

# Modélisation par la méthode CA-FE de murs en acier 316L fabriqués par fusion laser lit de poudre

R. Engel<sup>1</sup>, D. Ayrault<sup>1</sup>, O. Fandeur<sup>2</sup>, F. Deschaux-Beaume<sup>3</sup>, C. Bordreuil<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Université Paris-Saclay, CEA, Service de recherche en matériaux et procédés avancés, 91191, Gif-sur-Yvette, France  
{raphael.engel@cea.fr, danielle.ayrault@cea.fr}

<sup>2</sup>Université Paris-Saclay, CEA, Service d'Études Mécaniques et Thermiques, 91191, Gif-sur-Yvette, France {olivier.fandeur@cea.fr}

<sup>3</sup>LMGC, Université de Montpellier, France {frederic.deschaux-beaume@umontpellier.fr, cyril.bordreuil@umontpellier.fr}

**Résumé** — Le procédé *Fusion Laser Lit de Poudre (L-PBF)* est une méthode de fabrication additive consistant à fabriquer un objet couche par couche en produisant la fusion, par un faisceau laser, puis la solidification des lits de poudre métallique successifs. Afin de prévoir les caractéristiques des structures granulaires formées lors de la fabrication par ce procédé de pièces en acier inoxydable 316L, une modélisation numérique basée sur la méthode *CA-FE (Cellular Automata – Finite Element)* a été développée et appliquée à des configurations 3D dans le cadre de la thèse de R. Engel. L'article présente la simulation de murs de cordons où sont pris en compte les effets des changements de paramètres procédé et de la poudre.

**Mots clefs** — Fabrication additive, fusion laser lit de poudre, solidification, acier 316L, poudre, simulation numérique, CA-FE

## 1. Introduction

Depuis plusieurs années, les technologies de fabrication additive constituent un axe de recherche préférentiel pour les industriels car elles permettent la conception de pièces métalliques complexes. Les technologies diffèrent par leur méthode d'apport de matière et leur source d'énergie, ce qui fait que chacune a une utilité particulière dépendant du besoin.

La méthode de Fusion Laser sur Lit de Poudre, communément désignée par l'acronyme anglais L-PBF signifiant Laser Powder-Bed Fusion, est un procédé de fabrication additive où des couches de poudre sont successivement empilées et fondues localement à l'aide d'un laser, pour former des pièces en un bloc. Cette technique utilise un faisceau laser très fin et des tailles de grains de poudre fines. Les pièces ainsi formées peuvent alors avoir des géométries très précises, mais sont généralement longues à fabriquer, rendant cette méthode plus adaptée pour la conception d'objets de petites dimensions.

L'objectif de cette étude est de simuler la structure des grains obtenus lors de la fabrication de murs en acier inoxydable 316L par ce procédé L-PBF. Parmi les différentes approches de simulation numérique de croissance de grain, c'est la méthode CA-FE (Cellular Automata – Finite Element) qui a été retenue par A. Baumard [1]. Cette méthode est basée sur une approche chaînée avec, dans un premier temps, la résolution des équations de la thermique par la méthode des Éléments Finis (EF), à l'aide du code Cast3M [2], puis des équations décrivant la solidification et la croissance des grains par la méthode des Automates Cellulaires (AC), via un programme autonome développé en langage Fortran Moderne.

Les murs sont constitués de la superposition de cordons fabriqués les uns sur les autres, chacun de ces cordons correspondant à une nouvelle couche de poudre. Afin de valider le programme CA-FE pour ce type de montage, différents paramètres du procédé ont été modifiés. Il s'agit principalement de la vitesse d'avancée du laser, de sa puissance, et des caractéristiques de la poudre utilisée. Le programme permet alors de simuler la formation des grains au cours de la solidification en fonction de ces paramètres. Les microstructures ainsi simulées ont été comparées à des microstructures réelles.

## 2. Description du procédé Fusion Laser sur Lit de Poudre

### 2.1. Principe du procédé L-PBF

La particularité du procédé L-PBF de fabrication additive est l'apport de matière qui se fait avant la phase de fabrication. Une machine L-PBF (figure 1) est constituée de trois blocs [3] : 1) la partie construction où l'on retrouve un piston motorisé selon l'axe  $\vec{z}$ , le substrat, la pièce en construction et la poudre utilisée, 2) la partie approvisionnement avec la poudre vierge, un piston motorisé selon l'axe  $\vec{z}$  et un racleur translatant la poudre vers la partie construction et 3) le bloc laser. Ce procédé présente ainsi la particularité de permettre la fabrication de pièces avec des parties non-connectées et des cavités, sans devoir créer beaucoup de liens supports provisoires.

