

# Modélisation de phénomènes de périodicité par méthode semi-analytique pour l'étude du contact pneu-chaussée.

N. Durand, D. Nelias, T. Chaise, A. Platzer, A. Duval, P. Bussetta

Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS, UMR5259, F69621, France, nicolas.durand@insa-lyon.fr

**Résumé** — Le contact pneu-chaussée est constitué de deux composantes clés : les rugosités de la route et le matériau viscoélastique qui constitue un pneu. L'étude d'un contact entre une surface rugueuse aux multi-échelles et un matériau viscoélastique, peut permettre une meilleure compréhension de l'interaction pneu-chaussée et pourrait être utile au dimensionnement des pneumatiques. L'objectif de ces travaux est de proposer une méthodologie numérique, à l'aide d'outils de modélisation semi-analytique, pour étudier les relations entre un matériau viscoélastique et une surface rugueuse considérée périodique.

**Mots clés** — modélisation numérique, méthode semi-analytique (SAM), pneumatique, route, rugosité multi-échelle, viscoélasticité, périodicité

## 1 Introduction générale

Les outils numériques utilisant des méthodes semi-analytiques sont des outils qui permettent, sous certaines hypothèses, de réaliser des calculs de façon rapide relativement à des éléments finis plus classiques. En effet, en mécanique du contact par exemple, où les problèmes sont bien posés, l'étude de comportements matériaux considérés viscoélastiques se fait près de 500 fois plus rapidement qu'avec des éléments finis [1]. Ainsi, envisager une modélisation du contact pneu-chaussée où règne cette viscoélasticité peut-être possible par méthode semi-analytique. Une des hypothèses fortes de ce contact pneu-chaussée est la périodicité du sol rugueux considéré. Cette étude s'attardera à la modélisation de ces idées de périodicités pour des méthodes semi-analytiques.

## 2 Le contact pneu-chaussée

Le sol routier est une surface constituée d'irrégularités qui peut être considérée comme une surface aux échelles fractales. Pour faciliter la modélisation, les irrégularités du sol sont généralement classées en deux grandes familles : les macrorugosités et les microrugosités [2]. L'étude de l'influence de ces différentes échelles sur la gomme est un des points clés de notre travail. Pour modéliser ces irrégularités et l'aspect cyclique de l'usure des pneumatiques, une hypothèse numérique qui peut être posée est de considérer que la route est périodique. Ce faisant, l'interaction entre la route et le pneumatique pourra n'être modélisée qu'en considérant un élément de route unique mais périodisé [3].

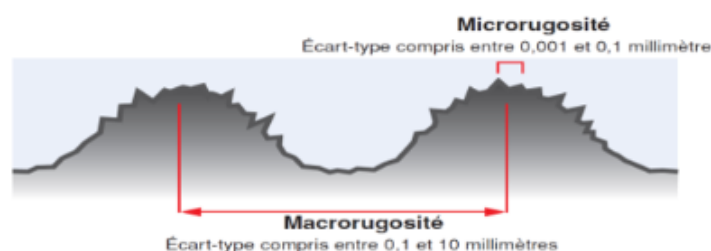


FIGURE 1 – Aspects multi-échelles du sol routier. [4]

La gomme utilisée dans les pneumatiques est constituée, entre autres, de caoutchouc naturel et synthétique cuit. Après cuisson, la gomme est considérée comme un matériau viscoélastique. Son compor-

tement est alors vu comme l'intermédiaire entre un solide élastique et un fluide visqueux et dépend donc de la façon dont elle est sollicitée, mais surtout son comportement mécanique sera fonction du temps. Une modélisation classique d'un matériau viscoélastique se fait à l'aide de couples ressorts-amortisseurs (modèles rhéologiques figure 2a). L'amortisseur modélise notamment cette dépendance au temps et met en évidence le phénomène de perte : une partie de l'énergie est dissipée par le matériau. C'est ce qu'on appelle l'hystérésis (figure 2b). L'adhérence entre pneu et route s'explique donc grâce à l'interaction particulière entre différentes échelles de sols et ce matériau viscoélastique. Un des phénomènes majeurs qui explique cette adhérence s'appelle l'indentation hystérétique.

