

# Conception robuste d'engrenages droits au regard de la résonance non linéaire principale (à l'aide de suivi de bifurcation).

A. Melot<sup>1</sup>, E. Rigaud<sup>2</sup>, J. Perret-Liaudet<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Univ. Gustave Eiffel, Inria, COSYS-SII, I4S, Campus Beaulieu, 35042 Rennes, France, adrien.melot@inria.fr

<sup>2</sup> LTDS, UMR CNRS 5513, Ecole Centrale Lyon, joel.perret-liaudet@ec-lyon.fr, emmanuel.rigaud@ec-lyon.fr

**Résumé** — Cette étude concerne le choix optimal des dépouilles de tête au regard de la sévérité de la résonance non linéaire principale d'un engrenage droit, caractérisée à partir de deux critères ad hoc. La non linéarité est associée au jeu entre dents permettant l'existence de vibro impacts entre denture, source de nuisances sonores. Nous proposons une approche originale basée sur le suivi des bifurcations nœud-col de la résonance, contrôlées par la vitesse de rotation et la dépouille. L'incertitude est introduite via les densités de probabilité de la dépouille inscrite dans la tolérance.

**Mots clefs** — Tolérances, incertain, vibro-impact, bifurcation, engrenages.

## 1. Introduction

Le comportement vibroacoustique d'une transmission par engrenage peut s'avérer gênant au regard des nuisances sonores. Pour répondre à la prestation NVH, on recherche dans la majorité des cas à minimiser les niveaux vibratoires du carter de la transmission en agissant sur la source excitatrice interne qu'est l'erreur statique de transmission sous charge [1,2]. Cette erreur est définie comme l'écart de position angulaire de la roue de sortie et celle qu'elle devrait occuper si l'engrenage était parfait et infiniment rigide. Ses origines physiques sont les défauts de géométrie tels que par exemple les écarts de profil, les déformations localisées à la denture, et les déformations globales de la transmission responsable de la mise en biais des arbres. Typiquement, ces trois origines conduisent à des écarts de positionnement de l'ordre de la dizaine de micron pour des engrenages de module 2 à 3 mm (boite de véhicule automobile). En tant que source excitatrice, l'erreur statique de transmission peut être modélisée par deux contributions, une excitation de type déplacement et une excitation paramétrique associée à la fluctuation périodique de la raideur d'engrènement qui couple les deux roues en prise. Elle génère alors l'erreur dynamique de transmission et des surcharges dynamiques à la denture. L'état vibratoire du carter résulte de la propagation solidienne depuis l'engrènement jusqu'au carter, via les arbres et les paliers [3]. Compte tenu du jeu entre dents, indispensable pour assurer le montage de la transmission, les amplifications dynamiques observées sur les résonances peuvent révéler des réponses dynamiques de type vibro impact [4-6]. C'est particulièrement vrai dans le cas des engrenages droits, où il n'est pas rare d'observer des phénomènes de résonance principale non linéaire de type mollissant, associée aux pertes de contact.

Afin de minimiser l'erreur statique de transmission pour un couple transmis dit optimal, on procède généralement à des corrections micro géométriques sur les flancs de denture, telles que par exemple des dépouilles de tête. L'optimisation de ces corrections s'appuie dans la grande majorité des cas sur le calcul statique de l'erreur de transmission que l'on souhaite minimiser, plutôt que sur la réponse dynamique à cette erreur, dite erreur dynamique de transmission [7-9]. Par ailleurs, en conception robuste, il convient d'appréhender la dispersion de ces corrections dans une intervalle associée aux tolérances de fabrication choisies [10-12].