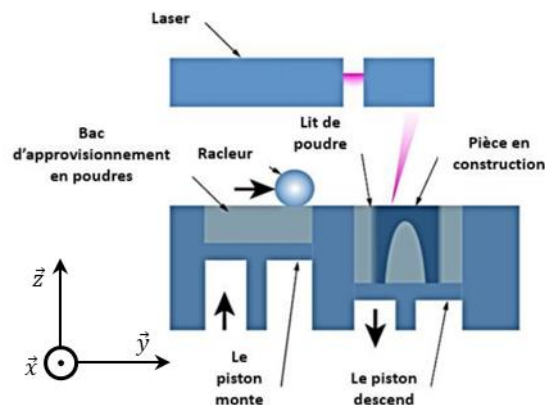


Figure 1 : Schéma de principe d'une machine L-PBF [3].

### 2.2. Paramètres énergétiques du procédé

Les paramètres de première importance sont ceux liés à la source laser. Ils interviennent dans l'équation de l'énergie volumique fournie au système. Dans notre cas, nous utilisons une expression de densité volumique d'énergie, dite *VED* [4], telle que :

$$VED = \frac{4P}{\pi v D^2} \quad (1)$$

Celle-ci dépend de 3 paramètres :  $P$  la puissance (W),  $v$  la vitesse du laser (m/s),  $S = \pi D^2/4$  (m<sup>2</sup>) la surface du spot laser et  $D$  son diamètre (m). L'influence de ce terme énergétique a été étudiée par A. Baumard [1]. Il est nécessaire de bien calibrer  $P$  et  $v$  pour obtenir des cordons stables et ne pas avoir de défauts. Ces deux paramètres influent au 1<sup>er</sup> ordre la taille du bain d'acier 316L fondu, qui est la première quantité que nous observerons expérimentalement et que nous comparerons au bain de fusion obtenu par la simulation.

D'autres paramètres importants sont les paramètres géométriques intervenant dans la fabrication de montages multicordons. Les deux premiers paramètres à prendre en compte sont la distance intercordon  $HD$  (pour « hatching distance ») et l'épaisseur de couche  $e_p$ . Ensuite, intervient la stratégie de lasage. Plusieurs choix sont alors possibles, en fonction de la position des cordons les uns par rapport aux autres, la direction de lasage, l'ordre de fabrication des cordons et l'angle entre les directions de lasage de deux couches successives.

### 2.3. Caractéristiques de la poudre utilisée

Les caractéristiques des poudres utilisées vont bien sûr influencer sur la microstructure formée après solidification. Deux poudres d'alliages très différents, comme le TA6V [5] et l'IN718 [6], formeront,

par exemple, des structures de grains différentes de celles obtenues avec le 316L, car, notamment, les propriétés thermiques et de diffusivité chimique de ces matériaux ne sont pas les mêmes.

Dans le cas de l'acier 316L, des compositions de poudres présentant de très légères différences peuvent aussi faire apparaître des types de croissance de grains différents. Ici, nous tenterons de modéliser la croissance des grains formés avec deux poudres différentes : une poudre dite Standard, car couramment utilisée pour le procédé L-PBF, et une poudre dite Particulière, en cours d'évaluation. Les résultats expérimentaux obtenus par A. Chniouel [7] serviront ici de référence pour valider nos simulations numériques.

La Figure 2 montre, pour ces deux poudres, les cartographies d'orientations de grains obtenues par A. Chniouel [7], représentées par rapport à l'axe  $Z$  (axe vertical de la figure 1), et les figures de pôles associées pour les directions cristallographiques  $\langle 110 \rangle$ .

La première poudre favorise la croissance de grains colonnaires, dirigés dans la direction de fabrication (axe  $z$ ), et des orientations cristallographiques préférentielles, telles que les directions  $\langle 100 \rangle$  et  $\langle 110 \rangle$  soient préférentiellement alignées avec l'axe vertical. On peut en effet voir sur la figure de pôle de la figure 2a un pic de forte densité présent au centre. Avec la seconde poudre, les grains sont de très petite taille et de morphologie equiaxe, et aucune texture particulière ne ressort des figures de pôle, il n'y a alors pas d'orientation préférentielle des grains. Pour cette seconde poudre, il y a germination de nouveaux grains dans la phase liquide, au voisinage immédiat de l'interface solide-liquide [8].