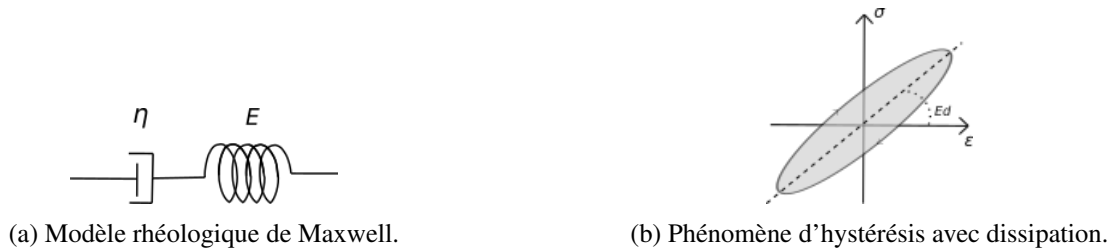


FIGURE 2 – Modélisation de la viscoélasticité

### 3 Modélisation numérique du contact pneu-chaussée

#### 3.1 Mécanique du contact

Classiquement, la résolution d'un problème de contact consiste à déterminer l'influence qu'exercent deux massifs l'un sur l'autre lorsqu'ils rentrent en contact sous des conditions connues (pression, cisaillement, effort, géométrie, matériaux, etc.) afin de déterminer les conséquences de ce contact sur ces derniers (déplacement, déformation, contrainte, etc.).

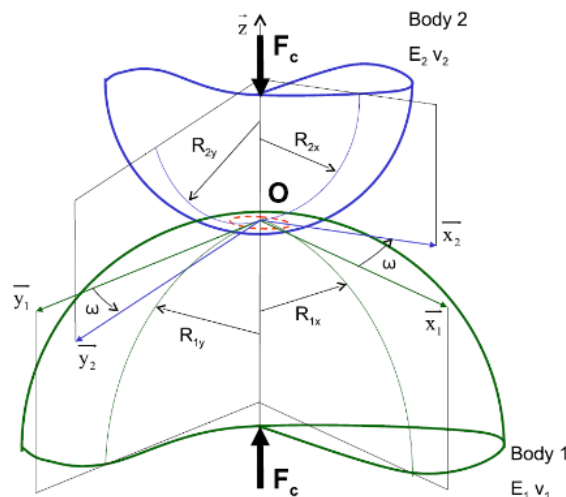


FIGURE 3 – Contact sphère-sphère. [5]

Différents développements mathématiques notamment ceux de Hertz [6] permettent d'étudier le contact entre deux sphères par exemple (figure 3) :

Soit deux corps  $B_1$  et  $B_2$ , la résolution du problème de contact consiste à évaluer la valeur  $h$  en tous points du système où,  $h$  représente l'espacement entre les corps  $B_1$  et  $B_2$  tel que :

$$h = h_i + \bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2} - \delta \quad (1)$$

Avec  $h_i$  et  $\bar{u}_{z_{1,2}}$ , respectivement l'espacement initial, et les déplacements verticaux des deux corps, ainsi que  $\delta$  l'approche de corps rigides.

De plus, la relation suivante permet de déterminer le lien entre pression et déplacement, pour un contact comme étudié ici :

$$\bar{u}_z(x, y) = \int \int_{S_c} p(\xi, \eta) G_z^p(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = p * G \quad (2)$$

Avec (\*) qui est un produit de convolution,  $p$  la pression exercée sur la surface  $S_c$  et  $G$  une fonction de Green.

Cette fonction de Green a été définie pour la première fois par Boussinesq [7] tel que :

$$G_z^p(x - \xi, y - \eta, E, \nu) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (3)$$

Cette idée est la base analytique des méthodes numériques semi-analytiques pour la modélisation du contact. Nous venons d'évoquer le produit de convolution, sa résolution est un des points clés de ces modèles semi-analytiques qui traitent les problèmes de contact.

Pour résoudre ce produit de convolution, l'idée est d'utiliser le théorème de convolution qui stipule qu'un produit de convolution peut être assimilé à une simple multiplication dans le domaine fréquentiel. Ainsi appliquer une transformée de Fourier (FT) sur les grandeurs manipulées permet un calcul plus simple et plus rapide. Cependant, ce passage dans le domaine fréquentiel va rendre tous les calculs partiellement périodiques, ce qui n'est pas désirable lorsque l'on travaille sur des géométries finies. Pour répondre à ce problème Wang et Liu [8] proposent une solution : l'algorithme DC-FFT (Discontinuous Fast Fourier Transformation). Où, grâce à une prolongation des zones de calculs et l'introduction de valeurs nulles dans les zones prolongées (zero-padding, Figure 4b), ils arrivent à réaliser des calculs finis, non-périodique, tout en restant dans le domaine fréquentiel. Une modification de cet algorithme (Figure 4c) permet de réaliser des calculs réellement périodiques. Sur les schémas de la figures 4, les cercles bordeaux représentent la pression dans la zone d'intérêt et les pics roses représentent les coefficients d'influences de la fonction de green qui permettent de réaliser le calcul.

