

# Simulations numériques d'effondrement de colonnes de grains allongés

N. Coppin<sup>1</sup>, M. A. Cabrera<sup>2</sup>, E. Azéma<sup>3,4</sup>, V. Legat<sup>1</sup>, J. Lambrechts<sup>1</sup>

<sup>1</sup> MEMA, iMMC, UCLouvain, {nathan.coppin, vincent.legat, jonathan.lambrechts}@uclouvain.be

<sup>2</sup> TUDelft, m.a.cabrera@tudelft.nl

<sup>3</sup> LMGC, Université de Montpellier, emilien.azema@umontpellier.fr

<sup>4</sup> Institut Universitaire de France (IUF), Paris, France

**Résumé** — L'effondrement de colonnes de grains allongés est étudié au moyen d'un modèle numérique multi-échelles, dans le cas sec et le cas immergé. Les grains allongés sont modélisés comme des agrégats de sphères. Outre un coût-calcul raisonnable, cette modélisation permet un traitement naturel de la traînée et du couple hydrodynamique sur les grains à base de la traînée sur chacune des sphères constitutives. Différents rapports d'aspect de colonne seront explorés, mesurant leur mobilité et les formes d'énergies et leur évolution, entre autres. L'objectif est d'identifier un facteur de forme qui entre en compte dans une loi simple qui relie l'énergie cinétique du front de la colonne avec sa mobilité.

**Mots clés** — Avalanches, matériaux granulaires, grains allongés.

## 1 Introduction

La nature divisée des matériaux granulaires est à l'origine de leurs nombreux comportements complexes : comme des liquides, ils peuvent s'écouler, et comme des solides, ils ont la capacité de résister au cisaillement. Ils sont pourtant impliqués dans de nombreux domaines et à différentes échelles : les écoulements géophysiques comme les avalanches, glissements de terrains, ou éruption volcaniques, mais aussi l'industrie chimique et pharmaceutique, entre autres. L'effondrement de colonne est une expérience type, largement utilisée dans l'étude du comportement des matériaux granulaires [11]. En sus de la dynamique d'effondrement, une des principales caractéristiques étudiée est la mobilité de la colonne, définie comme la distance atteinte par la masse de grains à la fin de l'effondrement. De nombreux travaux indiquent une dépendance en loi de puissance de cette dernière par rapport au rapport d'aspect de la colonne, et ce dans le cas sec comme dans le cas immergé [14, 8, 5, 9]. Cette dépendance observe deux régimes qui permettent de distinguer les grandes colonnes des petites, dont la dynamique d'effondrement diffère. Dans le cas immergé, la compacité initiale de la colonne a une forte influence sur la dynamique d'effondrement et la mobilité, du fait de l'effet *pore-pressure feedback*. Une faible compacité augmente la mobilité et accélère l'effondrement, tandis qu'une compacité élevée diminue la mobilité et ralentit l'effondrement [13]. Lorsque les grains sont allongés, la dynamique d'effondrement de la colonne est similaire à celle de grains circulaires [16, 5, 15]. Si le rapport d'aspect des grains reste relativement faible, il n'affecte pas la loi de puissance reliant la mobilité de la colonne et son rapport d'aspect [15]. A partir d'un certain rapport d'aspect des grains, la colonne peut ne pas s'effondrer si son rapport d'aspect est trop faible, du fait de l'enchevêtrement des grains et de la cohésion géométrique qui en résulte [16]. De récents travaux ont mis en évidence la relation entre la mobilité de la colonne et l'énergie cinétique associée au mouvement du front (défini comme la position la plus avancée des grains en contact avec la colonne lors de l'effondrement) [10]. D'autres travaux ont montré que cette relation est toujours valable pour des grains allongés, mais ont souligné une différence en termes de valeur absolue par rapport aux grains circulaires [5], en se limitant au cas bidimensionnel. L'objectif de ce travail est d'investiguer numériquement les avalanches de grains allongés dans les cas sec et immergé en trois dimensions, notamment afin d'identifier l'influence de l'allongement des grains sur la relation entre la mobilité de la colonne et l'énergie cinétique du front.

