

Accélération des calculs du contact en éléments finis par \mathcal{H} -matrices

V.A. Yastrebov¹, Z.-Q. Feng²

¹ Centre des matériaux, MINES Paris - PSL, CNRS UMR 7633, vladislav.yastrebov@minesparis.psl.eu

² LMEE Univ-Evry, Université Paris-Saclay, zhiqiang.feng@univ-evry.fr

Résumé — Les méthodes directes en mécanique du contact reposent sur la construction de matrices de flexibilité pleines pour des corps discrétisés pouvant entrer en contact. Bien que ces méthodes soient reconnues pour leur robustesse et leur précision, elles présentent plusieurs inconvénients qui les écartent des méthodes de pointe actuelles. En particulier, elles sont très intrusives, difficiles à paralléliser, et surtout, la construction et la résolution des matrices de rigidité pleines sont extrêmement coûteuses en termes de calculs, notamment en 3D. Afin de réduire ces coûts, nous proposons l'utilisation de matrices hiérarchiques, également connues sous le nom de \mathcal{H} -matrices. Différentes techniques de construction sont proposées et comparées ; la performance de l'algorithme résultant est également évaluée en la contrastant avec des techniques classiques où le contact constitue une part intégrale de la convergence globale via la méthode de Newton.

Mots clés — contact, éléments finis, méthodes directes, \mathcal{H} -matrices.

1 Introduction

Le problème du contact avec frottement demeure un problème difficile à résoudre et constitue souvent un goulot d'étranglement dans les simulations numériques en ingénierie. Formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalité, le problème du contact peut être abordé par des techniques classiques telles que la méthode de pénalisation, les multiplicateurs de Lagrange, le Lagrangien augmenté, entre autres [1, 2]. Ces méthodes, formulées dans un cadre de forme faible continue, s'adaptent efficacement aux problèmes approchés par les éléments finis, notamment grâce à l'intégration de méthodes de gestion des contraintes à l'interface de contact : nœud-à-nœud, nœud-à-segment, ou segment-à-segment. De plus, dans le cas des problèmes mixtes impliquant des variables duales (tels que les multiplicateurs de Lagrange pour modéliser les efforts de contact surfaciques), un choix judicieux des sous-espaces fonctionnels pour ces variables duales est requis, conformément aux conditions de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB). Ces différentes approches sont largement répandues et employées dans la majorité des logiciels d'éléments finis, tant maison que commerciaux.

Cependant, les problèmes du contact peuvent également être formulés différemment, en considérant les efforts de contact comme des forces externes, déterminées à travers un problème auxiliaire. La forme faible classique du problème se présente alors comme suit (cf. Fig. 1(a)) :

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Gamma_1^N \cup \Gamma_2^N} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{v} ds - \underbrace{\int_{\Gamma_1^c \cup \Gamma_2^c} \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{v} dS}_{\text{travail virtuel des forces de contact}} = 0, \quad (1)$$

où Ω_i , $i = 1, 2$, représentent deux solides, Γ_i^N la frontière avec des conditions de Neumann $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_0$, \mathbf{n} étant le vecteur normal sortant, \mathbf{f}_v les forces volumiques, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ les tenseurs de Cauchy et de déformation infinitésimale, respectivement, définis pour le champ de déplacement \mathbf{u} et le champ de fonctions test \mathbf{v} , pris dans des espaces fonctionnels appropriés de manière à satisfaire les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_i^D :

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{U} = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega_i), \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Gamma_i^D \}, \quad \mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega_i), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_i^D \}$$

Ici, $\mathcal{H}^1(\Omega)$ représente un espace de Sobolev d'ordre 1 avec une norme L_2 (c'est-à-dire, un espace de Hilbert, un espace de fonctions dont le carré est intégrable ainsi que les carrés de leurs premières dérivées).

Ainsi, la principale difficulté réside dans la détermination des efforts de contact \mathbf{t}_c sur les frontières de contact Γ_i^c , qui peuvent être obtenus via un problème auxiliaire, développé dans la section suivante.

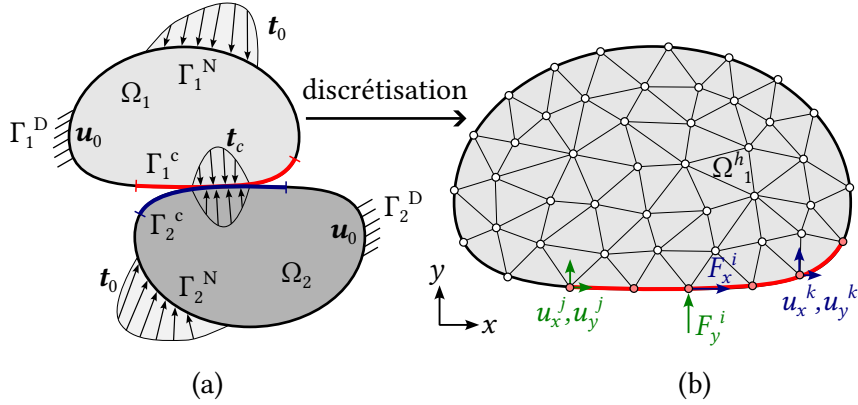


FIGURE 1 – Description du problème de contact avec conditions aux limites : (a) cas continu, (b) représentation discrétisée Ω_1^h du corps Ω_1 , illustrant les forces surfaciques et le déplacement résultant.