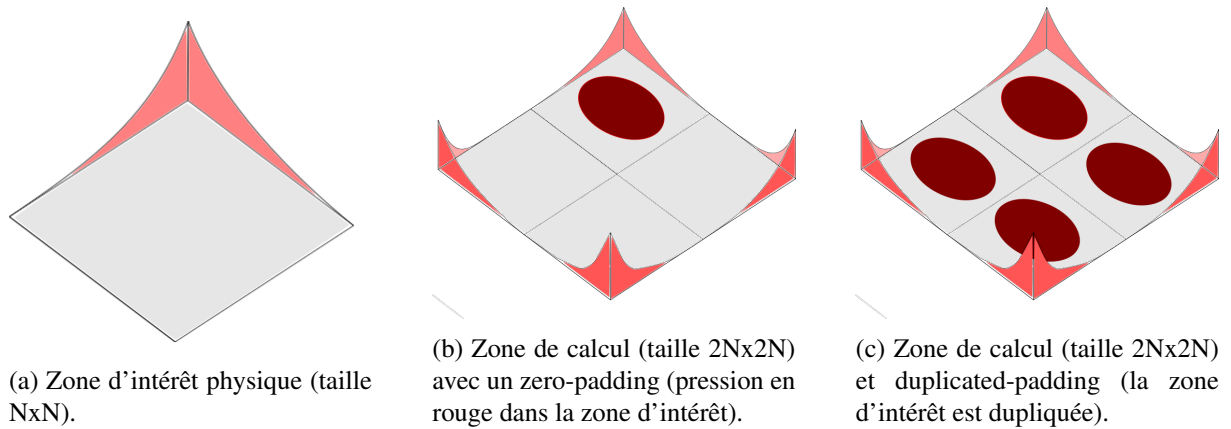


FIGURE 4 – Zones de calcul, zero-padding et duplicated-padding.

### 3.2 Viscoélasticité

Pour modéliser la viscoélasticité une façon simple est d'intégrer des fonctions de fluage  $J(t)$  et de relaxation  $R(t)$  de matériaux réels obtenues expérimentalement, dans des modèles rhéologiques (figure 5).

Mora [4] et Wallace [1] proposent notamment l'intégration de ces modèles pour le calcul du déplacement viscoélastique d'un solide homogène dans l'équation (2) tel que :

$$u_z(x, y, t) = \int_0^t J(t - t') \int \int_{R^2} \bar{G}_{ij}(\xi, \eta) \bar{\sigma}_j(x - \xi, y - \eta, t') d\xi d\eta dt' \quad (4)$$

Le code du laboratoire dispose déjà de développements de viscoélasticité linéaire grâce à leurs travaux.

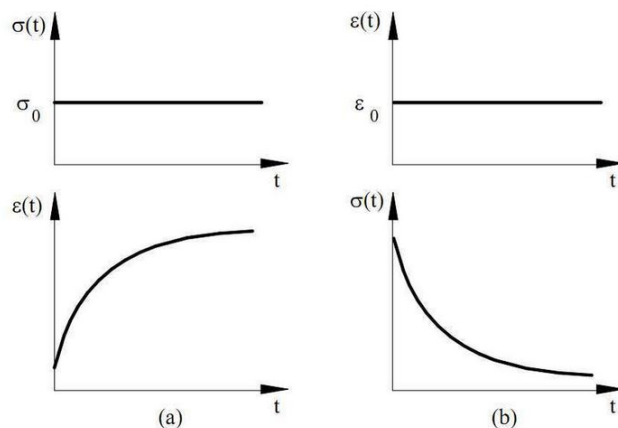


FIGURE 5 – Courbe de fluage (a) et courbe de relaxation (b). [9]

