

Nouvelles conditions aux limites pour la simulation thermique stationnaire des procédés thermomécaniques

Y. Jia¹, Y. Saadlaoui², J-C. Roux², J-M. Bergheau²

¹ GeM, Ecole Centrale Nantes, yabo.jia@uphf.fr

² LTDS, UMR 5513 CNRS, Ecole Centrale Lyon-ENISE, France, {yassine.saadlaoui, jean-christophe.roux, jean-michel.bergheau}@enise.fr

Résumé — Par rapport aux méthodes analytiques (basées sur l'équation de Rosenthal), la méthode des éléments finis (FEM) fournit des résultats plus réalistes, car elle permet de prendre en compte davantage de phénomènes physiques impliqués dans les procédés thermomécaniques à haute température. Cependant, son temps de calcul est nettement plus long que celui des méthodes analytiques. Dans ce contexte, un nouveau modèle thermique, basé sur une simulation en régime stationnaire et des conditions aux limites inspirées analytiquement, est proposé pour prédire la morphologie du bain de fusion et la distribution de la température durant ces procédés.

Mots clés — simulation thermique stationnaire, conditions aux limites, procédé LBFM.

1 Introduction

La fabrication additive (FA) a attiré une attention considérable au cours des 20 dernières années [1], car les procédés de FA offrent une flexibilité de conception significative et des coûts raisonnables par rapport aux procédés conventionnels (usinage, fonderie, etc.), en particulier pour les petites séries. De plus, la FA permet la construction de structures géométriques complexes avec différents matériaux, tels que les métaux, la céramique, les plastiques, etc. Le contrôle des paramètres du procédé est nécessaire pour bien bénéficier des avantages des procédés de fabrication additive. En effet, ces paramètres peuvent affecter de manière significative la qualité des pièces fabriquées. Ils peuvent par exemple affecter la densité des pièces fabriquées et donc influencer leur comportement mécanique. Dans la littérature, l'optimisation des paramètres du procédé LPBF (vitesse de balayage, puissance, écart vecteur, épaisseur de la couche de poudre, densité de la poudre, etc.) pour réduire la porosité causée par un manque de fusion a toujours été un sujet de recherche très étudié [2]. Les effets de ces paramètres sur la morphologie du bain de fusion ont également été largement étudiés [3]. Ces études expérimentales peuvent être très coûteuses étant donné que les paramètres du procédé peuvent être nombreux [4]. Dans ce contexte, les méthodes numériques et analytiques peuvent être des solutions alternatives. Ils permettent d'optimiser ces paramètres et de prédire les caractéristiques finales des pièces fabriquées pour un coût et un délai raisonnables.

Les méthodes analytiques offrent la possibilité de tester certains paramètres du procédé, tels que la puissance du laser et la vitesse de balayage, et d'établir la relation entre ces paramètres et la taille du bain de fusion, ce qui permet de réduire le nombre d'essais expérimental à réaliser. Par exemple, les méthodes analytiques (calcul en régime stationnaire) peuvent fournir une estimation rapide de la dimension du bain de fusion et de la température stationnaire [5, 6]. Cependant, les équations analytiques et semi-analytiques reposent sur plusieurs hypothèses (telles que des propriétés thermophysiques constantes, pas de conditions aux limites, pas de pertes convectives et radiatives.), ce qui pourrait réduire sa précision et sa robustesse.

Dans ce contexte, les modèles thermo-fluides en régime transitoires [7] permettent de considérer des phénomènes physiques complexes tels que les interactions entre le fluide et le solide, les particules de poudre et l'évolution de la surface libre. Cependant, le coût de calcul de ces modèles reste très important. Par exemple, les modèles de Yan [8] nécessitaient environ 140 heures de calcul pour 4 ms de temps physique avec un processeur Intel Core i7-2600. Ce coût de calcul important est principalement lié à la simulation des écoulements du fluide dans le bain fondu. Pour cette raison, plusieurs modèles purement thermiques (sans écoulements du fluide) fournissant des prédictions précises de la morphologie du bain de fusion ont été développés [9]. Cependant, le temps de calcul des simulations transitoires purement thermiques [10]

