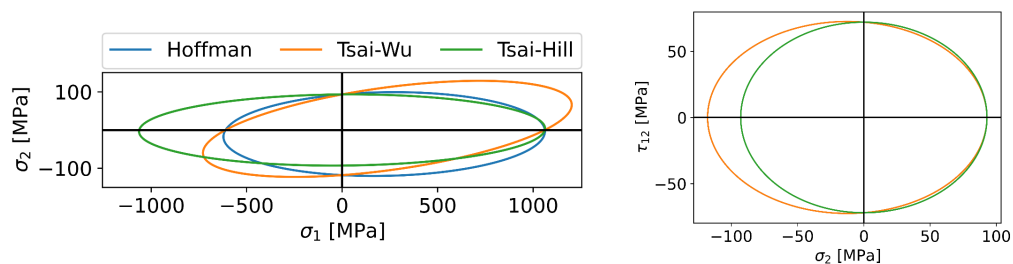


FIGURE 1 – Enveloppe des critères de rupture quadratiques de Hoffman, Tsai-Wu et Tsai-Hill dans le repère matériau $\sigma_1 - \sigma_2$ et $\sigma_2 - \tau_{12}$.

Les solutions obtenues sont sensibles à l'orientation du matériau. Cela s'explique par le fait que le chemin d'effort est influencé par la topologie, mais également par la rigidité anisotrope. Cette anisotropie privilégie le chargement le long de la direction des fibres. Par exemple, la barre oblique inférieure gauche suit l'orientation dans des fibres à 135° . De plus, les grandeurs sont un ordre de magnitude supérieur le long des fibres, promouvant encore plus le chargement axial.

En regardant la distribution de la valeur du critère de rupture local $g_{(i)}$, celle-ci est globalement uniforme sur la structure, montrant un niveau de rupture similaire. Bien que la contrainte d'optimisation agrégée g^{LKS} soit satisfaite, certaines des contraintes locales $\bar{g}_{(i)}$ sont supérieures