## 2 Modèle et méthode numérique

Différentes approches existent en ce qui concerne la simulation de matériaux granulaires immergés. Les approches à deux fluides permettent d'obtenir un coût-calcul faible en considérant la phase granulaire comme une phase continue, au détriment des détails à l'échelle des grains. Les approches de simulation directes, quant à elles, résolvent explicitement l'écoulement autour de chacun des grains, tandis que la phase granulaire est résolue de manière Lagrangienne. Bien qu'offrant une très grande précision, l'approche directe peut avoir un coût-calcul prohibitif même pour des applications de taille modeste. Dans ce travail, l'approche retenue est une approche hybride implémentée dans le logiciel MigFlow<sup>1</sup>. La phase granulaire est résolue avec une méthode Lagrangienne, tandis que la phase fluide est résolue à une échelle plus grossière avec une méthode d'éléments finis.

### 2.1 Grains

L'approche retenue pour la résolution de la phase granulaire est celle de la dynamique des contacts non régulière (NSCD). Cette méthode Lagrangienne suit la position  $\mathbf{x}$  et la vitesse  $\mathbf{u}$  de chacun des grains dans le temps, et résout les contacts entre ceux-ci [6, 7]. La résolution des contacts est implicite et se base sur des lois de contact locales et des bilans de quantité de mouvement, ce qui permet un grand pas de temps, et évite toute interpénétration entre les grains. Les grains de forme arbitraire sont représentés comme des agrégats de grains sphériques, liés entre eux par des liens rigides incassables. Le moment d'inertie, la masse et le centre de masse sont calculés pour chacun des grains en fonction de la masse et de la position des sphères qui le constituent. Ces sphères ont donc une utilité purement géométrique, notamment en ce qui concerne la détection et la topologie des contacts. Cette approche est similaire à celle utilisée dans [5] pour l'étude d'effondrement de colonnes de grains allongés en deux dimensions.

Tout d'abord, les vitesses libres des grains sont calculées à l'aide de la seconde loi de Newton et des forces extérieures telles que la gravité. Pour chaque contact détecté, on construit un référentiel local avec un vecteur normal  $\mathbf{n}$  et deux vecteurs tangents  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{s}$ . On peut ensuite définir une vitesse relative au contact  $\mathbf{U} = (U_n, U_t, U_s)$  telle que :

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}\mathbf{u},$$

avec  $\mathbf{H}$  une transformation qui dépend de la géométrie du contact. Les lois de contacts utilisées pour la résolution correspondent à la condition de Signorini combinée avec une loi de choc parfaitement inélastique dans la direction normale, et la loi de frottement de Coulomb dans le plan tangent :

$$\begin{aligned} \text{If } d \leq 0 : & & (1) \\ U_n^+ = 0, \quad R_n \geq 0, \quad U_n^+ R_n = 0, & \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{R}_t\| \leq \mu R_n, \quad \|\mathbf{U}_t^+\| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{R}_t = -\mu R_n \frac{\mathbf{U}_t^+}{\|\mathbf{U}_t^+\|}, \quad (2)$$

où l'indice + dénote l'instant juste après le contact,  $\mu$  est le coefficient de frottement, et  $d$  la distance entre les grains au début du pas de temps. Après avoir résolu ces équations pour trouver la force de réaction due au contact, les vitesses des grains peuvent être adaptées en conséquence. La difficulté du problème réside dans le grand nombre de contact à résoudre, notamment parce qu'un contact peut en influencer beaucoup d'autres : en changeant les vitesses de deux grains suite à un contact, il faut révérifier la résolution de tous les contacts dans lesquels les deux grains sont impliqués, et ce jusqu'à ce qu'il y ait convergence. A cette fin, un schéma itératif sur base d'une queue est utilisé [4].