reste encore nettement plus long que celui de la méthode analytique. Un large éventail de procédés de fabrication additive impliquant une source de chaleur se déplaçant à vitesse constante, tels que le procédé LPBF, conduisent à un état d'équilibre thermique rapide. Des modèles en régime stationnaire peuvent ainsi être utilisés pour simuler ces procédés. Il existe un très grand écart entre la taille des éléments appliquée dans la simulation LPBF et la géométrie de la pièce, de sorte qu'une analyse thermique transitoire reste très coûteuse en raison de l'énorme raffinement du maillage requis. Par rapport à l'analyse thermique transitoire, la simulation en régime stationnaire en résolvant l'équation de convection-diffusion [11] est plus efficace sur le plan informatique car le raffinement du maillage n'est requis qu'autour de la source de chaleur. De plus, la solution peut être obtenue en une seule étape. Ces caractéristiques rendent la méthode directe en régime stationnaire intéressante pour prédire la morphologie du bain de fusion avec différents paramètres de procédé. Cependant, des conditions de régime stationnaire doivent être remplies (par exemple, une géométrie longue doit être utilisée) pour ce type de simulation. Ainsi, le coût de calcul peut devenir important, même dans le cas de simulation en régime stationnaire. Par conséquent, de nouvelles conditions aux limites en régime permanent adaptées à la géométrie courte, permettant une prévision précise de la température en régime stationnaire avec une efficacité maximale, font toujours défaut.

À cet égard, cette étude propose un modèle en régime stationnaire avec de nouvelles conditions aux limites dédiées pour simuler les procédés thermomécaniques (le procédé LPBF est choisi comme procédé d'application). Le modèle stationnaire proposé permet de prendre en compte non seulement les propriétés des matériaux dépendant de la température, une distribution gaussienne de la source de chaleur, les pertes de chaleur et la chaleur latente de fusion-solidification, mais également la transition poudre-compacte. L'effet de la convection thermique dans le bain de fusion (via l'approche de conductivité thermique améliorée anisotrope [12]) est également pris en compte par le modèle. De plus, des conditions aux limites inspirées de manière analytique sont proposées pour permettre une prédiction précise de la distribution de température en régime permanent, même avec des géométries assez courtes.

2 Modélisation des conditions aux limites

2.1 Simulation thermique stationnaire

Le modèle en régime stationnaire proposé est basé sur la méthode de référence mobile (MRF) [13, 14]. Cette méthode a été appliquée avec succès aux simulations de soudage et de traitement de surface en régime stationnaire. Une explication détaillée de la méthode MRF est présentée par Yabo et al. [15].

2.2 Conditions aux limites classiques

Idéalement, les conditions aux limites du régime permanent sur les faces amont et aval devraient satisfaire les conditions thermiques à l'infini amont et aval. Ces conditions sont :

- Température imposée à température ambiante qui est censée être la température du métal avant et après fabrication : $T = T_0$.
- Flux thermique de conduction égal à zéro : $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0$.

Cependant, il n'est pas possible d'imposer les deux conditions sur une seule surface. Il faut donc choisir quelle condition imposer à chaque face, et les conditions aux limites du modèle stationnaire sont généralement considérées comme suit :

- Amont : Température imposée à température ambiante : $T = T_0$.
- En aval : Flux thermique de conduction égal à zéro : $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0$.

Ces conditions aux limites seront notées « conditions aux limites classiques » dans les sections suivantes. En plus de renforcer fortement la condition amont sur la face amont, un soin particulier doit être pris pour déterminer la distance entre la source de chaleur et la face amont du maillage. La distance choisie doit être suffisamment longue pour satisfaire $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \approx 0$ sur la face amont, et ainsi garantir que la température imposée sur la face amont n'affectera pas la distribution de température en régime permanent donnée par le modèle.

Pour imposer la condition aval sur la face aval, il faut considérer un maillage suffisamment long pour permettre au corps de se refroidir à température ambiante. Notant que si seule la condition de flux

thermique à conduction nulle est imposée, rien ne garantit que la température atteindra la température ambiante sur la face aval.

