

Méthodologie de calcul des lois de survie à partir de tests de fatigue

D. Collot¹, V. Laurent^{1,2}, J. Said³, M. Guéguin¹

¹ Eurobios Mews Labs, 191 avenue Aristide Briand, Cachan, {dorian.collot, vincent.laurent, maxime.gueguin}@eurobios.com

² Centre Borelli, ENS Paris-Saclay, Université Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette

³ RTE, Réseau de Transport et d'Electricité, 7C Place du Dôme, Paris La Défense

Résumé — Dans ce papier, nous explorons une méthodologie permettant d'établir des trajectoires de vieillissement à partir d'essai de fatigue. Notre approche s'appuie sur des chaînes de Markov et permet de proposer une méthode pour calculer des lois de survie pour un historique de contraintes quelconques à partir d'essai de fatigue et des courbes de Wöhler.

Mots clés — Fatigue, Loi de cumul, Courbe de Wöhler, Chaîne de Markov.

1 Introduction

La courbe de Wöhler, également connue sous le nom de courbe $S-N$ est un outil usuel pour représenter les résultats d'essais de fatigue. Elle trouve une application fréquente dans l'industrie par les ingénieurs pour évaluer le niveau de détérioration causé par la fatigue des matériaux ; elle permet notamment de déterminer les limites d'endurance des matériaux pour ensuite être prise en compte lors de la conception des pièces. L'emploi d'une courbe de Wöhler et l'usage d'une loi de sommation des endommagements élémentaires sont fondamentaux pour établir un critère de fatigue et des estimations de la durée de vie sous chargements variables. Pourtant, les données issues de la courbe de Wöhler donnent des durées avant rupture qui, bien qu'établies dans des conditions particulières de laboratoire, portent une information sur la cinétique de vieillissement. C'est cette cinétique que l'on cherche à capter ici en proposant une approche statistique couplant évaluation de la courbe de Wöhler et loi de cumul, typiquement la loi classique de Miner. Sur l'estimation de cette courbe de Wöhler, une revue de littérature [1] met en évidence de nombreuses approches statistiques possibles, permettant d'obtenir la loi à partir de quelques points de mesure. Si ces méthodes sont efficaces pour comprendre ce qu'il se passe dans le régime CAFL (*Constant Amplitude Fatigue Loading*), elles ne permettent cependant pas d'extrapoler pour des "historiques de contraintes" quelconques, c'est à dire pour manipuler des lois de sommation. C'est ce qu'on se propose de faire ici, en utilisant des chaînes de Markov.

Aussi, l'apport de la méthodologie que nous proposons vise à établir une règle de cumul, ainsi qu'à interpréter la règle de Miner à l'aune des propriétés statistiques qui découlent de l'estimation de la courbe de Wöhler. Il s'agit ici d'extrapoler la courbe à des "historiques de contraintes" réels souvent décrits par des variables aléatoires. Dans [2] les auteurs proposent des interprétations statistiques de la loi de Miner en se basant sur des hypothèses qui peuvent être relâchées. D'autres travaux formulent l'hypothèse de rang égaux (*Strength-Life Equal Rank Assumption*) pour des matériaux composites [3, 4] qui stipule que le taux de diminution de la résistance résiduelle au fil du temps est inversement lié à la résistance résiduelle élevée à un exposant spécifique. Au regard de ces différentes études, nos propres hypothèses semblent moins fortes. En effet, la démarche proposée ne fait aucune supposition quant à la forme de la courbe de Wöhler mais permet tout de même de cumuler les effets des contraintes directement à partir de données d'essais.

2 Définition des hypothèses et modèle de fatigue

2.1 Notations

Dans ce qui suit, on adopte les notations suivantes. N est le nombre (aléatoire) de cycles à rupture, N_r le nombre de cycle donné par la loi de Miner, S représente l'amplitude de contrainte et on note $s(n) = \mathbb{P}(N > n)$ la loi de survie d'un matériau que l'on cherche à déterminer.