---

1. [www.migflow.be](http://www.migflow.be)

## 2.2 Fluide

Le principe de résolution du fluide s'appuie sur les équations moyennées développées par Anderson et Jackson [1]. Il s'agit de moyenniser les champs de vitesse et de pression du fluide sur un certain volume de contrôle en se basant sur la fraction volumique de fluide, ou porosité  $\phi$ . Les équations de Navier-Stokes deviennent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_f \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\rho_f \mathbf{v} \mathbf{v}}{\phi} = \nabla \cdot \left( 2\eta_f \phi \mathbf{d} \left( \frac{\mathbf{v}}{\phi} \right) - p \mathbf{I} \right) + \mathbf{f} + \phi \rho_f \mathbf{g}, \quad (4)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse moyennée du fluide,  $\rho_f$  sa masse volumique,  $\eta_f$  sa viscosité dynamique,  $\mathbf{d}$  le tenseur des taux de déformation,  $p$  la pression,  $\mathbf{I}$  le tenseur identité,  $\mathbf{f}$  la force d'interaction entre les grains et le fluide et  $\mathbf{g}$  l'accélération due à la gravité.

Les équations ci-dessus étant résolues avec une méthode d'éléments finis, le volume de contrôle considéré correspond à celui d'un élément du maillage. Par conséquent, il faut utiliser des éléments plus grands que les grains, afin d'éviter une porosité nulle. Pour limiter le coût-calcul, des éléments P1-P1 sont utilisés. Ces derniers fournissent une précision suffisante étant donné que le fluide est résolu à une échelle plus grossière que les grains. Il est toutefois nécessaire de stabiliser la méthode, ce qui est fait à l'aide d'un PSPG-SUPG et d'un terme LSIC pour corriger l'incompressibilité [3]. Dans un souci de simplicité, la force d'interaction prend seulement en compte la traînée et le gradient de pression :

$$\mathbf{f} = -\gamma \left( \mathbf{u}_d - \frac{\mathbf{v}}{\phi} \Big|_{\mathbf{x}_d} \right) - V \nabla p,$$

avec  $\mathbf{u}_d$  le vecteur des vitesses des sphères, et  $\mathbf{x}_d$  le vecteur de leurs positions.

Le coefficient de traînée  $\gamma$  est adapté en fonction de la porosité et du nombre de Reynolds des sphères [17, 12] afin d'être valide dans les différentes conditions d'écoulements rencontrées dans les cas étudiés :

$$\gamma = \phi^{-1.8} \Big|_{\mathbf{x}_d} \pi d_d^2 \frac{\rho_f}{8} \left( 0.63 \|\mathbf{u}_d - \frac{\mathbf{v}}{\phi} \Big|_{\mathbf{x}_d}\|^{\frac{1}{2}} + 4.8 \left( \frac{\eta_f}{d_d \rho_f \phi \Big|_{\mathbf{x}_d}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

où  $d_d$  est le diamètre de la sphère.

Le couplage entre les deux solveurs se fait de manière explicite, afin de limiter le coût-calcul, mais deux schémas sont mis en place pour augmenter la stabilité de ce couplage : un schéma de Patankar pour la force d'interaction, ainsi qu'un schéma prédicteur-correcteur pour l'évolution temporelle du système grains-fluide [3].