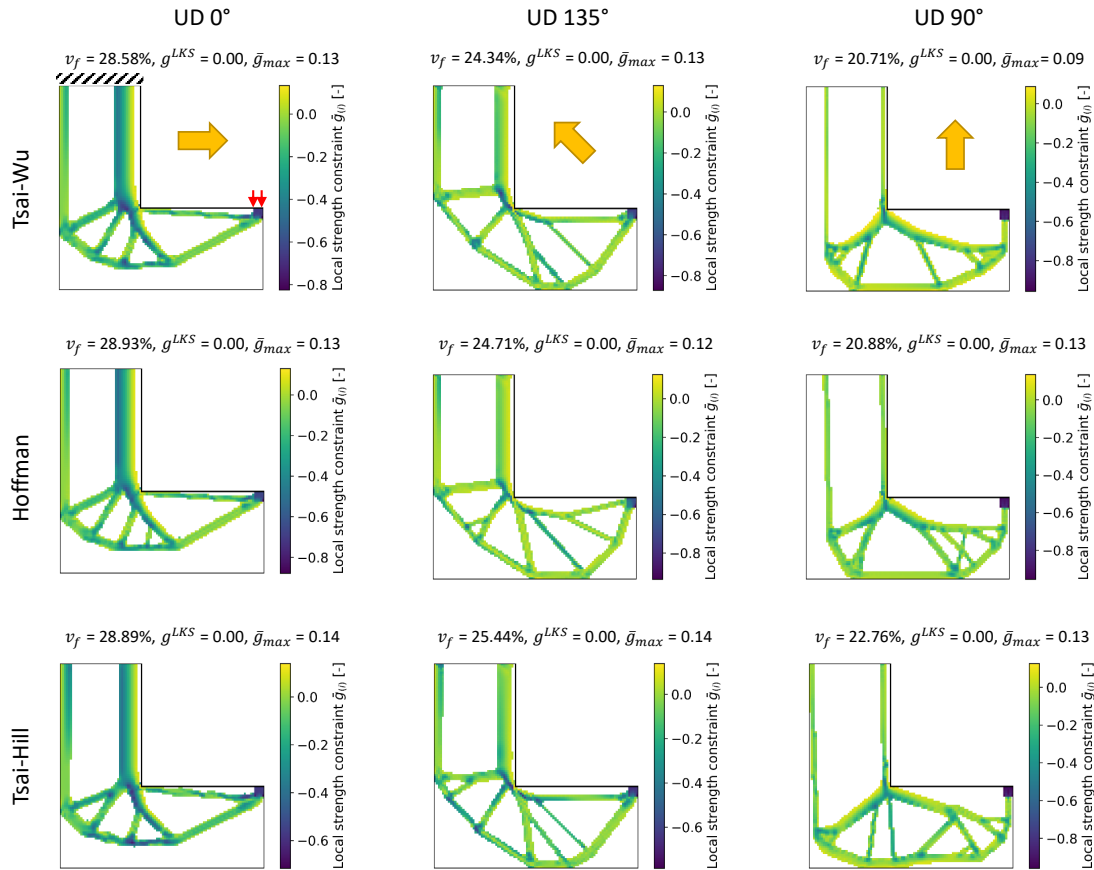


FIGURE 2 – Distribution des contraintes de rupture locale $g_{(i)}$ pour la minimisation du volume avec différents critères de rupture quadratiques pour des orientations UD fixes de 0° , 135° et 90° . Informations présentées pour les éléments optimisés avec une densité finale $\rho \geq 0,3$.

à 0, ce qui signifie que le critère de rupture n'est pas satisfait. C'est une conséquence de la sous-estimation de la fonction LKS. Néanmoins, des niveaux de rupture similaires ne signifient pas des mécanismes de rupture similaires. Les chargements locaux par rapport aux différents admissibles entraînent l'activation de différents mécanismes de rupture, car le chemin d'effort local n'est pas toujours aligné sur la direction de la fibre. Par exemple, pour le cas 0° , la rupture transverse est critique dans les barres verticales. Au contraire, la rupture par cisaillement peut être observée dans le cas 90° dans la barre supérieure droite presque horizontale. En outre, selon les orientations (0° et 90°), un arrondi est obtenu au coin rentrant. Au contraire, la solution à 135° présente plutôt une pente, où la concentration de contraintes est évitée en raison de la redirection des chemins d'effort axialement dans la barre.

En examinant les solutions pour un critère de rupture donné (par exemple Tsai-Wu), on obtient différents volumes finaux pour les différentes orientations. La solution la plus légère est celle pour laquelle les fibres rectilignes sont orientées à 90° de l'axe horizontal. En effet, les zones les plus chargées se situent dans les barres verticales. De plus, avec l'orientation UD à 90° , la fibre et les admissibles en rupture les plus forts sont alignés avec cette charge. Inversement, les solutions obtenues avec l'orientation à 0° sont les plus lourdes car les valeurs admissibles transverses sont les plus faibles dans les barres verticales.

3.2 Topologie et fibres courbes

Pour évaluer l'effet de la contrainte de rupture sur l'optimisation topologique dans le cas de fibres courbes, le cas traditionnel de la minimisation du volume avec seulement une contrainte

de compliance ($C_0 = 5500$ mJ) est donné dans la Figure 3. Cela montre l'angle droit obtenu au coin rentrant, qui rigidifie la solution au maximum. Cependant, à cet angle droit et dans les barres en compression, le critère de rupture de Tsai-Wu n'est pas satisfait.

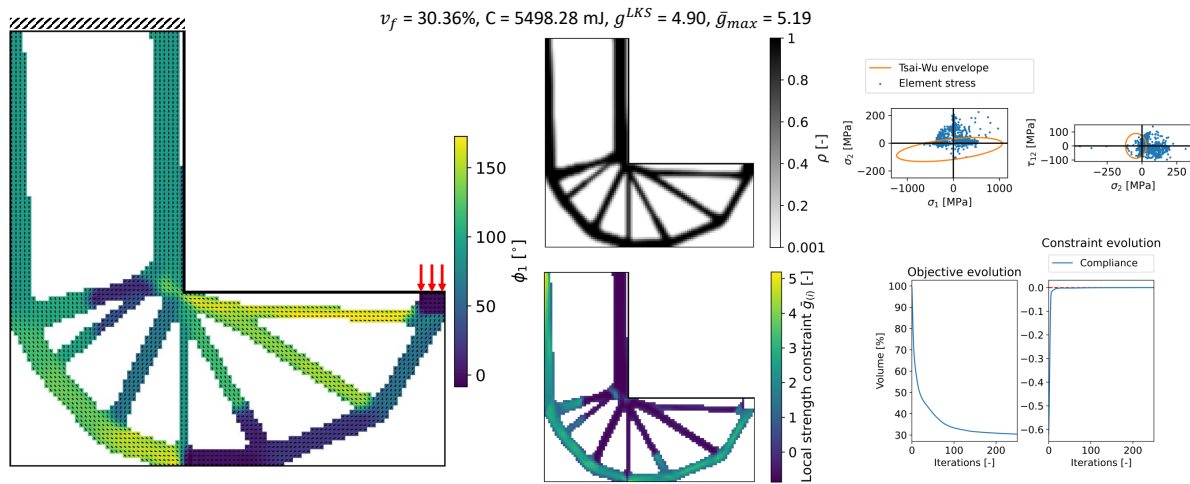


FIGURE 3 – Solution pour la minimisation du volume avec une contrainte de compliance ($C \leq 5500$ mJ) pour l'optimisation de la topologie et de l'orientation locale du matériau composite orthotrope. Informations affichées pour des éléments optimisés avec une densité finale $\rho \geq 0,3$.