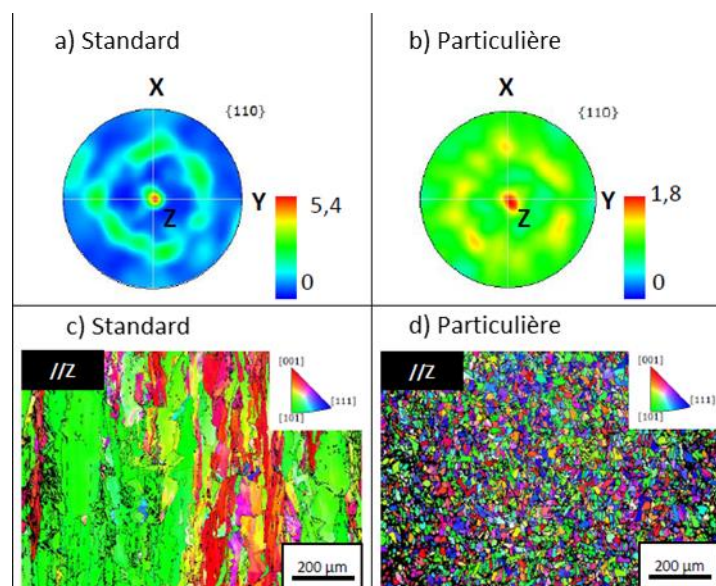


Figure 2 : Effet de la composition chimique de la poudre 316L sur la texture et la structure granulaire obtenue [7]. (a,c) poudre Standard. (b,d) poudre Particulière

### 3. Description synthétique de la Méthode CA-FE

#### 3.1. Modélisation Thermique (EF)

Il est nécessaire de résoudre d'abord les équations spatio-temporelles de la chaleur au cours du procédé afin de connaître la température en tout point et à tout instant. Une connaissance précise de celle-ci permet de visualiser et d'identifier les changements d'état de la matière.

Pour cela, nous nous servons de la loi de conservation de la chaleur (3) :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(q) + f \quad (3)$$

$$q = -k \text{ grad}(T) \quad (4)$$

Avec  $T$  la température (K),  $\rho$  la masse volumique ( $kg/m^3$ ),  $c_p$  la capacité thermique ( $J/kgK$ ),  $q$  le flux thermique ( $W/m^2$ ) et  $f$  le terme de source ( $W/m^3$ ). À l'instant initial, la température est fixée à 20 °C et la source est éteinte. L'équation (4) exprime la loi de Fourier qui relie le flux thermique au gradient de la température,  $k$  étant la conductivité thermique ( $W/mK$ ).

Dans la modélisation du procédé L-PBF, il faut prendre en compte les différentes conditions aux limites à l'interface substrat/gaz(air) et à l'interface poudre/gaz(air), qui sont modélisées par des conditions portant sur le flux thermique, selon l'expression :  $q_{imp} = h(T_{air} - T_{surf}) + \epsilon\sigma(T_{air}^4 - T_{surf}^4)$ . Le coefficient  $h$  est le coefficient convectif ( $W/m^2K$ ),  $\epsilon$  est l'émissivité, et  $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8} W/m^2K^4$  est la constante de Stefan-Boltzmann.

La source  $f$  est ici l'énergie fournie au système par le laser. Dans le cadre des présentes simulations, nous utilisons une source de chaleur de type Goldak [9], c'est-à-dire une double source ellipsoïdale à distribution gaussienne. Le terme de source volumique a la forme présentée sur la figure 4 et suit l'équation suivante :

$$q_{ij} = \frac{3\sqrt{3}Qf_{ij}}{ab_jc_i\pi\sqrt{\pi}} e^{-3\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{c_i^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b_j^2}\right)} \quad (5)$$

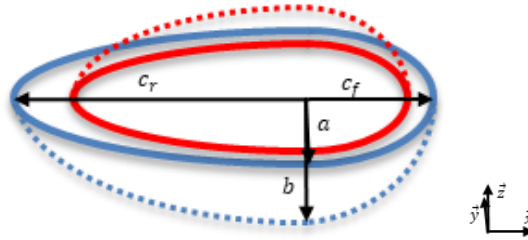


Figure 3 : Représentation des deux sources de type Goldak et leurs dimensions. En rouge, la source située dans la poudre et en bleu celle dans le substrat.