2.3 Conditions aux limites proposées

Pour résoudre les difficultés évoquées ci-dessus, de nouvelles conditions aux limites dédiées sont proposées pour le modèle en régime stationnaire. Ces nouvelles conditions sont basées sur une solution analytiquement inspirée de l'équation de transfert de chaleur 1D en dehors du maillage. Une condition de type Fourier est imposée sur les surfaces aval et amont pour modéliser l'échange thermique entre la géométrie considérée et le volume au-delà de la géométrie. Pour formuler ces conditions, on suppose qu'en dehors du domaine de calcul, la distribution de température est uniaxiale. Par conséquent, la température est supposée uniforme dans toute section orthogonale au trajet de la source de chaleur et les propriétés thermiques sont constantes en dehors du domaine.

Considérons le modèle suivant pour la zone au-delà de la face amont (comme le montre la Fig. 1), et \mathbf{W} représente le vecteur de la vitesse du matériau. On peut noter que pour cette situation, on a l'équation 1 :

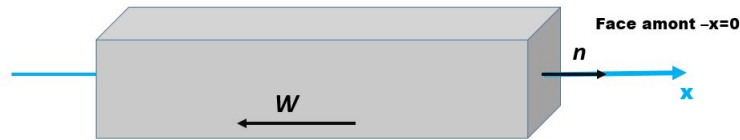


FIGURE 1 – Modèle en amont.

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= -W\mathbf{e}_x \text{ with } W > 0 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{e}_x \\ \frac{dT}{dn} &= \frac{dT}{dx}(x=0)\end{aligned}\quad (1)$$

La distribution de la température $T(x)$ for $x \in [0; +\infty[$ est régi par l'équation suivante (2) :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \rho CW \frac{dT}{dx} + K(T_0 - T) = 0 \quad (2)$$

Dans l'équation (2), le terme $K(T_0 - T)$ modélise la condition de refroidissement avec l'air ambiant à travers la surface extérieure du modèle. Le coefficient d'échange thermique volumétrique K est défini à partir du coefficient d'échange thermique surfacique H (simplement égal à h_{conv}) appliqué à la surface de la pièce comme suit l'équation (3) :

$$K = H \frac{P}{S} \quad (3)$$

où P est le périmètre et S est la surface de la surface amont.

La solution de l'équation (2) ci-dessus est donné par l'équation (4) :

$$T(x) = T_0 + Ae^{(\alpha-\beta)x} + Be^{(\alpha+\beta)x} \quad (4)$$

où $\alpha = -\frac{\rho CW}{2\lambda}$ et $\beta = \frac{\sqrt{(\rho CW)^2 + 4K\lambda}}{2\lambda} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{K}{\lambda}}$, où A et B sont deux constantes. Il est à noter que $\alpha - \beta < 0$ et $\alpha + \beta > 0$.

Parce qu'il devrait avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = T_0$, ce qui suit que $B = 0$, et donc (Eq. 5)

$$T(x) = T_0 + Ae^{(\alpha-\beta)x} \quad (5)$$

De l'équation. (5), Éq. (6) se déduit sur la face amont :

$$\lambda \frac{dT}{dn} = \lambda \frac{dT}{dx}(x=0) = \lambda A(\alpha - \beta) \quad (6)$$

En éliminant A de l'équation. (5) pour $x = 0$, finalement la condition aux limites est obtenue pour s'appliquer à la **face amont** comme suit (Eq. 7) :

$$\lambda \frac{dT}{dn} = \lambda(\beta - \alpha) (T_0 - T(x = 0)) \quad (7)$$

Considérons maintenant le modèle suivant pour le volume au-delà de la face aval (Fig. 2). Pour cette situation, on a l'équation (8) :

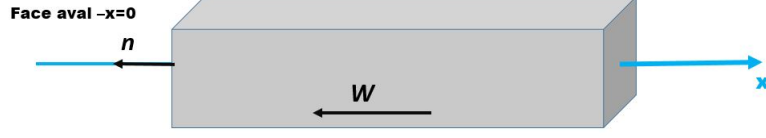


FIGURE 2 – Modèle en aval.