Dans ce contexte, nous proposons de rechercher l'optimum robuste de la correction de profil en considérant non plus l'erreur statique de transmission, mais l'erreur dynamique de transmission

observée au niveau de la résonance principale. La sévérité de la résonance s'appuie, comme nous le verrons ci-après, sur deux critères ad hoc. Nous nous limitons dans cette étude, sans rien enlever à l'originalité de la démarche, au cas d'un engrenage droit pour lequel les corrections de profil sont introduites via seules des dépouilles de tête. La dispersion sur les dépouilles est alors prise en compte via l'hypothèse de différentes densités de probabilité de la valeur de la dépouille. Pour évaluer la variabilité du comportement dynamique, nous nous appuyons d'une part sur le suivi de bifurcation nœud-col caractéristique de la résonance principale de type mollissant [13], puis sur l'évaluation de la statistique au moyen de simulations de type Monte Carlo [14].

Dans un premier temps, nous revenons sur le modèle dynamique de l'engrenage droit, les équations associées, et son comportement déterministe, puis nous décrivons la démarche de conception robuste proposée, avant de fournir les résultats obtenus.

## 2. Modèle dynamique

On s'intéresse dans cette étude à la dynamique non linéaire associée au jeu entre dents et induite par l'erreur statique de transmission d'un engrenage inverseur droit 50/50 dents à axes parallèles. La denture est normale de module 2 mm et de largeur 20 mm. Afin de simuler son comportement non linéaire, on considère un modèle simplifié à 2 degrés de liberté que sont les rotations des deux pignons en prise  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ . Ce modèle est décrit Figure 1. Il est constitué de deux disques rigides d'inerties polaires  $I_1 = I_2 = 1.52 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . La seule composante élastique introduite correspond au couplage élastique induit par l'engrènement. La force élastique non linéaire  $F$  qui en résulte est portée par la ligne d'action théorique qui tangente les deux cercles de base de rayons  $R_1 = R_2 = 46,984 \text{ mm}$ . Les effets dissipatifs sont pris en compte via un amortissement visqueux équivalent linéaire de viscosité  $c$  de taux égal à 5%. Le couple de sortie, constant  $C_2$ , s'équilibre avec le couple d'entrée, constant,  $C_1 = C_2 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ . En éliminant le mode de corps rigide, associé à la transmission théorique des mouvements de rotation, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + F(x, e, t) = N \quad (1)$$

où  $x$  constitue l'erreur dynamique de transmission,  $m$  une masse équivalente déduite des rayons et des inerties des disques, et  $N$  la force transmise sur la ligne d'action théorique.  $F(x, e, t)$  représente l'effort dynamique de denture qui dépend des erreurs dynamique  $x$  et statique  $e$  de transmission, ainsi que du temps  $t$  explicitement, traduisant l'excitation paramétrique induite par la raideur d'engrènement.

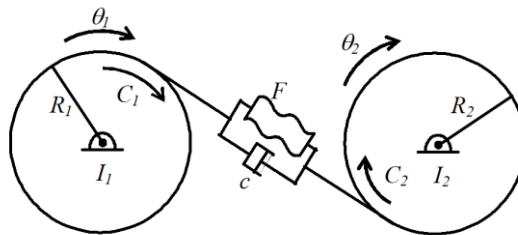


Figure 1 – Modèle dynamique

Compte tenu du jeu entre dents, la force non linéaire  $F$  est modélisée par une fonction paramétrique linéaire par morceaux. Ainsi,

$$F = k(t) [(x - j)H(x - j) + (x + j)H(-x - j)] \quad (2)$$

où  $k(t)$  constitue la raideur périodique d'engrènement,  $H(\cdot)$  la fonction Heaviside et  $j(t)$  une fonction périodique tenant compte du demi jeu entre dents  $b$  et de l'erreur statique de transmission.

Plus précisément :

$$j(t) = b + e(t) + \frac{N}{k(t)} \quad (3)$$

Finalement, l'erreur statique de transmission  $e(t)$  et la raideur d'engrènement  $k(t)$  sont introduites sous la forme de séries de Fourier. Elles dépendent de la charge transmise  $N$  et des modifications de profil. Dans cette étude, on ne considère que des dépouilles de tête identiques sur les deux pignons. La valeur de la dépouille  $\mu$  constitue le paramètre à optimiser et sa profondeur est fixée égale à 1,74 mm pour une hauteur de dent de 4,50 mm.