Avec  $i = f$  pour « front » si on considère l'ellipsoïde à l'avant de la source,  $i = r$  pour « rear » pour celle à l'arrière,  $j = u$  ou  $j = b$  pour « up » et « bottom » les parties supérieures et inférieures de la source. Le terme  $Q$  est l'énergie totale apportée par le laser telle que  $Q = \eta P$ , avec  $P$  la puissance laser et  $\eta$  le rendement. Ces paramètres sont à calibrer pour que le bain de fusion simulé soit de dimensions similaires à la réalité. Dans notre cas, les paramètres retenus correspondent à une source quasi-sphérique [1] afin que les bains obtenus soient cohérents avec ceux observés.

### 3.2. Croissance de grain

Pour simuler la croissance des grains, nous utilisons une modélisation par automates cellulaires (CA). Ceux-ci sont des objets mathématiques répartis dans l'espace où, à chaque cellule (CA) est attribué un état, des caractéristiques, ainsi qu'un voisinage. Des règles de transition sont définies pour décrire la physique du phénomène de croissance et ainsi décrire l'évolution de chaque cellule au cours du temps.

Dans notre cas, les cellules sont des cubes et à chaque cellule sont assignés un état de la matière, une température ainsi qu'une orientation cristalline discrète notée  $n_{gr}$  correspondant à un unique ensemble d'angles d'Euler ( $\varphi_1, \theta, \varphi_2$ ). Le 316L étant un matériau austénitique, il possède une structure cubique face centrée et suit une croissance dendritique au cours de la solidification, les bras primaires des

dendrites étant orientés suivant les directions cristallographiques de croissance préférentielle  $\langle 100 \rangle$ . Il est possible de représenter sa croissance comme le déplacement d'une enveloppe octaédrique régulière (figure 4). Alors, à chaque cellule  $v$ , nous associons également un rayon d'enveloppe  $R_v^t$  à l'instant  $t$  ainsi qu'un centre  $C_v^{en}$ . Au début du calcul le rayon est nul et le centre correspond à celui de la cellule.

Le programme CA calcule les incréments de rayon à chaque pas de temps tel que  $\delta R = v(\Delta T)\delta t$  :

- $\delta t$  est le pas de temps recalculé à chaque incrément et correspond au minimum avant la prochaine capture d'une cellule pour éviter les conflits entre cellules capturantes,
- $v(\Delta T)$  est la vitesse de croissance dendritique en fonction de la surfusion, la surfusion étant la différence entre la température de liquidus et la température de la cellule.

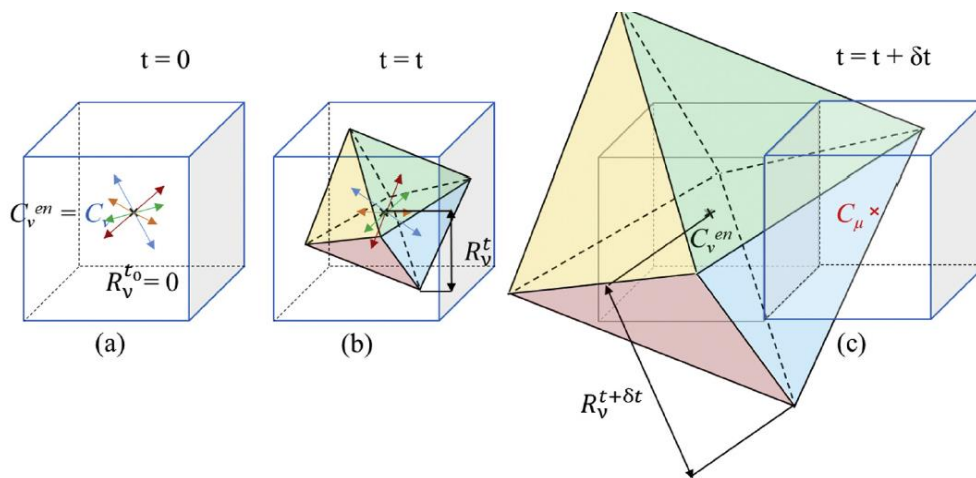


Figure 4 : Étapes de croissance et capture d'une cellule.