2.2 Présentation des données

Les essais de fatigue sont généralement réalisés en laboratoire pour des conditions de chargement cycliques avec une amplitude constante. Pour un système (ou un matériau) donné, les essais de fatigue sont effectués pour différentes amplitudes et le nombre de cycles avant rupture est recueilli, signant l'arrêt du test. Dans la pratique, certains essais sont arrêtés avant la rupture menant à des essais dits "censurés". Ces cas sont notamment rencontrés lorsque l'amplitude de contrainte est proche de la limite d'endurance du système. L'intensité de la contrainte est ici décrite par la variable sigma. Cette variable est calculée à partir de la force appliquée mais aussi de la nature et de la géométrie du matériau.

2.3 Hypothèses courantes dans la littérature

Dans le cadre des travaux de fatigue traditionnels, parmi les nombreuses hypothèses quant à la forme de la courbe de Wöhler ou aux règles de cumul, on trouve régulièrement les postulats les suivants :

- H1. Le nombre de cycles à rupture N pour une valeur de contrainte fixée suit une loi avec un paramètres d'échelles (Weibull [5, 6, 7], log-normale [8], Gumbel [9, 10]).
- H2. La moyenne de cette loi ("tendance en contrainte") est inversement proportionnelle à l'intensité de la contrainte. Cette hypothèse peut être complétée avec la forme de cette relation (Basquin [11] pour des hypothèses élastiques, Coffin-Manson [12, 13] pour la prise en compte de la composante plastique).
- H3. Le nombre moyen de cycles avant rupture N_r pour un historique de contraintes quelconque est données par la règle de Miner[2, 14]. En connaissant N_i , le nombre moyen de cycles à rupture pour chaque contrainte i de l'historique, cette règle suppose qu'à chaque cycle une quantité $\frac{1}{N_i}$ d'endommagement est ajouté. Le nombre de cycles à rupture N_r est alors obtenu lorsque $D = 1$.

$$N_r = \inf \left\{ n : D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{N_i} \geq 1 \right\}$$

Cette règle suppose donc une indépendance des endommagements, elle est équivalente à prendre N_r comme la moyenne harmonique des N_i .

2.4 Modélisation du processus de fatigue

Une modélisation naturelle d'un système dont l'état structurel évolue est celui de la chaîne de Markov. Dans cette modélisation, le système possède $M + 1$ états, un état initial 0 "neuf", un état final M "rupture", et $M - 1$ états intermédiaires. Ces états représentent l'accumulation de dommage dans le système mais ne correspondent pas nécessairement à des états physiques mesurables. Le système subit n_i cycles d'intensité S_i . On suppose que la probabilité de passer de l'état J à l'état $J + 1$ au cours d'un cycle i , notée p_i .

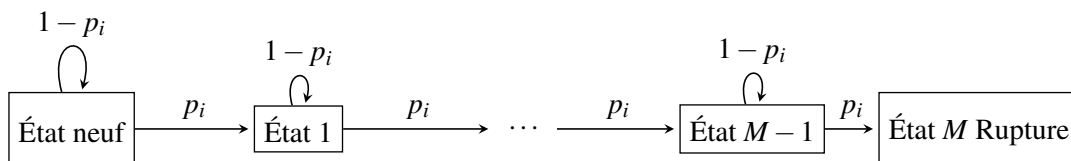


FIGURE 1 – Schéma du processus ponctuel

Nos travaux s'appuient sur les hypothèses suivantes :

- A1. A chaque cycle le matériau a un probabilité de recevoir un dommage. Cette probabilité est proportionnelle à l'intensité de la contrainte. Elle peut néanmoins dépendre d'autre facteur dans le cas général.
 - A2. Un matériau peut accumuler un certain nombre de dommages M avant de rompre.
- Ces hypothèses ne font aucune supposition sur la forme de la loi, contrairement aux hypothèses classiques. De plus elles sont identiques quelque soit l'historique de contraintes. Afin de simplifier les calculs et les estimations des paramètres, deux hypothèses seront ajoutées ici.
- A3. Le nombre de dommage M ne dépend que de la nature du matériau.
 - A4. La probabilité p de recevoir un dommage dépend de l'intensité de la contrainte et de la nature du matériau. En particulier elle ne dépend pas de l'âge, afin de se placer dans un cas markovien.