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= -W\mathbf{e}_x \text{ with } W > 0 \\ \mathbf{n} &= -\mathbf{e}_x \\ \frac{dT}{dn} &= -\frac{dT}{dx}(x = 0) \end{aligned} \quad (8)$$

La distribution de température $T(x)$ pour $x \in [-\infty; 0[$ est toujours régi par l'équation (2). La solution de l'équation (2) est donné par l'équation (4). Parce qu'il devrait maintenant avoir $\lim_{x \rightarrow -\infty} T(x) = T_0$, il s'ensuit que $A = 0$; par conséquent, l'équation (4) peut être exprimée par l'équation (9) :

$$T(x) = T_0 + Be^{(\alpha+\beta)x} \quad (9)$$

De l'équation (9), on peut en déduire l'équation (10) :

$$\lambda \frac{dT}{dn} = -\lambda \frac{dT}{dx}(x = 0) = -\lambda B(\alpha + \beta) \quad (10)$$

En éliminant B de l'équation (9) pour $x = 0$, la condition aux limites qui s'applique à la **face aval** s'écrit (Eq. (11)) :

$$\lambda \frac{dT}{dn} = \lambda(\alpha + \beta) (T_0 - T(x = 0)) \quad (11)$$

Il est à noter que si le maillage utilisé est suffisamment long pour satisfaire $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \approx 0$ sur la face amont ou aval, il a en même temps $T \approx T_0$.

3 Modèle numérique

Dans cette section, des modèles numériques de simulations LPBF à mono-cordon sont présentés. Des comparaisons entre les simulations transitoires et les simulations en régime stationnaire réalisées sur des géométries de différentes longueurs (pour les matériaux Inconel718 et AlSi10Mg) sont effectuées pour vérifier l'efficacité de l'approche proposée. La figure 3 montre la coupe transversale du modèle et les conditions aux limites thermiques. Le logiciel d'élément fini SYSWELD TM [16] est utilisé dans cette étude.

Des matériaux à haute diffusivité (AlSi10Mg) et à faible diffusivité (Inconel 718) ont été étudiés dans ce travail. Les propriétés thermiques de l'AlSi10Mg et de l'Inconel 718 ont été obtenues à partir de la littérature [17, 18]. Les propriétés du matériau à l'état poudre est donnée par Jia et al. [15]. Pour prendre en compte la chaleur latente de l'Inconel 718 ($L_f=210 \text{ kJ.kg}^{-1}$) et de l'AlSi10Mg ($L_f=435 \text{ kJ.kg}^{-1}$), la méthode de la capacité thermique apparente est utilisée pour incorporer la chaleur latente due au changement de phase entre le solide et le liquide [19]. Par conséquent, la chaleur spécifique modifiée est calculée entre la plage de températures de solidification et de fusion (équation 12).

$$C_{modified} = \begin{cases} C_{compact} & \text{for } T < T_s \\ L_f \sqrt{\frac{1}{2\pi(\Delta T_m/a)^2}} \exp\left(-\frac{(T - T_c)^2}{2(\Delta T_m/a)^2}\right) + C_{compact} & \text{for } T_s < T < T_l \\ C_{compact} & \text{for } T > T_l \end{cases} \quad (12)$$

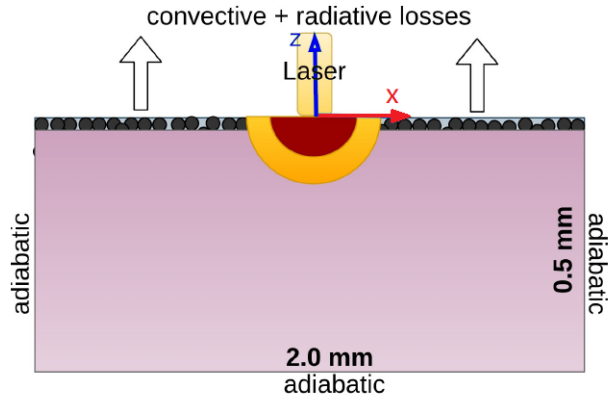


FIGURE 3 – Modèle et conditions aux limites thermique : section transversale. [15]

où $C_{compact}$, T_s et T_l représentent respectivement la chaleur spécifique de l'état compact, les températures de solidus et de liquidus. $\Delta T_m = T_l - T_s$ et $T_c = \frac{T_l + T_s}{2}$. a est un facteur supérieur à 1.