### 3.3 Périodicité

L'équation (2) met en évidence un produit de convolution. Effectuer ces calculs directement peut engendrer une complexité numérique importante. Pour pallier à cela, l'équipe de Q. Jane Wang [5] en s'appuyant sur les travaux de Ju et Faris [10] propose des méthodes FFT (Fast Fourier Transformation) pour effectuer ces calculs plus rapidement grâce à un passage dans le domaine fréquentiel, transformant le produit de convolution en une simple multiplication. L'algorithme DC-FFT (discontinuous-FFT) [8] permet notamment d'effectuer des calculs non-périodiques avec une grande précision comme nous l'avons évoqué précédemment. Ces méthodes sont historiquement implantées dans le code du laboratoire. Cependant, le besoin de travailler avec des solides périodiques est tout récent pour la modélisation du contact pneu-chaussée, et le code ne dispose pas des outils numériques nécessaires. La méthode dite de DCD-FFT (discontinuous duplicated-FFT) [11] a été développée récemment au laboratoire. Contrairement à une DC-FFT classique (Figure 4b) où des zéros vont être imposés dans les zones dupliquées, cette nouvelle méthode propose de dupliquer les pressions déjà calculées dans les zones prolongées pour prendre en compte l'influence des proches voisins dans le calcul, permettant la mise en évidence de phénomènes périodiques (Figure 4c). Cette nouvelle méthode a été validée grâce aux travaux de Chen [11] s'appuyant sur les développements analytiques de Johnson [12] (figure 6).

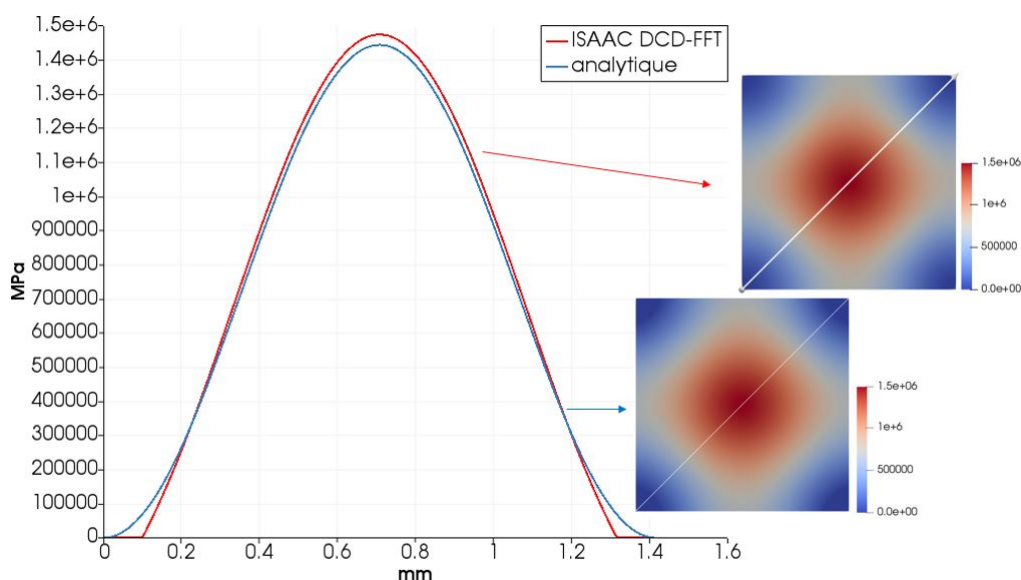


FIGURE 6 – Résultats pour la validation de la DCD-FFT (périodique).

## 4 Résultats

Ainsi, cette nouvelle méthode permet de mettre en évidence de nouveaux comportements physiques que l'on ne pouvait pas modéliser alors.

Fig. 13.4. Area of contact between a perspex flat and a rubber block with an isotropic wavy surface  $\bar{p}/p^*$ : (a) 0.024, (b) 0.080, (c) 0.139, (d) 0.345, (e) 0.550, (f) 0.759.

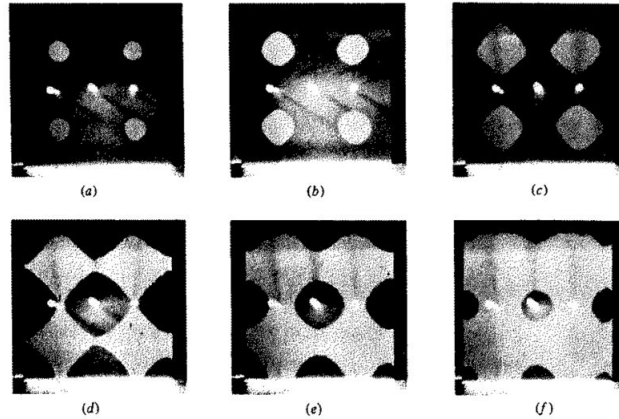


FIGURE 7 – Etude expérimentale du contact normal caoutchou bi-sinusoïdal, surface plane rigide : Figure 13.4 du Johnson [12].