2.5 Courbe de Wöhler

Dans le cas homogène où l'amplitude de contrainte S_I est la même pour chaque cycle, la loi du nombre de cycles à rupture devient alors une loi Binomiale Négative de paramètres M et p_I . Les paramètres peuvent alors être estimés pour chaque intensité testée expérimentalement. M peut être déterminé grâce au maximum de vraisemblance, on déduit alors p_I grâce à la formule suivante :

$$\frac{1}{p_I} = \frac{N_I + M}{M} \quad (1)$$

où N_I est la moyenne empirique du nombre de cycles à rupture pour l'amplitude de contrainte S_I .

3 Calcul des lois de survie

3.1 Méthodologie d'estimation des paramètres

Nous allons présenter ici la démarche en l'appliquant sur le jeu de données d'essais de fatigue en traction uniaxiale sur des aluminiums [15] et à un historique de contrainte test. Les étapes sont les suivantes :

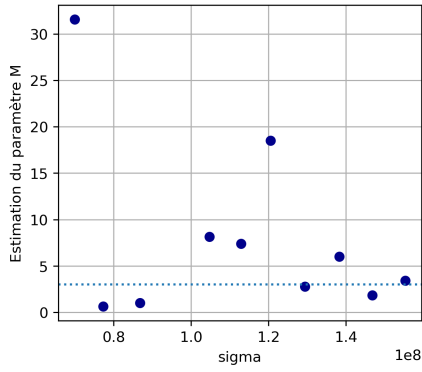
1. Estimation du paramètre M . M sera ici estimé pour chaque intensité testée dans l'essai afin de tester l'hypothèse A3.
2. Estimation du paramètre p_I pour chaque intensité testée dans l'essai.
3. Calcul de la loi de survie pour un historique de contraintes quelconque.

Il existe un certain nombre de méthodes pour estimer les paramètres d'une loi Binomiale Négative notamment en utilisant des algorithmes espérance-maximisation [16] [17]). Si M est connu, on peut cependant facilement déduire p_I grâce à l'équation 1.

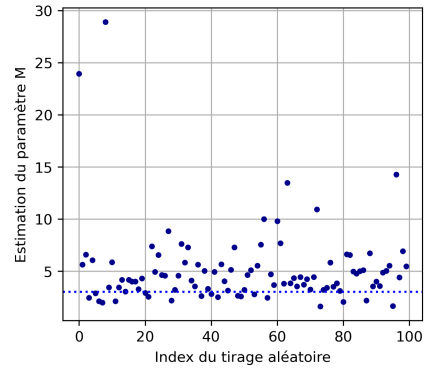
Le nombre d'états M varie entre chaque intensité, mais sans tendance claire (Fig. 2a). Le nombre de répétitions étant faible, il est attendu d'avoir une variance dans l'estimation de ce paramètre. On peut observer cette incertitude dans les estimations du paramètre sur la figure 2b qui montre les estimations de M obtenue pour 100 échantillons différents d'une loi Binomiale Négative connue. L'hypothèse A3 Ne semble donc pas contredite par les données. Dans notre cas, M est la moyenne des différentes estimations et vaut donc 3.

On peut alors estimer les paramètres p_i , la probabilité de passer d'un état au suivant, pour chaque intensité. On peut remarque que le paramètre p_i augmente avec l'intensité, ce qui est attendue par l'hypothèse A4. La forme de cette fonction est cohérente avec les fonctions usuelles pour la "tendance en contrainte", notamment la fonction de Basquin. On peut également noter que forcer la valeur de M (Fig.3b) modifie peu les estimations de p_i (Fig.3a).