Une source de chaleur gaussienne 3D (équation 13) a également été utilisée pour décrire l'apport de chaleur lié au faisceau laser.

$$Q(x, y, z) = n \frac{2\eta P}{\pi R_0^2 \Psi} \exp\left(-\frac{2R^2}{R_0^2}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{\Psi}\right) \quad (13)$$

où Ψ représente la profondeur de pénétration laser de la poudre, qui correspond à l'épaisseur initiale du lit de poudre.

La figure 4 montre les deux géométries utilisées dans cette étude. Des maillages 3D sont générés en propageant la coupe transversale 2D du maillage dans la direction de balayage. La géométrie longue est préparée pour le modèle transitoire et le modèle stationnaire. Le modèle transitoire implique une source de chaleur mobile et nécessite un affinement du maillage le long du trajet de la source de chaleur. Le modèle stationnaire considère une source de chaleur fixe par rapport au maillage et nécessite donc un affinement du maillage uniquement autour de l'emplacement de la source de chaleur. La longueur d'élément la plus petite dans la direction de balayage laser est de $5\mu\text{m}$ pour les deux modèles. En raison des nouvelles conditions aux limites spécifiques, une géométrie courte est également utilisée pour la simulation stationnaire.

4 Résultats et discussion

Une comparaison des résultats numériques des modèles stationnaire et transitoire est proposée pour valider les simulations stationnaires. La géométrie longue (voir 4) a été utilisée pour simuler le procédé LPBF avec l'Inconel 718 et l'AlSi10Mg. À la fois les pertes par convection et par rayonnement ont été prises en compte [15], et les températures initiales et ambiantes ont été fixées à 20 degrés. Les paramètres du procédé utilisés dans cette section sont ceux utilisés par Yabo et Al. [15]. Les températures de fusion d'Inconel 718 et d'AlSi10Mg sont respectivement de 1350 degrés et 570 degrés. Par exemple, la figure 5 montre la distribution de température donnée par les modèles transitoire et stationnaire pour l'AlSi10Mg. Une bonne corrélation est trouvée. Pour le bain fondu, une différence relative maximale de 2,77% pour l'AlSi10Mg est trouvée.

La distribution de température de d'Inconel 718, simulée en imposant les différentes conditions aux limites, n'ont montré aucune différence significative en raison de sa faible diffusivité. Cependant, comme le montre la figure 6, les conditions aux limites affectent beaucoup la distribution de température pour l'AlSi10Mg (diffusivité importante). En effet, le modèle stationnaire avec des conditions aux limites classiques a sous-estimé la distribution de température. Cela peut être expliqué par le fait que les conditions aux limites classiques imposaient une température ambiante sur la face amont. Les comparaisons montrent que le modèle stationnaire avec les conditions aux limites proposées peut assurer un bon accord avec le calcul transitoire, indépendamment de la diffusivité du matériau.