### 3. Réponse dynamique déterministe

Afin d'obtenir la réponse dynamique de la transmission autour de la résonance principale, et notamment l'erreur dynamique de transmission, on utilise la méthode de l'équilibrage harmonique assortie d'une méthode de continuation par longueur d'arc et prédicteur tangent [13]. La stabilité des solutions est obtenue par la méthode de Hill. Un exemple typique de résonance est présenté figure 2, où l'on trace la valeur RMS de l'erreur dynamique de transmission en fonction de la fréquence de rotation des arbres. On remarquera le caractère mollissant du comportement associé aux pertes de contact. Pour caractériser la sévérité de la résonance, nous introduisons deux grandeurs relatives aux deux points de bifurcation nœud-col, à savoir les écarts en fréquence  $\Delta\Omega$  et en amplitude  $\Delta DTE$  représentés figure 2.

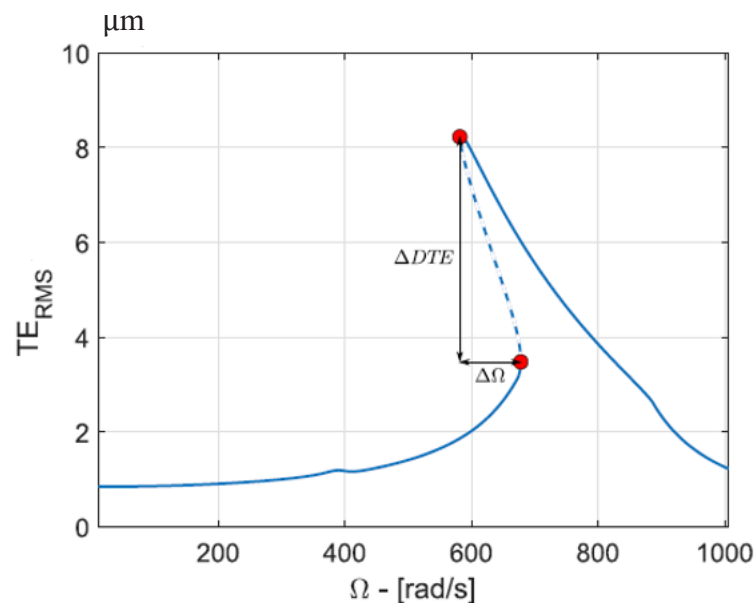


Figure 2 – Résonance non linéaire principale pour un engrenage sans dépouille ; réponses 1-T périodiques stable (trait continu) et instable (trait discontinu).

Par ailleurs, nous avons également procédé au suivi des points de bifurcation nœud-col avec comme paramètres de contrôle la fréquence de rotation  $\Omega$  et la valeur de la dépouille  $\mu$ . La figure 3 montre le résultat obtenu, et la figure 4 les projections du suivi sur les plans  $(\mu, \Omega)$  et  $(\mu, DTE)$ . On remarquera la disparition des points de bifurcation dans la bande  $\mu \in [2,4 ; 5,3] \mu\text{m}$ . Maintenant, l'idée maitresse sera d'exploiter le suivi afin de propager efficacement les incertitudes. C'est précisément l'objet du prochain paragraphe. Pour de plus amples détails de la démarche proposée, on pourra consulter [15].