Les valeurs de ces paramètres permettent d'obtenir la loi de survie du matériau pour différents historiques de contraintes. Deux cas sont présentés sur la figure 4. Le premier cas correspond à une contrainte

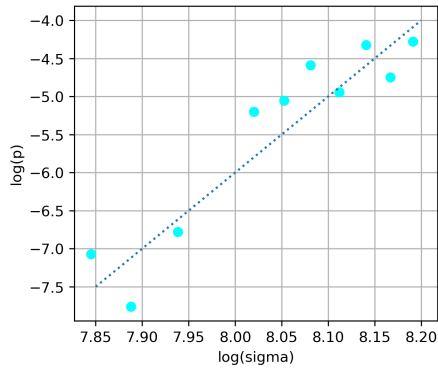


(a) Estimations de M à partir des données pour différentes valeurs de σ

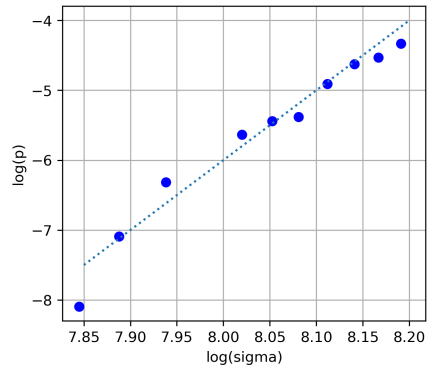


(b) Estimations de M pour 100 échantillons de 10 points pour une loi de paramètres ($M = 3, p = 10^{-5}$)

FIGURE 2 – Estimation du paramètre M .



(a) Estimations sans contraintes



(b) Estimation avec la contrainte $M=3$

FIGURE 3 – Estimation du paramètre p_i . La courbe pointillée représente la tendance attendue d'après le modèle de Basquin.

constante. On retrouve alors une courbe proche de celles classiquement utilisées dans l'estimation des courbes de Wöhler (Fig. 4a). Cette loi est de plus cohérente avec les points expérimentaux.

Le second cas correspond à une contraintes qui varie au cours du temps. On suppose ici une contrainte constante par morceau dont les variations sont représentées sur la figure 4d. On obtient alors la loi de survie associées (Figure 4b).

3.2 Estimation de M et p selon le nombre de données disponibles

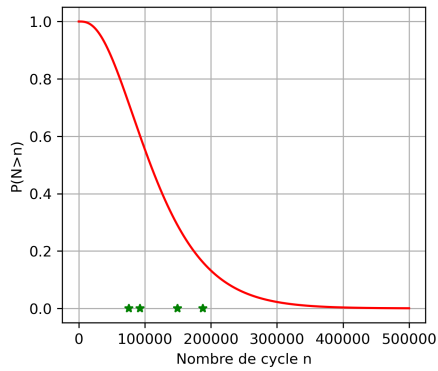
L'estimation des paramètres M et p nécessite un nombre important de points et de répétition pour chaque valeur d'amplitude de contrainte. On peut néanmoins simplifier les estimations en ajoutant des hypothèses sur les paramètres, dans les cas où le nombre de valeurs de contraintes testé est faible ou si le nombre de répétitions par contrainte est faible. La figure 5a illustre les estimations en ajoutant plus ou moins d'hypothèses selon le type de données.

Dans les données issues de [15] (en vert), le nombre de données est suffisant pour estimer les paramètres pour chaque valeur de contrainte.

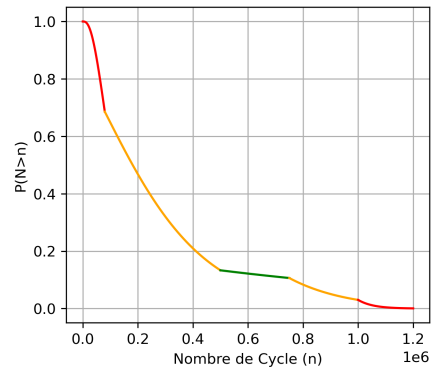
Dans les données issues de [18], le nombre de valeurs de contraintes testées est trop faible pour estimer M correctement. On va donc supposer $M=3$, mais ne pas poser d'hypothèse sur les p_i .

Dans les données issues de [19], certaines contraintes n'ont été testées qu'une seule fois. Il est donc nécessaire d'imposer une forme pour la tendance des p_i . On suppose ici une relation log-log (Basquin [11]). On impose également $M=3$.