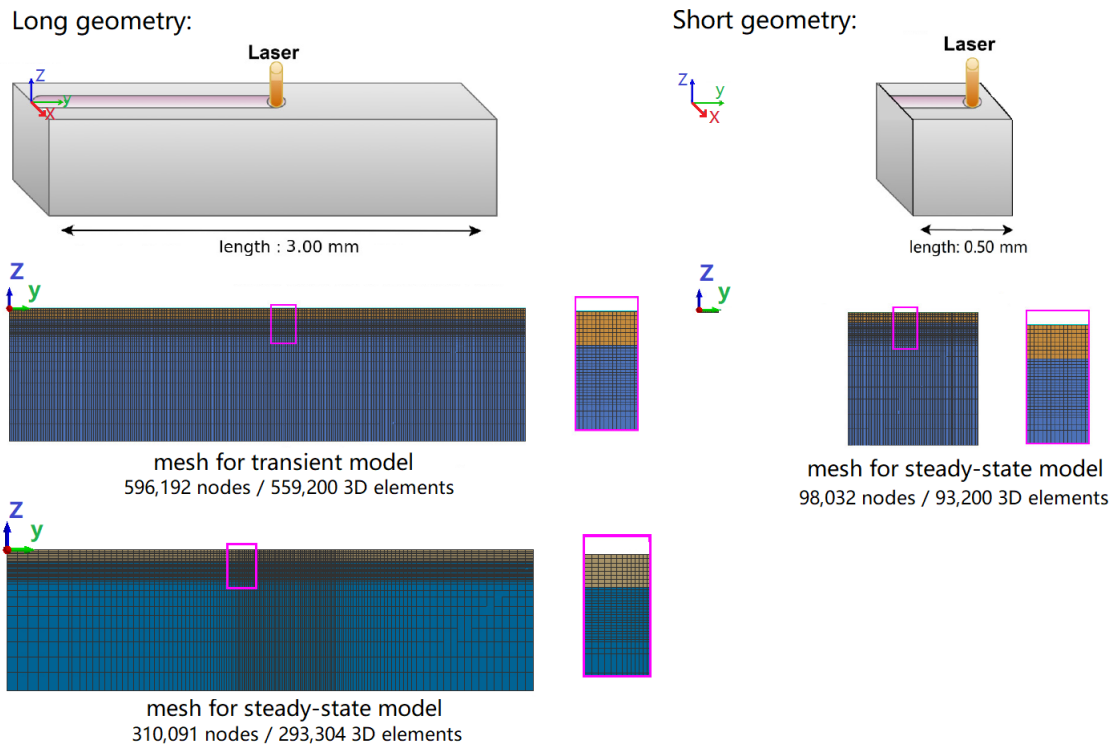


FIGURE 4 – Maillages pour courte et longue géométries.[15]

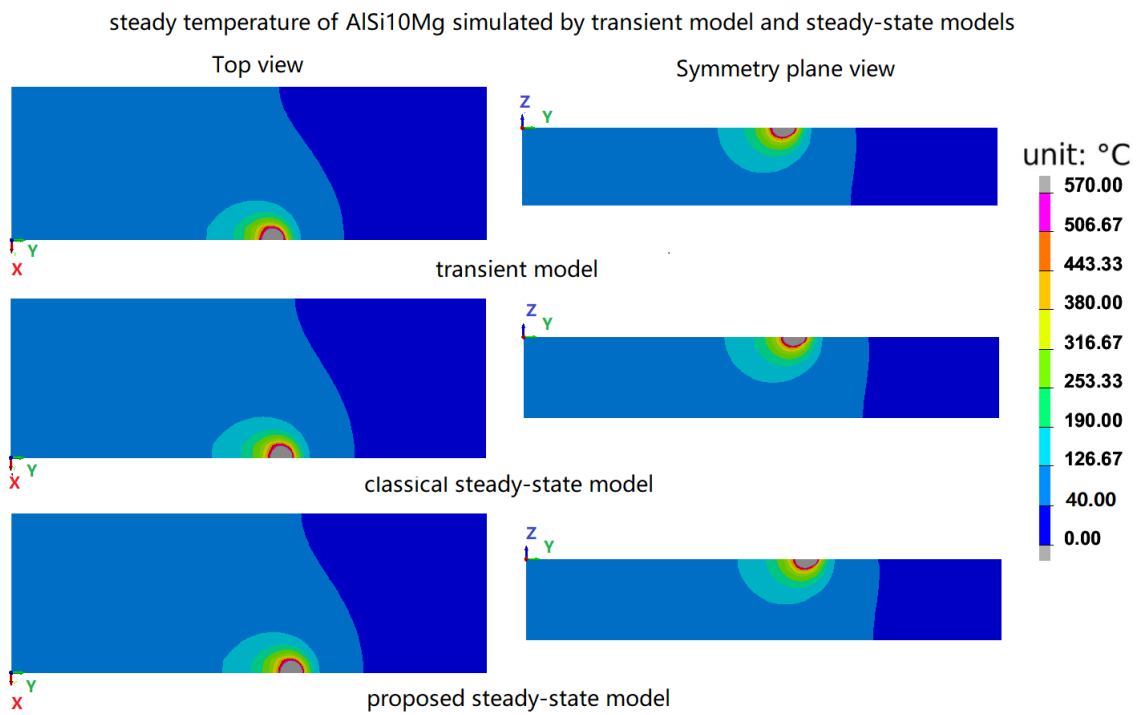


FIGURE 5 – Température stationnaire de l'AlSi10Mg : modèle transitoire, modèle stationnaire avec conditions aux limites classiques, modèle stationnaire avec conditions aux limites proposées.[15]

steady temperature of AlSi10Mg simulated by transient model and short steady-state models