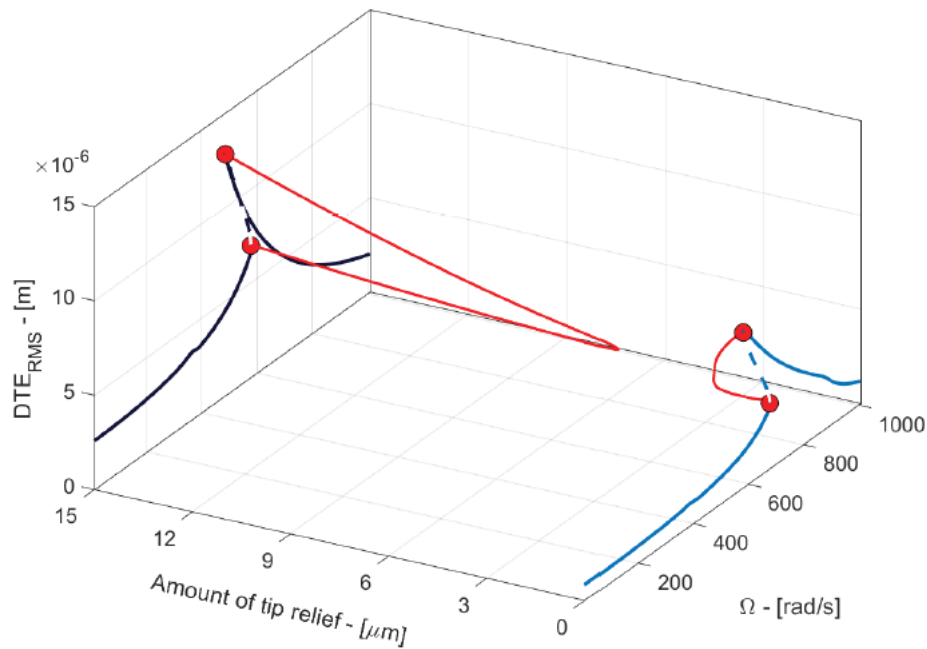


Figure 3 – Suivi de bifurcation dans l'espace  $(\mu, \Omega, DTE)$  en trait rouge.

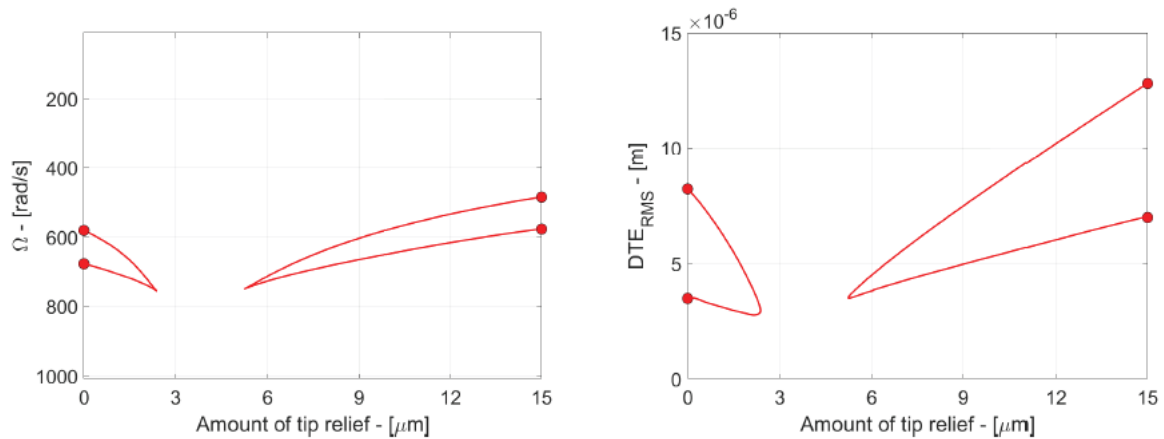


Figure 4 – Projections du suivi de bifurcation sur les plans  $(\mu, \Omega)$  et  $(\mu, DTE)$ .

#### 4. Incertitude et critères de sévérité

On suppose une certaine dispersion de la dépouille associée à la tolérance de fabrication. Ainsi, la valeur minimale choisie de la dépouille est comprise entre 0 et 10  $\mu m$ , et son étendue est de 10  $\mu m$ . Afin de la décrire sur son étendue, on considère plusieurs lois de probabilité  $p(\mu)$ , à savoir normale tronquée à  $6\sigma$ , uniforme, beta ( $\alpha = 2,5; \beta = 2$ ) et de Weibull ( $\lambda = 1,75; d = 2$ ). Vis-à-vis de la sévérité de la résonance principale, on s'intéresse aux deux grandeurs  $\Delta\Omega$  et  $\Delta DTE$  pour lesquels on introduit deux critères permettant de prendre en compte la distribution de la dépouille, à savoir :