## 3 Démarche expérimentale et perspectives

Dans le présent travail, des grains de densité  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$  sont considérés. Ces grains sont composés de sphères de rayon  $d_d = 2 \text{ mm}$ , assemblées en ligne par des liens rigides incassables, bloquant tout mouvement relatif entre elles. La valeur du coefficient de frottement est fixée à  $\mu = 0.5$ . Dans le cas immergé, le fluide considéré est de l'eau, avec une densité  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$  et une viscosité dynamique  $\eta_f = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Ce travail s'intéresse à diverses caractéristiques de l'effondrement d'une colonne granulaire, avec entre autres le temps d'effondrement  $t_f$ , l'évolution temporelle de la position  $L$  du front de la colonne (voir Fig. 1 gauche) et la mobilité  $L_f$  de la colonne. Cette dernière est définie comme la position du grain le plus avancé toujours en contact avec le reste de la masse de la colonne, ce qui implique d'ignorer les grains éjectés lors de l'effondrement (voir Fig. 1 droite). Sur base de l'évolution temporelle de la position du front, il est possible de définir une vitesse moyenne de propagation de ce dernier  $U^{fr}$  comme étant la pente de la droite reliant les instants où la colonne atteint respectivement 30% et 70% de sa mobilité. On peut alors définir l'énergie cinétique du front  $E_k^{fr} = M U^{fr2}$ . Comme indiqué par de récents travaux [10, 5], il est possible de relier cette énergie cinétique du front à la mobilité de la colonne via un modèle simplifié faisant l'analogie de l'effondrement de la colonne avec le déplacement d'un bloc rigide de même masse. On considère donc un bloc rigide de masse  $M$  subit une force résistive  $-k\dot{x}$ ,

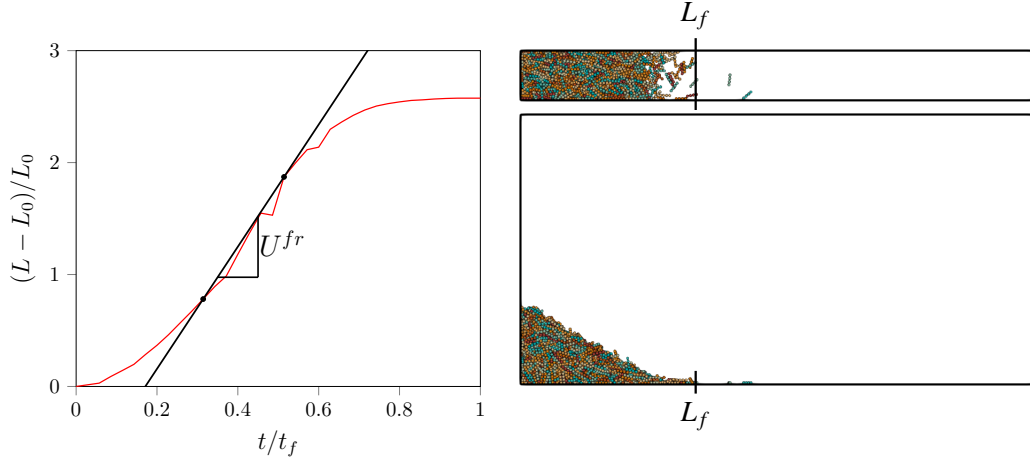


FIGURE 1 – Gauche : évolution temporelle de la position du front de la colonne. Droite - haut : vue supérieure de l'état final de la colonne. Droite - bas : vue latérale de l'état final de la colonne.  $L_f$  désigne la mobilité de la colonne. La colonne considérée a un rapport d'aspect  $H_0/L_0 = 2.5$  pour des grains allongés constitués de quatre sphères.

où la constante  $k$  représente la viscosité effective du matériau granulaire. En résolvant son équation du mouvement avec  $U^{fr}$  pour vitesse de départ, on obtient :

$$\frac{L_f - L_0}{L_0} = \frac{\sqrt{2}}{kL_0} \sqrt{M^*} \sqrt{\frac{\rho}{\rho - \rho_f}} \sqrt{E_k^{fr}},$$

où  $M^* = M(\rho - \rho_f)/\rho$  est la masse effective de la colonne dans le cas immergé. De précédents résultats pour des disques [10] et des grains allongés en 2D [5] ont suggéré la dépendance suivante :

$$\frac{L_f - L_0}{L_0} \propto \frac{1}{L_0} \frac{\rho}{\rho - \rho_f} \sqrt{E_k^{fr}},$$