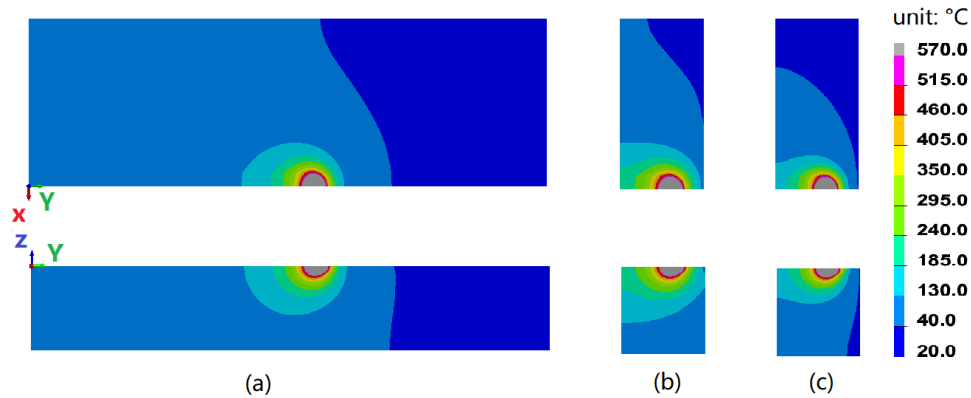


FIGURE 6 – Température stationnaire de l’AlSi10Mg : (a) modèle transitoire, (b) modèle court stationnaire avec conditions aux limites classiques, (c) modèle court stationnaire avec conditions aux limites proposées.[15]

5 Conclusions

Dans cette étude, un modèle thermique stationnaire basé sur des nouvelles conditions aux limites est proposé pour simuler les procédés thermomécaniques impliquant une source de chaleur mobile, tels que le procédé LPBF. Le modèle prend en compte différents phénomènes physiques (propriétés des matériaux dépendant de la température, distribution gaussienne de la source de chaleur, pertes de chaleur par convection et par rayonnement, enthalpie due aux changements d’état et transition compacte de poudre, etc.). La technique de conductivité thermique anisotrope a également été mise en œuvre pour améliorer la prédiction de la profondeur du bain fondu. Les résultats ont montré l’efficacité et la robustesse du modèle proposé. En effet, une bonne corrélation a été trouvée entre les résultats du modèle transitoire (modèle référence) et ceux du modèle stationnaire proposé même avec un maillage court. En plus, le coût du calcul a été divisé par 4 par rapport le modèle stationnaire classique et par 90 par rapport le modèle transitoire.