$$C_{freq}(m) = \int_{\mu_{min}}^{\mu_{max}} \Delta\Omega(x)p(x)dx \quad (4)$$

$$C_{amp}(m) = \int_{\mu_{min}}^{\mu_{max}} \Delta DTE(x)p(x)dx \quad (5)$$

où  $m$  constitue la médiane de la dépouille  $\mu$ , telle que  $\int_{\mu_{min}}^m p(x)dx = \frac{1}{2}$ . La figure 5 présente les résultats obtenus pour l'ensemble des densités de probabilité testées. On présente également le résultat de l'optimisation standard basée sur le calcul de l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission notée  $STE_{pp}$  [8].

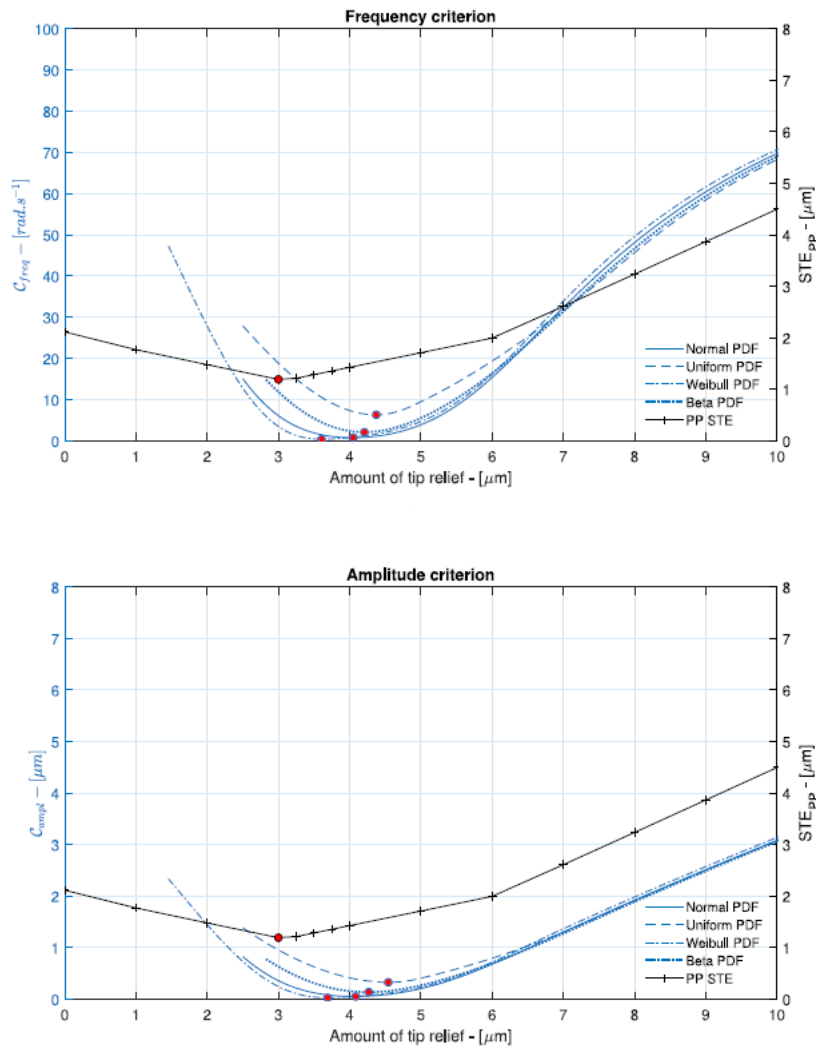


Figure 5 – Evolution des deux critères de sévérité en fonction de la médiane  $m$  de  $\mu$  pour les différentes densités de probabilité étudiées (courbes bleues). Amplitude crête à crête de l'erreur de transmission statique en fonction de la dépouille (courbe rouge).

Comme on peut le constater, les points optimaux se situent tous dans la bande de dépouille pour laquelle la non linéarité de la perte de contact ne s'exprime pas. Par ailleurs, ils sont systématiquement de valeurs plus élevées que le point optimum déduit du calcul statique classique. Que ce soit le critère en fréquence ou en amplitude, on constate également un résultat optimal très proche.