Dans le cas d'une solidification rapide, la surfusion s'exprime par la somme de deux termes :  $\Delta T = \Delta T_c + \Delta T_R$  [10]. Le premier terme est le terme de surfusion de composition qui apparait du fait d'une différence de composition en soluté entre le liquide en contact avec la pointe de dendrite solide et le reste du volume liquide. Le deuxième terme correspond à la surfusion de courbure de la dendrite. La vitesse de croissance des dendrites peut alors être identifiée à partir de la résolution d'un système d'équations [11] [12], et est ensuite approximée par une fonction puissance  $v = v_{max}(\Delta T/\Delta T_{max})^n$ . Dans le cas de l'acier 316L,  $\Delta T_{max} = 40,61 K$ ,  $v_{max} = 0,2752 m.s^{-1}$  avec  $\Delta T_{max}$  et  $v_{max}$  la surfusion et la vitesse de croissance maximales.

### 3.3. Germination

Dans le cas de la poudre Particulière de 316L, un phénomène de germination peut apparaitre, c'est-à-dire que de nouveaux germes solides se forment dans le liquide en surfusion. Le phénomène de germination pour cette poudre est particulier, car les études ont montré qu'il apparaissait au niveau l'interface entre le bain liquide et la surface solide des dendrites [8]. Une loi probabiliste est utilisée pour modéliser ce phénomène de germination. La densité surfacique de nouveaux germes souhaités par pas de temps est fournie en entrée du programme, et est estimée à  $10^{14}$  germes/m<sup>2</sup> dans le cas de la poudre Particulière.

Un certain nombre de cellules liquides en surfusion sont tirées aléatoirement en fonction de la densité de germes fixée. Ensuite, la cellule germe si elle est à l'interface liquide-solide et si sa surfusion est supérieure à la surfusion de germination,  $\Delta T_{germ}$  définie pour chaque cellule par une loi probabiliste [13], selon la formule suivante :

$$\Delta T_{germ} = \Delta T_{moy} + \sqrt{-2 \ln(a_1)} \cos(2\pi a_2) \Delta T_\sigma \quad (6)$$

avec  $a_1$  et  $a_2$  deux nombres aléatoires dans un intervalle  $[0; 1]$ ,  $\Delta T_{moy} = 10 K$  ici est la surfusion moyenne et  $\Delta T_\sigma = 1 K$  est la valeur d'écart-type

## 4. Présentation de quelques résultats

### 4.1. Résultats des simulations thermiques

Les simulations thermiques de la fabrication de murs constitués de 10 couches superposées, d'épaisseur de couche de  $50 \mu m$ , ont été réalisées dans un premier temps. Les simulations, avec un maillage régulier de la zone d'intérêt, constitué d'éléments finis de type hexaèdre régulier de  $20 \mu m$  de côté, ont permis de déterminer les paramètres de la source adaptés aux deux jeux de paramètres énergétiques sélectionnés, caractérisés par des valeurs de puissance  $P$  et de vitesse de déplacement du laser différentes :  $(150 W, 100 mm/s)$  et  $(400 W, 200 mm/s)$ . La Figure 5 montre les contours des bains de fusion obtenus, en coupe longitudinale, dans chacune des couches dans la zone où leur taille est stationnaire. La taille des bains atteint une longueur stabilisée au bout de la 5<sup>e</sup> (respectivement 7<sup>e</sup>) couche pour la première (respectivement la seconde) paramétrie. Comme l'énergie apportée au système est supérieure avec la deuxième paramétrie, la longueur et la profondeur des bains sont plus élevées dans ce cas, comme observé sur la figure 5.