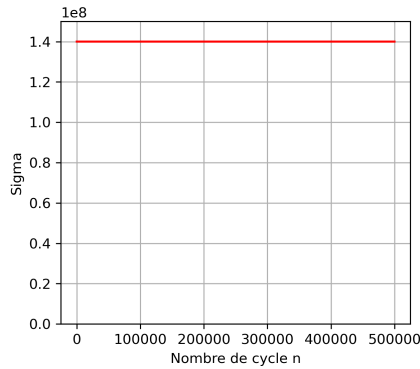
Les estimations sont bonnes pour chaque essais. On peut néanmoins remarque que bien que les conducteurs soit identiques et que le sigma permette, en théorie, de comparer les essais, les comportements observés sont différents. En imposant les mêmes hypothèses pour tout les essais ($M=3$ et relation



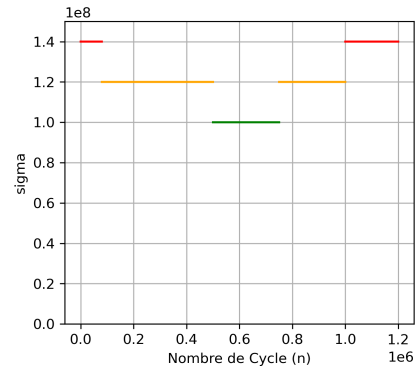
(a) Loi de survie avec sigma constant



(b) Loi de survie avec un sigma variable



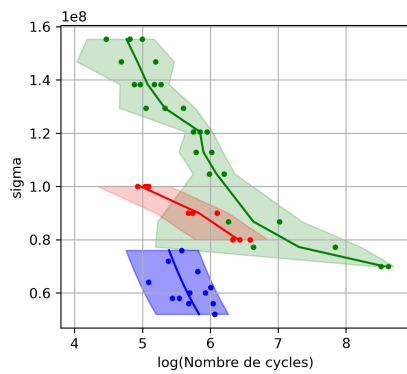
(c) Sigma constant



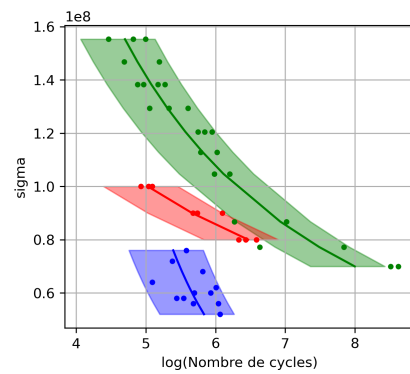
(d) Sigma variable

FIGURE 4 – Les étoiles vertes indiquent les valeurs de ruptures mesurées pour cette contrainte. Les couleurs correspondent aux différents niveaux de contraintes. c et d indiquent les valeurs de sigma au cours du temps dans les cas a et b respectivement

de Basquin) (Fig 5b), les estimations sont toujours bonnes. Les hypothèses permettent également d'extrapoler la courbe. Il semble également que $M=3$ correspondent à chaque essai, ce qui confirme notre hypothèse que ce paramètre dépend principalement de la nature du matériau.



(a) Niveau d'hypothèse minimale selon le jeu de données



(b) Niveau d'hypothèse maximale pour tous les jeux de données

FIGURE 5 – Estimations à partir courbes de Wöhler avec différents niveau de contraintes. La zones colorées indique l'intervalle de prédictions à 95% pour chaque essais. Les données issues de [15] sont en vert, les données issues de [18] en rouge et celles issues de [20] en bleu.

4 Discussion

L'approche développée ici permet de faire le lien entre les courbes de Wöhler obtenus lors d'essais de fatigues et la loi de survie d'un matériau dans le cas d'un historique de contraintes quelconques. Ces lois de survie sont notamment utiles pour de la gestion de risques. Pour une application concrète, dans le cadre de la gestion d'actif par exemple, les contraintes sur le matériau peuvent être modélisées par des variables aléatoires de distribution connue (distribution de vent, de température etc.) et liées aux efforts grâce à des modèles physiques de sollicitation/interaction, donnant ainsi une distribution des efforts permettant de reconstituer un historique de sollicitations. Cet historique est ensuite à exploiter dans le modèle markovien présenté en section 2 pour en déduire la fonction de survie, dans son contexte réel, c'est à dire spécifique au vécu du matériau étudié.