On ajoute ensuite à l'optimisation la contrainte de résistance, conformément au problème en (1). Cela permet d'évaluer l'influence et la bonne prise en compte du critère dans le processus. La solution de cette optimisation est montrée dans la Figure 4.

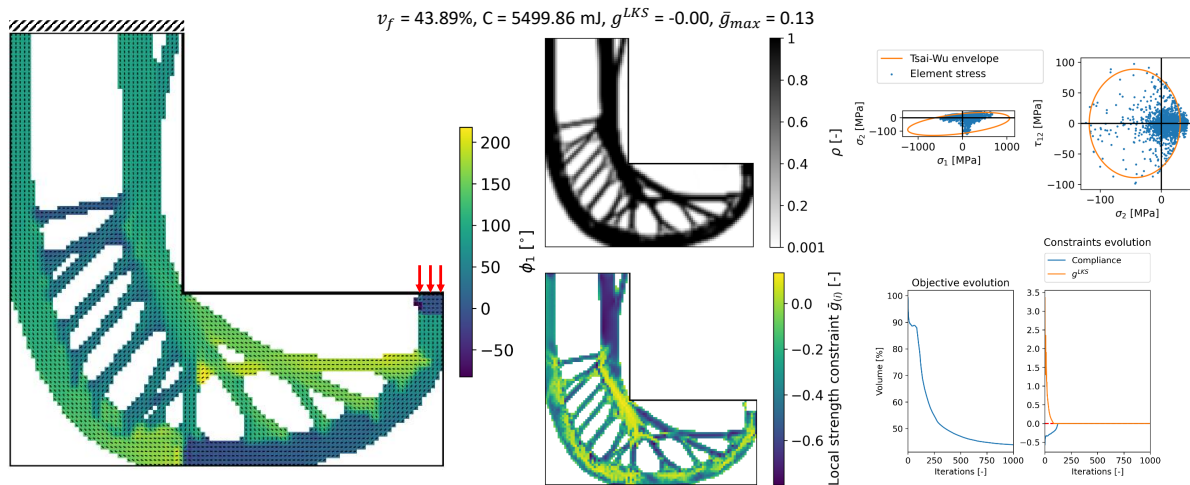


FIGURE 4 – Solution pour la minimisation du volume avec une contrainte de rupture Tsai-Wu et de compliance ($C \leq 5500$ mJ) pour l'optimisation de la topologie et de l'orientation locale du matériau composite orthotrope. Informations affichées pour des éléments optimisés avec une densité finale $\rho \geq 0,3$.

Tout comme la solution avec seulement la compliance, la première partie de l'optimisation consiste à aligner les orientations avec les chemins d'effort par minimiser la compliance par rapport à la variable d'anisotropie, selon [13]. Cette stratégie d'initialisation a également effet de fournir un point de départ logique en alignant les orientations avec le chemin d'effort local. En détaillant l'évolution des contraintes d'optimisation, on constate que pour les premières itérations, la contrainte de rupture n'est pas satisfaite. L'optimisation tente donc d'abord de satisfaire la contrainte de rupture tout en améliorant à peine l'objectif. Une fois les contraintes

d'optimisation satisfaites, l'optimisation se concentre à nouveau sur la minimisation de l'objectif. Néanmoins, il y a quelques violations de la contrainte de rupture au cours du processus d'optimisation. Cela correspond à des oscillations de l'objectif. Ce n'est cependant pas un problème pour la stratégie basée sur le gradient, qui peut revenir de ces points infaisables vers le domaine faisable et poursuivre ensuite l'optimisation.

En inspectant la solution optimisée, la topologie présente deux sections chargées, formant une sorte d'arc à l'intérieur et à l'extérieur, avec des barres plus petites entre elles. L'angle droit au coin rentrant a disparu, et les barres en compression extérieures sont devenues plus massives, pour satisfaire le critère de rupture. Concernant l'anisotropie, les orientations finales suivent bien la topologie, même aux jonctions.