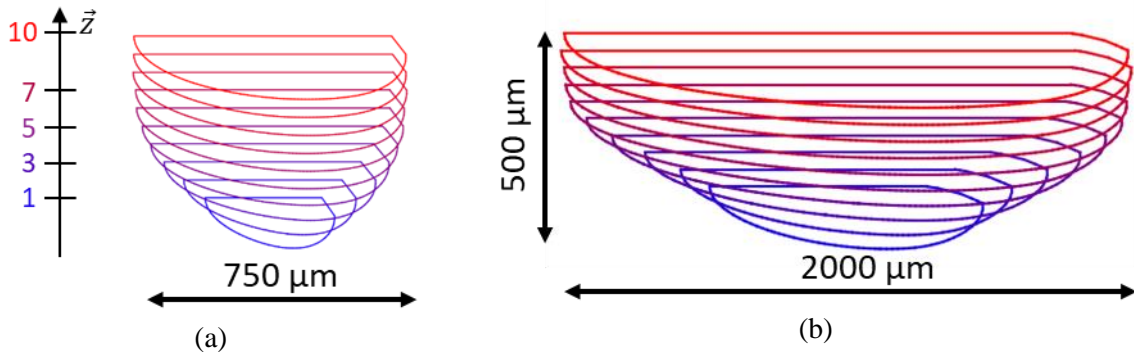


Figure 5 : contour, en coupe longitudinale dans le plan  $y,z$ , des bains de fusion formés avec les paramétries (a)  $(150 W, 100 mm/s)$  et (b)  $(400 W, 200 mm/s)$  en fonction du numéro/de l'altitude de la couche. L'épaisseur de poudre ajoutée à chaque couche est de  $50 \mu m$

### 4.2. Microstructures simulées

Pour le calcul CA, les automates cellulaires sont des cubes de  $5 \mu m$  de côté. La simulation a été réalisée sur une portion de mur de  $1000 \mu m$  de long, de  $500 \mu m$  de hauteur, la largeur dépendant de la paramétrie utilisée. Quatre résultats montrant des cartographies d'orientations cristallographiques des grains simulés, selon une coupe longitudinale aux cordons, sont présentés à la Figure 6. Ces cartographies correspondent aux simulations réalisées avec et sans activation du module de germination, pour les deux paramétries testées.

Bien que les résultats de simulation soient un peu différents, nous retrouvons certaines tendances issues de la littérature, et présentées à la Figure 2. Sans le module de germination, nous retrouvons des grains colonnaires traversant plusieurs couches, comme observé dans les composants fabriqués avec la poudre Standard. Lorsque le module de germination est ajouté lors de la simulation du procédé, la taille de grains diminue. Certains sont petits et restent tout de même colonnaires mais ne traversent pas plusieurs couches. Ces grains sont situés dans la partie supérieure du mur. Dans la partie inférieure, de nombreux gros grains persistent cependant, formés par épitaxie à partir des grains du substrat. Enfin,

dans l'ensemble du mur, il est observé de nombreux grains mesurant une ou deux cellules qui sont des germes n'ayant pas pu croître.