A la différence des autres approches pour décrire les courbes de Wöhler, la forme de la loi de survie est une conséquence du modèle. Il est possible de passer à des lois continues qui sont alors des lois Gamma. Ces lois ont un paramètre d'échelles, ce qui permet d'utiliser les résultats des développements théoriques obtenus dans la littérature (e.g. [21, 22]).

Les paramètres M et p décrivent la forme de la loi de survie. En choisissant de fixer M et de faire varier p avec l'intensité, la tendance est alors principalement décrite par le paramètre p . Le paramètre M va quant à lui déterminer principalement la variance et l'asymétrie de la loi de survie. Le paramètre M représente ici un "nombre d'état" par lequel passe le matériau avant la rupture. Bien qu'il soit possible de relier ces états à des états physiques, cette interprétation n'est pas nécessairement pertinente, surtout si ces états ne sont pas mesurables. Nous limiterons donc l'interprétation de M à un paramètre de forme.

Références

- [1] Cunhai Li, Shengchuan Wu, Jinyuan Zhang, Liyang Xie, and Yanhui Zhang. Determination of the fatigue psn curves—a critical review and improved backward statistical inference method. *International Journal of Fatigue*, 139 :105789, 2020.
- [2] Toshiyuki Shimokawa and Sakae Tanaka. A statistical consideration of miner's rule. *International Journal of Fatigue*, 2(4) :165–170, 1980.
- [3] HT Hahn and RY Kim. Proof testing of composite materials. *Journal of Composite Materials*, 9(3) :297–311, 1975.
- [4] PM Barnard, RJ Butler, and PT Curtis. The strength-life equal rank assumption and its application to the fatigue life prediction of composite materials. *International Journal of Fatigue*, 10(3) :171–177, 1988.
- [5] Chengming Lan, Nani Bai, Haitao Yang, Caiping Liu, Hui Li, and BF Spencer Jr. Weibull modeling of the fatigue life for steel rebar considering corrosion effects. *International Journal of Fatigue*, 111 :134–143, 2018.
- [6] Raif Sakin and Irfan Ay. Statistical analysis of bending fatigue life data using weibull distribution in glass-fiber reinforced polyester composites. *Materials & Design*, 29(6) :1170–1181, 2008.
- [7] Tibor Tallian. Weibull distribution of rolling contact fatigue life and deviations therefrom. *ASLE transactions*, 5(1) :183–196, 1962.
- [8] PC Gope. Determination of sample size for estimation of fatigue life by using weibull or log-normal distribution. *International journal of fatigue*, 21(8) :745–752, 1999.
- [9] Murat Tiryakioğlu. Statistical distributions for the size of fatigue-initiating defects in al-7% si-0.3% mg alloy castings : A comparative study. *Materials Science and Engineering : A*, 497(1-2) :119–125, 2008.
- [10] KV Anderson and SR Daniewicz. Statistical analysis of the influence of defects on fatigue life using a gumbel distribution. *International Journal of Fatigue*, 112 :78–83, 2018.
- [11] O.H. Basquin. The exponential law of endurance tests. In *Proc Am Soc Test Mater*, volume 10, pages 625–630, 1910.
- [12] L Fo Coffin Jr. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Transactions of the American Society of Mechanical engineers*, 76(6) :931–949, 1954.
- [13] Samuel S Manson. *Behavior of materials under conditions of thermal stress*, volume 2933. National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.
- [14] Sa'd Hamasha, Younis Jaradat, Awni Qasaimeh, Mazin Obaidat, and Peter Borgesen. Assessment of solder joint fatigue life under realistic service conditions. *Journal of electronic materials*, 43 :4472–4484, 2014.