La distribution des contraintes mécaniques est principalement contenue dans l'enveloppe de Tsai-Wu dans le plan de référence du matériau $\sigma_1 - \sigma_2$ et $\sigma_2 - \tau_{12}$. Certains états de contrainte sont au-delà de l'enveloppe, ce qui correspond à des éléments dont la contrainte d'optimisation locale $\bar{g}_{(i)}$ est supérieure à 0. On peut affirmer que ce problème d'optimisation est donc piloté par la contrainte de rupture, puisque la plupart des barres de la solution sont encore fortement sollicitées. Ceci montre la bonne prise en compte du critère de rupture anisotrope dans l'optimisation topologique par le biais de la méthode proposée. De plus, la barre verticale de droite est plus épaisse, afin de promouvoir la rigidité pour la contrainte de compliance. En conséquent, cette barre se trouve plus loin d'un chargement à rupture.

Finalement, en regardant la valeur finale de l'objectif, une fraction volumique plus élevée est obtenue en ajoutant la contrainte de rupture dans le cas de l'optimisation en Figure 4 par rapport à la solution en Figure 3. Cela est dû au fait que les barres en compression sont devenues plus massives pour résister, tout comme d'autres barres en tension qui sont plus massives pour satisfaire le critère de rigidité.

4 Conclusion

Une méthode est proposée pour prendre en compte la rupture dans l'optimisation de la topologie et de l'orientation locale du matériau. La méthode est ainsi applicable à l'optimisation de matériaux composites à fibres courbes. En se basant sur des méthodes numériques développées pour la prise en compte de la rupture pour un matériau isotrope, celles-ci sont étendues à un critère de rupture anisotrope quadratique. Les admissibles du critère de rupture sont exprimé dans le repère global par le biais du formalisme polaire, afin d'évaluer le critère de rupture avec les contraintes mécaniques obtenu par Elements Finis (EF). Pour obtenir un nombre limité de contraintes d'optimisation et éviter des problèmes de singularité, les valeurs locales du critère de rupture sont agrégées par valeur inférieure pour obtenir la contrainte d'optimisation. Ceci permet en même temps d'utiliser la méthode adjointe pour calculer efficacement les gradients.

La méthode est illustrée sur différents cas d'optimisation, montrant la bonne prise en compte de la contrainte de la rupture dans l'optimisation. De plus, par rapport au cas d'optimisation avec la rigidité seule où la rupture est critique, la prise en compte de la rupture résulte en des distributions de densité fort différentes. Néanmoins, l'orientation des fibres restent cohérentes avec la topologie obtenues.

Remerciements

Les auteurs remercient Airbus Atlantic pour le financement de ces travaux, et en particulier Attilio Chiappini pour les discussions techniques.

Références

- [1] M. Bendsøe, O. Sigmund. *Topology Optimization*, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [2] O. Sigmund, K. Maute. *Topology optimization approaches*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 1031-1055, 2013.
- [3] C. Le, J. Norato, T. Bruns, C. Ha, D. Tortorelli. *Stress-based topology optimization for continua*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 605-620, 2010.
- [4] G. A. da Silva, N. Aage, A. T. Beck, O. Sigmund. *Local versus global stress constraint strategies in topology optimization : A comparative study*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 6003-6036, 2021.
- [5] G. D. Cheng, X. Guo. *Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization*, Structural Optimization, Springer, 258-266, 1997.
- [6] M. Bruggi. *On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 125-141, 2008.
- [7] E. Holmberg, B. Torstenfelt, A. Klarbring. *Stress constrained topology optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 33-47, 2013.
- [8] A. Verbart, M. Langelaar, F. van Keulen. *A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 663-679, 2017.
- [9] D. Peeters, D. van Baalen, M. Abdallah. *Combining topology and lamination parameter optimisation*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 105-120, 2015.
- [10] E. Lund. *Discrete Material and Thickness Optimization of laminated composite structures including failure criteria*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer, 2357-2375, 2018.
- [11] A. Mirzendehtdel, B. Rankouhi, K. Suresh. *Strength-based topology optimization for anisotropic parts*, Additive Manufacturing, Elsevier, 104-113, 2018.
- [12] G. Ma, W. Yang, and L. Wang. *Strength-constrained simultaneous optimization of topology and fiber orientation of fiber-reinforced composite structures for additive manufacturing*, Advances in Structural Engineering, Sage, 1636-1651, 2022.
- [13] L. Vertonghen, F.-X. Irisarri, D. Bettebghor, B. Desmorat. *Gradient-based concurrent topology and anisotropy optimization for mechanical structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 116069, 2023.
- [14] G. Verchery. *Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité*, Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes, Springer, 93-104, 1982.
- [15] A. Catapano, B. Desmorat, P. Vannucci. *Invariant formulation of phenomenological failure criteria for orthotropic sheets and optimisation of their strength*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Wiley, 1842-1858, 2012.