Références

- [1] S.H. Huang, P. Liu, A. Mokasdar, L. Hou, Additive manufacturing and its societal impact : a literature review. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 67 (2013) 1191-1203. <https://doi.org/10.1007/s00170-012-4558-5>.
- [2] A.K. Singla, M. Banerjee, A. Sharma, J. Singh, A. Bansal, M.K. Gupta, N. Khanna, A.S. Shahi, D.K. Goyal, Selective laser melting of Ti6Al4V alloy : process parameters, defects and post-treatments. *J. Manuf. Process.* 64 (2021) 161-187. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.01.009>.
- [3] Y. Saadlaoui, J. Sijobert, M. Doubenskaia, P. Bertrand, E. Feulvarch, J.-M. Bergheau, Experimental Study of Thermomechanical Processes : Laser Welding and Melting of a Powder Bed. *Crystals* 10 (2020). <https://doi.org/10.3390/cryst10040246>.
- [4] J. Trapp, A.M. Rubenchik, G. Guss, M.J. Matthews, In situ absorptivity measurements of metallic-powders during laser powder-bed fusion additive manufacturing. *Appl. Mater. Today* 9 (2017) 341-349. <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2017.08.006>.
- [5] D. Rosenthal, Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting. *Weld. J.* 20(5) (1941) 220-34.
- [6] J. Ning, E. Mirkoohi, Y. Dong, D.E. Sievers, H. Garmestani, S.Y. Liang, Analytical modeling of 3D temperature distribution in selective laser melting of Ti-6Al-4V considering part boundary conditions, *J. Manuf. Process* 44 (2019) 319-326. [10.1016/j.jmapro.2019.06.013](https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2019.06.013).
- [7] Y. Saadlaoui, E. Feulvarch, A. Delache, J.-B. Leblond, J.-M. Bergheau, A new strategy for the numerical modeling of a weld pool. *Compt. Rendus. Mec.* 346 (2018) 999-1017. ISSN 1631-473 0721. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2018.08.007>.
- [8] W. Yan, Y. Qian, W. Ma, B. Zhou, Y. Shen, F. Lin, Modeling and Experimental Validation of the Electron Beam Selective Melting Process. *Engineering* 3 (2017) 701-707. <https://doi.org/10.1016/J.ENG.2017.05.021>.

- [9] Y. Jia, Y. Saadlaoui, J.-M. Bergheau, A Temperature-Dependent Heat Source for Simulating Deep Penetration in Selective Laser Melting Process. *Appl. sci.* 11 (2021) 11406. <https://doi.org/10.3390/app112311406>.
- [10] P. Gh Ghanbari, E. Mazza, E. Hosseini, Adaptive local-global multiscale approach for thermal simulation of the selective laser melting process, *Addit. Manuf.* 36 (2020) 101518. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101518>.
- [11] J.-M. Bergheau and Fortunier, R. Finite element simulation of heat transfer. John Wiley & Sons, (2013).
- [12] A.M. Kamara, W. Wang, S. Marimuthu, L. Li, Modelling of the Melt Pool Geometry in the Laser Deposition of Nickel Alloys Using the Anisotropic Enhanced Thermal Conductivity Approach. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engine. Manuf.* 225 (2011) 87-99. doi :10.1177/09544054JEM2129.
- [13] J.-M. Bergheau, R. Vincent, F. Boitout, Finite Element Simulation of Processes Involving Moving Heat Sources. Application to Welding and Surface Treatment. *J. Shanghai Jiaotong Univ, E-5* (2000) 114-122.
- [14] J.-M. Bergheau, D. Pont, J.-B. Leblond, Three-dimensional simulation of a LASER surface treatment through steady state computation in the heat source comoving frame, *Mechanical Effects of Welding, IUTAM Symposium Lulea*, edited by L. Karlsson, L.-E. Lindgren, M. Jonsson, Springer-Verlag, (1992) 85-92.
- [15] Y. Jia, Y. Saadlaoui, J-C. Roux, J-M. Bergheau, Steady-state thermal model based on new dedicated boundary conditions-application in the simulation of laser powder bed fusion process. *Applied Mathematical Modelling* 112 (2022) 749-766.
- [16] Software SYSWELD Version 2021 ; ESI-Group : Lyon, France, 2021.
- [17] P. Promopattam, S.C. Yao, P.C. Pistorius, A.D. Rollett. A Comprehensive Comparison of the Analytical and Numerical Prediction of the Thermal History and Solidification Microstructure of Inconel 718 Products Made by Laser Powder-Bed Fusion, *Engineering* 3 (2017) 685-694, ISSN 2095-8099, <https://doi.org/10.1016/J.ENG.2017.05.023>.
- [18] T. Mukherjee, H.L. Wei, A. De, T. DebRoy, Heat and fluid flow in additive manufacturing Part II : Powder bed fusion of stainless steel, and titanium, nickel and aluminum base alloys, *Comput. Mater. Sci.* 50 (2018) 369-380. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2018.04.027>.
- [19] C. Bonacina, G. Comini, A. Fasano, M. Primicerio, Numerical solution of phase change problems. *Int. J. Heat Mass Transfer* 16 (1973) 1825-32. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(73\)90202-0](https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90202-0).