Dans la figure 13.4 du chapitre 13 de l'ouvrage de Johnson reproduite en figure 7, un essai expérimental est réalisé. Johnson charge avec un effort normal une surface plane élastique rigide sur une surface bi-sinusoïdale en caoutchouc. Le caoutchouc est connu pour avoir un comportement typiquement visco-élastique. Cette expérience met en évidence le comportement à la fois viscoélastique du caoutchouc, mais aussi l'influence physique de la périodicité. En effet, Johnson relève qu'un sinus entouré d'autres sinus a une aire de contact en forme de carré pour un chargement où  $\frac{\bar{p}}{p^*}$  est proche de 0.14.

En effet, il faut imaginer que la présence d'un autre élément de sinus proche de celui observé va venir cloisonner ce dernier. Les sinus voisins empêchent la surface de s'étaler plus que ce qu'elle ne le ferait s'ils n'étaient pas présents.

Partant de ce postulat, Chen cherche en 2008 [11] à faire apparaître cette allure carrée grâce à des modèles numériques qui utilisent la CC-FFT, une autre méthode permettant de modéliser la périodicité. Il travaille avec l'expression de surface suivante :

$$h_i(x, y) = A_p \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right) \right] \quad (5)$$

Cela lui permet d'obtenir les résultats reproduits en figure 8.

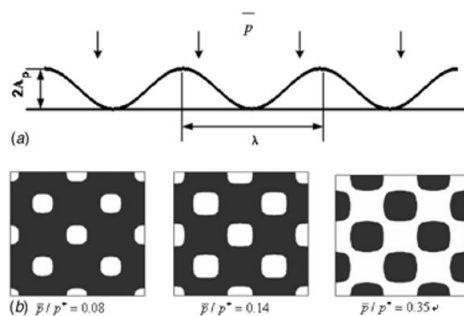


FIGURE 8 – Résultats de simulations de Chen [11] qui mettent en évidence l'allure carrée des sinusoïdes pour différents chargements  $\frac{\bar{p}}{p^*}$ .

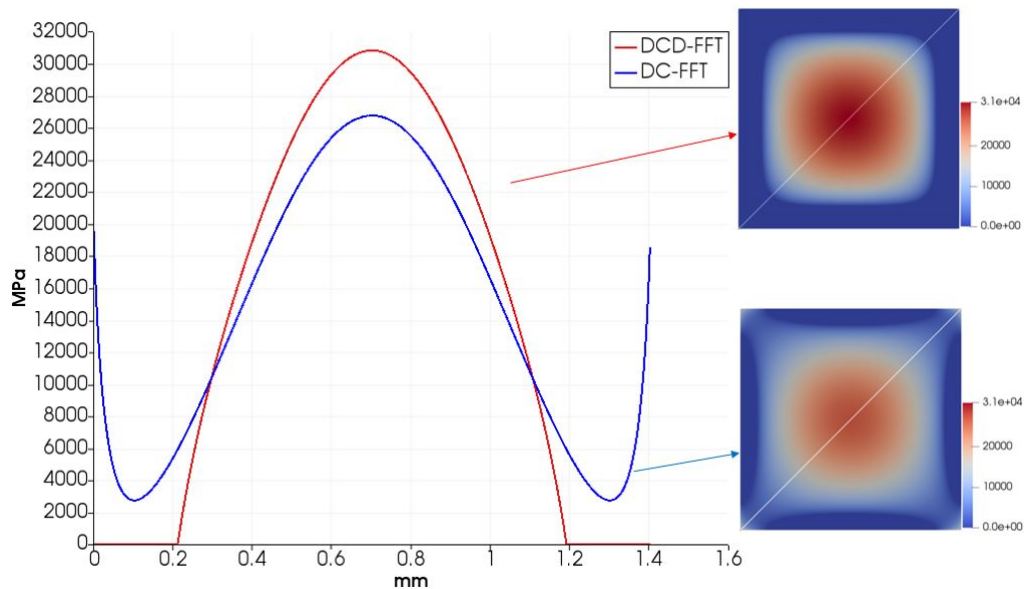


FIGURE 9 – Résultats de simulations inspirés des travaux de Chen [11] autour des sinus carrés.