permettant d'obtenir un bon effondrement des données. Cependant, les données des grains allongés présentent un décalage vers le bas par rapport à celles des disques, indiquant la nécessité de prendre en compte le facteur  $\frac{1}{k}$ . Afin d'identifier l'importance de ce facteur, les objectifs futurs sont d'étudier l'effondrement des colonnes en fonction du rapport d'aspect des grains. Ainsi, pour chaque rapport d'aspect de grain, plusieurs rapports d'aspect de colonne seront simulés. Les rapports d'aspect des grains seront choisis de telle sorte qu'ils n'empêchent pas l'effondrement de la colonne à cause d'un enchevêtrement, évitant l'apparition de cohésion géométrique [16]. Systématiquement, la longueur de la base des colonnes  $L_0$  sera sélectionnée telle qu'elle est au moins égale à 75 fois la taille effective des grains afin d'éviter des effets de taille [2].

## Références

- [1] T. B. Anderson, R. Jackson. *A fluid mechanical description of fluidized beds*, Industrial and engineering chemistry fundamentals, ACS Publications, 527-539, 1967.
- [2] M.A. Cabrera, N. Estrada. *Granular column collapse : Analysis of grain-size effects*, Physical Review E, APS, 012905, 2019.
- [3] M. Constant, N. Coppin, F. Dubois, V. Vidal, V. Legat, J. Lambrechts. *Simulation of air invasion in immersed granular beds with an unresolved FEM-DEM mode*, Computational Particle Mechanics, Springer, 535-560, 2021.
- [4] N. Coppin, M. Constant, J. Lambrechts, F. Dubois, V. Legat. *Numerical analysis of the drag on a rigid body in an immersed granular flow*, Computational Particle Mechanics, 9(3), 393-406, 2022.
- [5] N. Coppin, M. Henry, M. A. Cabrera, E. Azéma, F. Dubois, V. Legat, J. Lambrechts. *Collapse dynamics of two-dimensional dry and immersed granular columns of elongated grains*, Physical Review Fluids, 8(9), 094303, 2023.

- [6] M. Jean. *The nonsmooth contact dynamics method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Elsevier, 235-257, 1999.
- [7] M. Jean. *Méthode de dynamique des contacts*, Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires, Hermès-Lavoisier, 51-82, 2010.
- [8] L. Lacaze, J.C. Phillips, R.R. Kerswell. *Planar collapse of a granular column : Experiments and discrete element simulations*, Physics of Fluids, AIP, 063302, 2008.
- [9] C. H. Lee, Z. Huang, M. L. Yu. *Collapse of submerged granular columns in loose packing : Experiment and two-phase flow simulation*, Physics of Fluids, 30(12), 2018.
- [10] O. Polania, M. A. Cabrera, M. Renouf, E. Azéma. *Collapse of dry and immersed polydisperse granular columns : A unified runout description*, Physical Review Fluids, 7(8), 084304, 2022.
- [11] G. Pinzon, M. A. Cabrera. *Planar collapse of a submerged granular column* , Phys. Fluids, AIP, 086603, 2019.
- [12] J. Richardson, W. Zaki. *The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow*, Chemical engineering science, Elsevier, 65-73, 1954.
- [13] L. Rondon, O. Pouliquen, P. Aussillous. *Granular collapse in a fluid : Role of the initial volume fraction*, Physics of Fluids, AIP, 073301, 2011.
- [14] L. Staron, E.J. Hinch. *The spreading of a granular mass : role of grain properties and initial conditions*, Granular Matter, Springer-Verlag, 205-217, 2007.
- [15] H. Tapia-McClung, R. Zenit. *Computer simulations of the collapse of columns formed by elongated grains*, Physical Review E, APS, 061304, 2012.
- [16] M. Trepanier, S.V. Franklin. *Column collapse of granular rods*, Physical Review E, APS, 011308, 2010.
- [17] C. Y. Wen, H. Y. Yu. *Mechanics of fluidization*, Chemical Engineering progress symposium series, American Institute of Chemical Engineers, 100-111, 1966.