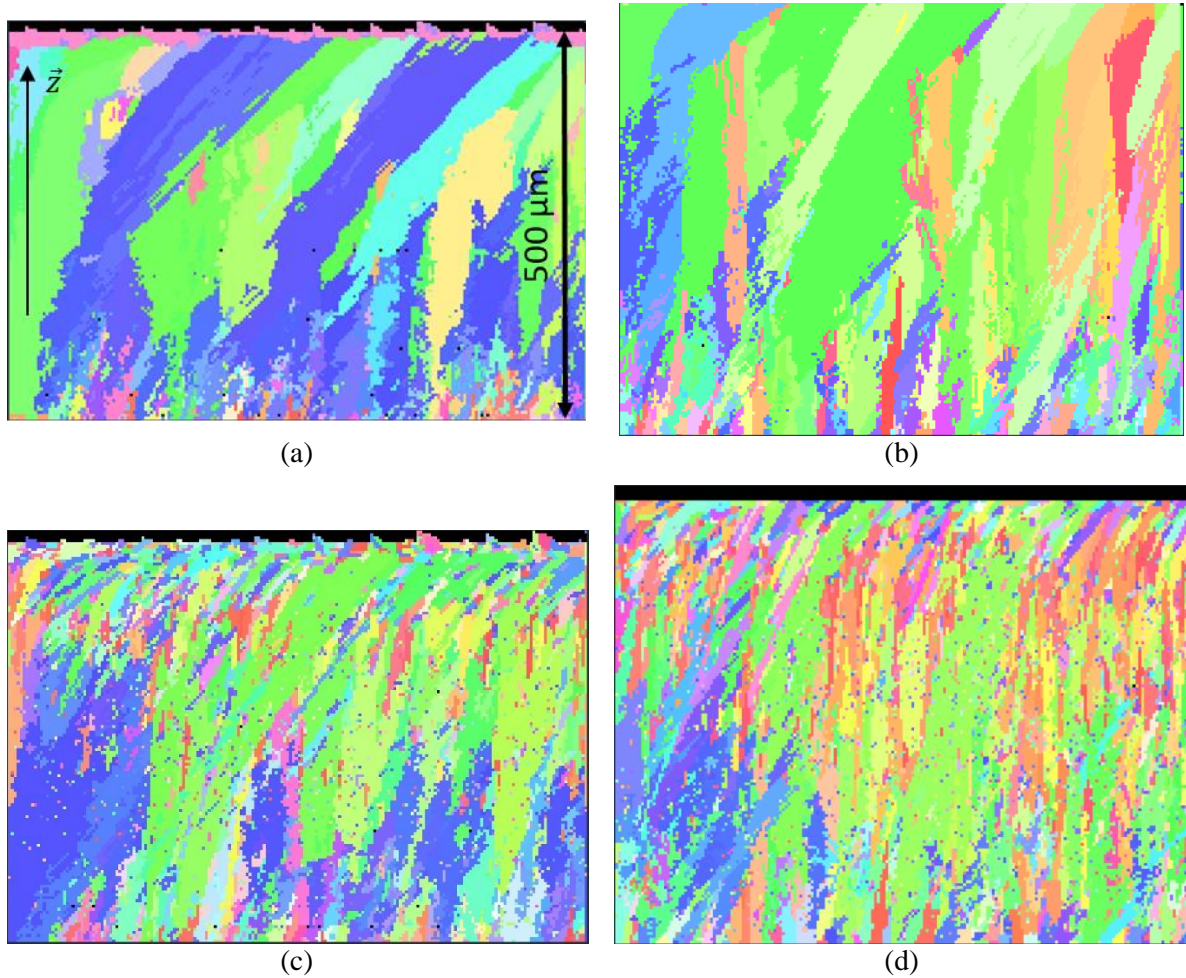


Figure 6 : Cartographies d'orientation des gains par rapport à l'axe  $\vec{z}$  issues des simulations de murs, en coupe longitudinale, pour les paramètres (a,c) (150 W, 100 mm/s), (b,d) (400 W, 200 mm/s), (a,b) sans germination et (c,d) avec germination.

Tableau 1 : Caractéristiques morphologiques moyennes des grains, calculées à partir des simulations, dans des coupes longitudinales, pour chacune des paramètres et avec ou sans le module de germination

	(150 W, 100 mm/s)		(400 W, 200 mm/s)	
	sans	avec	sans	avec
Diamètre moyen des grains ( $\mu\text{m}$ )	$130 \pm 86$	$71 \pm 68$	$120 \pm 89$	$49 \pm 53$
Rapport de forme moyen	4,4	3,6	4,8	4,0
Orientation de l'axe principal des grains ( $^\circ$ )	$110 \pm 27$	$100 \pm 34$	$100 \pm 19$	$93 \pm 32$

Le tableau 1 permet de quantifier les différences entre les deux paramétries, et entre les simulations réalisées avec ou sans le module de germination. Dans celui-ci sont comparées les caractéristiques morphologiques moyennes des grains issus des simulations numériques.

On peut voir dans ce tableau que le diamètre moyen des grains est très élevé lorsque le module de germination n'est pas activé, avec des valeurs six fois plus élevées que celles mesurées dans le substrat. Avec le module de germination, ce diamètre diminue fortement. Nous remarquons aussi que les valeurs d'écart-type sont énormes, ce qui traduit une très large répartition des tailles des grains. Enfin nous constatons que la seconde paramétrie conduit à une légère diminution de la taille moyenne des grains, en particulier lorsque le module de germination est activé, ce qui pourrait s'expliquer par l'augmentation de la vitesse du laser, qui peut favoriser la germination dans la zone de surfusion.

Le rapport de forme moyen, qui caractérise l'élanement des grains, présente dans tous les cas des valeurs élevées, ce qui s'explique par la morphologie colonnaire des grains. Ce rapport est plus faible lorsque le module de germination est activé, mais reste toutefois élevé, ce qui semble montrer que le module de germination ne stoppe pas la croissance des grains colonnaires.

L'angle moyen entre la direction de l'axe principal des grains et la direction de lasage présente des valeurs proches de  $90^\circ$ , les grains colonnaires étant en majorité orientés dans la direction verticale. On peut cependant voir que les grains obtenus sans le module de germination possèdent des valeurs d'angle un peu supérieures, ce qui traduit une légère inclinaison de l'axe principal des grains dans la direction de lasage. Lorsque le module de germination est activé, les grains sont bien plus verticaux, les angles étant proches de  $90^\circ$ .