Nous avons donc effectué une simulation avec la nouvelle méthode développée (DCD-FFT) pour essayer d’observer ce même phénomène. Dans un premier temps des calculs ont été réalisés avec une surface générée comme décrite dans l’équation (5) pour un chargement à  $\frac{\bar{p}}{p^*} = 0.14$ . Les calculs ont été effectués avec la DCD-FFT (périodique) mais aussi la DC-FFT (non-périodique) pour observer la différence d’allure entre les deux méthodes et les comparer aux résultats de la littérature. Ces résultats se retrouvent en figure 9. Cette allure carrée, discutée juste au-dessus, est parfaitement retranscrite avec notre DCD-FFT (périodique). De plus, la DC-FFT (non-périodique) fait apparaître des effets de bords qui semblent une nouvelle fois éloigner les résultats de la physique qui veut être observée. Avec la DC-FFT l’idée que le sinus serait contenu par ses proches voisins n’est pas effective. Ainsi, le sinus a tendance à s’étaler dans les coins et vient s’écraser sur les bords de la surface. En effet, comme le montre la figure 8, les sinus de la surface issus de l’équation (5) sont positionnés en diagonale les uns par rapport aux autres ce qui explique que les coins soient, d’une certaine manière, retenus dans la DCD-FFT (périodique) et qu’ils ne le soient pas pour la DC-FFT (non-périodique).

Il a donc été possible de mettre en avant la pertinence de la nouvelle méthode développée en s’appuyant sur les travaux scientifiques précédents qui donnent à voir l’apparition singulière d’une géométrie carrée pour une entrée bi-sinusoidale périodique.

## 5 Perspectives

Cette nouvelle méthode, qui permet de prendre en compte la périodicité pourrait, à terme, permettre de modéliser avec plus de justesse le contact pneu-chaussée. Nous avons cependant évoqué la CC-FFT, qui d’après la littérature, est une méthode encore plus précise pour modéliser ces phénomènes périodiques, et qui pourrait elle aussi être développée. Finalement un des points les plus importants du contact pneu-chaussée est le comportement viscoélastique de la gomme, une viscoélasticité non-linéaire qu’il serait intéressant de modéliser avec plus de précision que la simple viscoélasticité linéaire discutée sommairement dans ce papier.

## Références

- [1] Wallace Efoe RODRIGUE. “On the rolling contact between multi-layered bodies, application to tire-pavement modelling”. In : (2022).
- [2] B. N. J. PERSSON. “Theory of rubber friction and contact mechanics”. In : *The Journal of Chemical Physics* 115.8 (22 août 2001), p. 3840-3861. ISSN : 0021-9606, 1089-7690. DOI : 10.1063/1.1388626.
- [3] Romain BUGNICOURT. “Simulation of the contact between a rough surface and a viscoelastic material with friction.” In : (2017).
- [4] Florian MORA. “Modélisation multiéchelles d’un contact rugueux viscoélastique lubrifié”. In : (2014).
- [5] Q. Jane WANG et al. “FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics”. In : *Frontiers in Mechanical Engineering* 6 (28 août 2020), p. 61. ISSN : 2297-3079. DOI : 10.3389/fmech.2020.00061.
- [6] H. HERTZ. *Über die Berührung fester elastischer Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92, 156-171. 1881.
- [7] Joseph BOUSSINESQ. “Application des potentiels à l’étude de l’équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans les solides, des efforts quelconques exercés sur ...” In : (1885).
- [8] Shuangbiao LIU, Qian WANG et Geng LIU. “A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses”. In : *Wear* 243.1 (août 2000), p. 101-111. ISSN : 00431648. DOI : 10.1016/S0043-1648(00)00427-0.
- [9] Hanen JRAD. “Etude du comportement dynamique non linéaire des composants viscoélastiques : Caractérisation, modélisation et identification”. In : (2014).
- [10] Y. JU et T. N. FARRIS. “Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems”. In : *Journal of Tribology* 118.2 (1<sup>er</sup> avr. 1996), p. 320-328. ISSN : 0742-4787, 1528-8897. DOI : 10.1115/1.2831303.
- [11] W. Wayne CHEN, Shuangbiao LIU et Q. Jane WANG. “Fast Fourier Transform Based Numerical Methods for Elasto-Plastic Contacts of Nominally Flat Surfaces”. In : 75.1 (1<sup>er</sup> jan. 2008), p. 011022. ISSN : 0021-8936, 1528-9036. DOI : 10.1115/1.2755158.
- [12] Kenneth L. JOHNSON et Kenneth Langstreth JOHNSON. *Contact mechanics*. 5.Reprint. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1999. 452 p. ISBN : 978-0-521-25576-9 978-0-521-34796-9.