## 5. Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé une procédure numérique basée sur le suivi de bifurcations pour concevoir des modifications de profils de type dépouille de tête, en présence des dispersions dues aux tolérances de fabrication. L'approche proposée concerne la sévérité de la réponse dynamique d'une paire d'engrenages droits induite par la résonance principale non linéaire. Au regard de cette sévérité, et tenant compte de l'incertitude, nous pouvons ainsi proposer un choix optimal de la dépouille. La dispersion est prise en compte via des densités de probabilité de la dépouille. Quatre ont été considérées dans l'analyse. Dans tous les cas, nous constatons que la prise en compte des incertitudes conduit à une valeur optimale différente de celle obtenue à partir d'une approche classique basée sur des calculs statiques déterministes. En perspective, la procédure introduite pourrait être étendue à d'autres types de bifurcations (Neimark-Sacker, doublement de période), d'une part, et d'autre part à la conception de systèmes mécaniques autres que des engrenages.

## Références bibliographiques

- [1] D. Welbourn. Fundamental knowledge of gear noise. A survey, Proc. Of Conf. On Noise and Vibrations of engines and transmissions, C177/79, 9-29, 1979.
- [2] R.W. Gregory, S.L. Harris, G. R. G. Munro, Dynamic behaviour of spur gears, Proc. Inst. Mech. Eng. 178 (1) 207–218, 1963.
- [3] A. Carbonelli, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, Vibro-acoustic analysis of geared systems— Predicting and controlling the whining noise, in: Automotive NVH Technology, Springer International Publishing, Cham, pp. 63–79, 2016.
- [4] F. Pfeiffer, W. Prestl, Hammering in diesel-engine driveline systems, Nonlinear Dynam. 5 (4) 477–492, 1994.
- [5] A. Kahraman, R. Singh, Non-linear dynamics of a spur gear pair, J.S.V. 142 (1) 49–75, 1990.
- [6] A. Mélot, Y. Benaïcha, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, F. Thouverez, Effect of gear topology discontinuities on the nonlinear dynamic response of a multi-degree-of-freedom gear train, J. Sound Vib. 516, 116495, 2022.
- [7] M.S. Tavakoli, D.R. Houser, Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears, J. Mech., Transm., Autom. Des. 108 (1) 86–94, 1986.
- [8] P. Garambois, J. Perret-Liaudet, E. Rigaud, NVH robust optimization of gear macro and microgeometries using an efficient tooth contact model, Mech. Mach. Theory 117, 78–95, 2017.
- [9] A. Carbonelli, J. Perret-Liaudet, E. Rigaud, A. Le Bot, Particle swarm optimization as an efficient computational method in order to minimize vibrations of multimesh gears transmission, Adv. Acoust. Vib., Publisher: Hindawi Publishing Corporation 195642, 2011.
- [10] T. Tobe, K. Sato, Statistical analysis of dynamic loads on spur gear teeth, Bull. JSME 20 (145) 882–889, 1977.
- [11] N. Driot, E. Rigaud, J. Sabot, J. Perret-Liaudet, Allocation of gear tolerances to minimize gearbox noise variability, Acta Acust. United Acust. 87 (1), 67–76, 2001.
- [12] N. Driot, J. Perret-Liaudet, Variability of modal behavior in terms of critical speeds of a gear pair due to manufacturing errors and shaft misalignments, J. Sound Vib. 292 (3) 824–843, 2006.
- [13] A. Mélot, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, Bifurcation tracking of geared systems with parameter-dependent internal excitation, Nonlinear Dynamics 107 (1), 413-431 (2022)
- [14] N. Metropolis, S. Ulam, The Monte Carlo method, J.A.S.A. 44 (247) 335–341, 1949.
- [15] A. Mélot, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, Robust design of vibro-impacting geared systems with uncertain tooth profile modifications via bifurcation tracking, Int. J. of Non-Linear Mechanics, 149 (104336), 2023.