- [15] John Gilbert Kaufman. *Properties of aluminum alloys : fatigue data and the effects of temperature, product form, and processing*. ASM International, 2008.
- [16] Huang Chunmao, Liu Xingwang, Yao Tianyuan, and Wang Xiaoqiang. An efficient em algorithm for the mixture of negative binomial models. *The Second International Conference on Physics, Mathematics and Statistics*, 1324, 2019.
- [17] Konstantinos Adamidis. Theory & methods : An em algorithm for estimating negative binomial parameters. *Australian & New Zealand journal of statistics*, 41(2) :213–221, 1999.
- [18] PHC Rocha, JIM Díaz, CRM Silva, JA Araújo, and FC Castro. Fatigue of two contacting wires of the acsr ibis 397.5 mcm conductor : Experiments and life prediction. *International Journal of Fatigue*, 127 :25–35, 2019.
- [19] Julien Said, Siegfried Fouvry, Georges Cailletaud, Stéphanie Basseville, Marc Coulangeon, Jérôme Brocard, Christine Yang, and Fikri Hafid. A global-local approach to predict the fretting-fatigue failure of clamped aluminum powerline conductors : from mono-contact crossed wires to full conductor vibrational tests. *Engineering Failure Analysis*, page 107073, 2023.
- [20] Julien Said. *Etude expérimentale et modélisation de la durée de vie en fretting-fatigue des conducteurs aériens pour le transport d'énergie*. PhD thesis, Université de Lyon, 2020.
- [21] A Fernández-Canteli, S Blasón, JAFO Correia, and AMP De Jesus. A probabilistic interpretation of the miner number for fatigue life prediction. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 8(30) :327–339, 2014.
- [22] Francois-Baptiste Cartiaux, Alain Ehrlacher, Frédéric Legoll, Alex Libal, and Julien Reygner. Probabilistic formulation of miner's rule and application to structural fatigue. *arXiv preprint arXiv :2303.14504*, 2023.

Annexe : Lien avec la loi de Miner

Lorsque $M = 1$, il n'y a pas d'accumulation de fatigue et le matériau passe directement de l'état "neuf" à l'état "rupture". Dans ce cas, la loi de survie devient :

$$\mathbb{P}(N < n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (2)$$

En prenant le logarithme de l'équation (2) puis un développement limité, on trouve :

$$\begin{aligned} \log(1 - \mathbb{P}(N < n)) &= \log \prod_{i=1}^n (1 - p_i) = \sum_{i=1}^n \log(1 - p_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n p_i + O\left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right) \end{aligned}$$

Le logarithme de la loi de survie est donc proportionnel à la somme des probabilités de rupture. En notant N_i le nombre de moyen de cycle avant rupture pour la contrainte i , et en prenant $p_i = \frac{1}{N_i}$, la somme des probabilités est alors égale à l'endommagement D de la loi de Miner. Le nombre de cycles avant rupture N_r calculé par la loi de Miner intervient lorsque $D = 1$. On obtient alors

$$\log(1 - \mathbb{P}(N < N_r)) = -1 + O\left(\sum_{i=1}^{N_r} p_i^2\right)$$

et

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathbb{P}(N < N_r) = 1 - \frac{1}{e}.$$

La valeur de N_r obtenue par la loi de Miner est donc équivalente au quantile à environ 63% de la loi de survie $s(n)$. En changeant la valeur de D , il est possible de prendre n'importe quel autre quantile, mais il faut alors vérifier la pertinence de la loi de N . Or, dans le cas homogène, l'équation 2 devient :

$$\mathbb{P}(N < n) = 1 - (1 - p)^n,$$

ce qui implique que N suit alors une loi géométrique de paramètre p . Or la loi géométrique possède un mode en 0, la probabilité de rupture au premier cycle majore toutes les autres, ce qui ne correspond ni aux

données observées ni aux phénomènes physiques connus. Les différents quantiles de cette loi, obtenus pour différentes valeurs de D ne sont donc pas pertinentes.

Dans le cas général on cherche à identifier la moyenne du nombre de cycle avant rupture ($\mathbb{E}(N)$), qui correspond au quantile à 63% lorsque N suit une loi exponentielle. Dans ce cas, N_r est proche de la moyenne empirique de N . Cependant, la loi exponentielle comme la log-normale ne correspond pas aux données observées, ce qui signifie qu'en dehors de ces valeurs on ne peut extrapoler la loi de vieillissement.