## 5. Conclusions

La fabrication additive par fusion laser sur lit de poudre est un procédé impliquant de nombreux phénomènes physiques très complexes. L'objectif que nous nous sommes fixés est de pouvoir simuler des murs à l'aide du programme CA-FE tout en prenant en compte l'influence de plusieurs paramètres du procédé, tels que l'apport d'énergie et la poudre.

Le programme CA-FE permet la simulation de la microstructure en deux temps. Le calcul thermique par élément fini a permis d'illustrer l'influence des paramètres énergétiques et de sélectionner deux jeux de paramètres pour la suite des simulations. L'énergie modifie la taille des bains de fusion. Cela a ainsi une influence sur les calculs en automates cellulaires où la solidification est simulée. Les données thermiques sont utilisées et des lois de croissance dendritique et de germination basées sur des données issues de la littérature concernant l'acier 316L ont permis de simuler la formation et la croissance des grains depuis le bain de fusion. Les paramètres énergétiques, ainsi que l'activation ou non du module de germination, ont une influence sur la microstructure simulée en modifiant les orientations des grains et leurs morphologies, en cohérence avec les observations issues de la littérature.

Des essais instrumentés devront encore être réalisés pour valider ces résultats et/ou améliorer le choix des paramètres de la modélisation retenus dans ces premiers calculs.

## Références

- [1] A. Baumard, Prédiction des structures de grains d'un composant en acier 316L élaboré par fabrication additive fusion laser sur lit de poudre, Thèse de doctorat (2020).
- [2] Site Cast3M, <http://www-cast3m.cea.fr/>, site web, (2021).
- [3] W. King, A. T. Anderson, R. Ferencz, N. E. Hodge, C. Kamath, S. Khairallah, A. Rubenchik, Laser powder bed fusion additive manufacturing of metals; physics, computational, and materials challenges, *Applied Physics. Reviews* 2 (2015).

- [4] Y. Liu, Y. Yang, S. Mai, D. Wang et C. Song, Investigation into spatter behavior during selective laser melting of AISI 316L stainless steel powder, *Materials and Design*, vol. 87, pp. 797-806, 2015.
- [5] S. Cao, Y. Zou, C. Lim et X. Wu, Review of laser powder bed fusion (LPBF) fabricated Ti-6Al-4V: process, post-process treatment, microstructure, and property, *Light: Advanced Manufacturing*, vol. 2, n° 120, (2021).
- [6] N. Nadammal, S. Cabeza, T. Mishurova, T. Thiede, A. Kromm, C. Seyfert, L. Farahbod, C. Haberland, J. A. Schneider, P. D. Portella et G. Bruno, Effect of hatch length on the development of microstructure, texture and residual stresses in selective laser melted superalloy Inconel 718, *Materials and Design*, vol. 134, pp. 139-150, (2017).
- [7] A. Chniouel, Étude de l'élaboration de l'acier inoxydable 316L par fusion laser sélective sur lit de poudre : influence des paramètres du procédé, des caractéristiques de la poudre, et des traitements thermiques sur la microstructure et les propriétés mécaniques, Thèse de doctorat, (2019).
- [8] L. Monier, B. M., M. Veron, J.-J. Blandin, G. Martin, F. Villaret, Y. Shen, B. Yrieix, C. Ernould, J. Guyon et A. Despres, On the origin of grain refinement and twin boundaries in as-fabricated austenitic stainless steels produced by laser powder bed fusion, *Additive Manufacturing*, vol. 61, (2023).
- [9] J. Goldak, A. Charkravarti, M. Bibby, A New Finite Element Model for Welding Heat Sources, *Metallurgical Transactions B., Vol. 15B*, (1984) 299-305.
- [10] J. Lipton, M. E. Glicksman et W. Kurz, Equiaxed Dendrite Growth in Alloys at Small Supercooling, *Metallurgical Transactions*, vol. 18, pp. 341-345, (1987).
- [11] W. Kurz, B. Giovanola, and R. Trivedi, Theory of microstructural development during rapid solidification, *Acta Metallurgica 34*, (1986) 823-830.
- [12] W. W. Mullins et R. F. Sekerka, « Stability of a Planar Interface During Solidification of a Dilute Binary Alloy », *Journal of Applied Physics*, vol. 35, pp. 444-451, 1964.
- [13] T. Carozzani, H. Dignonnet et C.-A. Gandin, « 3D CAFE modeling of grain structures: application to primary dendritic and secondary eutectic solidification », *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, vol. 20, 2012.