2 Problème auxiliaire pour les efforts de contact

Le problème auxiliaire, distinct du problème principal, vise à déterminer les efforts de contact pour des conditions aux limites données. En considérant les conditions de contact de Hertz-Signorini-Moreau ou KKT :

$$g \geq 0, \quad \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n} \leq 0, \quad g(\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}) = 0,$$

où g est la séparation (“gap”) entre un point $\mathbf{x}_1 \in \Gamma_1^c$ et le point le plus proche $\mathbf{x}_2^p(\mathbf{x}_1) \in \Gamma_2^c$ (d’autres types de projections peuvent être utilisés), qui doit rester positive. $\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}$ est la contrainte normale de contact, qui doit rester négative. La première condition de non-pénétration peut être explicitée dans le cas d’une projection normale comme suit :

$$g(\mathbf{x}_1, \Gamma_2) = [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2^p(\mathbf{x}_1)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_2^p) = [\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2^p(\mathbf{x}_1)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_2^p) + g_0(\mathbf{x}_1) \geq 0, \quad (2)$$

où $g_0(\mathbf{x}_1) = [\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2^p(\mathbf{x}_1)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_2^p)$ représente la séparation initiale, et $\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i$ décrit le passage de la configuration de référence \mathbf{X} à une configuration actuelle \mathbf{x} via le déplacement \mathbf{u} . Les déplacements à la surface peuvent être exprimés par des opérateurs intégraux, inspirés par la méthode des éléments de frontière, une idée, dans ce contexte, remontant à l’article [3]. Le déplacement des points sur la surface Γ_i^c , sous l’effet d’une force concentrée \mathbf{f} appliquée en $\mathbf{x}_a \in \Gamma_i^c$, peut être exprimé comme :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_i^c, \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_a) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_a),$$

où $\mathbf{G}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est une fonction tensorielle d’ordre deux. Sa forme exacte demeure indéfinie et peut seulement être approximée explicitement dans des cas très simples, mais ce détail n’influence pas la méthodologie, qui repose principalement sur le problème discrétisé. Contrairement aux éléments de frontière formulés pour un massif semi-infini, où l’opérateur de ce type est invariant par translation, ici, pour des corps de taille finie, cela n’est pas le cas. Ainsi, les deux arguments $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}'\}$ ne peuvent pas être simplement réduits à un seul représentant leur différence $\{\mathbf{x} - \mathbf{x}'\}$. En supposant que le principe de superposition demeure valide, on peut isoler le déplacement normal et son lien avec la pression de contact :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_i^c, \quad u_{i,n}(\mathbf{x}) = G_{i,n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_a) f_n(\mathbf{x}_a),$$

où $u_{i,n} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}$ représente le déplacement normal, f_n la valeur de la force normale et $G_{i,n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{n}$. Pour des efforts distribués de contact \mathbf{t}_c , la forme intégrale émerge :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_i^c, \quad u_{i,n}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_i^c} G_{i,n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') t_{c,n}(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') \quad (3)$$

Intégrant cette forme dans la condition de non-pénétration (2), nous obtenons l'équation intégrale suivante, ramenée à la surface Γ_1^c :

$$\int_{\Gamma_1^c} [G_{1,n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}') - G_{2,n}(\mathbf{x}_2^p(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}')] t_{c,n}(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') + g_0(\mathbf{x}_1) \geq 0. \quad (4)$$

Cette condition doit être complétée par la négativité de la contrainte normale de contact $t_{c,n} = \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n} \leq 0$ et par la condition complémentaire $t_{c,n}g = 0$ sur l'intégralité de Γ_1^c .

3 Problème auxiliaire discretisé

Le problème auxiliaire, formulé dans un contexte continu, peut être reformulé dans le cadre des éléments finis via des matrices de flexibilité. L'idée est illustrée dans la Fig. 1(b) : une force appliquée au nœud i induira des déplacements dans tout le corps, mais notre intérêt se porte sur les nœuds de la surface $\Gamma_1^{c,h}$ susceptibles d'être en contact avec $\Gamma_2^{c,h}$. Ainsi, nous exprimons les déplacements de tous les nœuds de $\Gamma_1^{c,h}$ pour une force normale et tangentielle appliquée successivement à chaque nœud de cette surface. Dans ce cas, l'équation (3) peut être réécrite de manière très générale sous la forme suivante :

$$u_x^{j,y} = S_{ji}^{1,xy} F_y^i, \quad u_y^{j,y} = S_{ji}^{1,yy} F_y^i, \quad u_x^{j,x} = S_{ji}^{1,xx} F_x^i, \quad u_y^{j,x} = S_{ji}^{1,yx} F_x^i, \quad (5)$$

où $u_x^{j,y}$, par exemple, représente le déplacement le long de OX au nœud j induit par une force F_y^i le long de OY appliquée au nœud i , $S^{1,xy}$ est une matrice de flexibilité dont la composante $S_{ji}^{1,xy}$ établit le lien entre ce déplacement et cette force en absence d'autres efforts ; dans le cas contraire, le déplacement résultant représente un incrément de déplacement à ajouter au déplacement de ce même nœud induit par d'autres efforts. Les indices $i, j \in [1, N_1]$ parcourent tous les N_1 nœuds de la surface $\Gamma_1^{c,h}$. Ces quatre équations peuvent être reformulées sous une forme tensorielle :

$$\mathbf{u}^j = \mathbf{S}_{ji}^1 \cdot \mathbf{F}^i, \quad \mathbf{S}_{ji}^1 = S_{ji}^{1,xy} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + S_{ji}^{1,yy} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + S_{ji}^{1,xx} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + S_{ji}^{1,yx} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x. \quad (6)$$

Le corps Ω_2^h et sa surface potentielle de contact $\Gamma_2^{c,h}$ ont leur propre matrice de flexibilité \mathbf{S}_{kl}^2 , avec $k, l \in [1, N_2]$ où N_2 est le nombre de nœuds de la surface $\Gamma_2^{c,h}$.

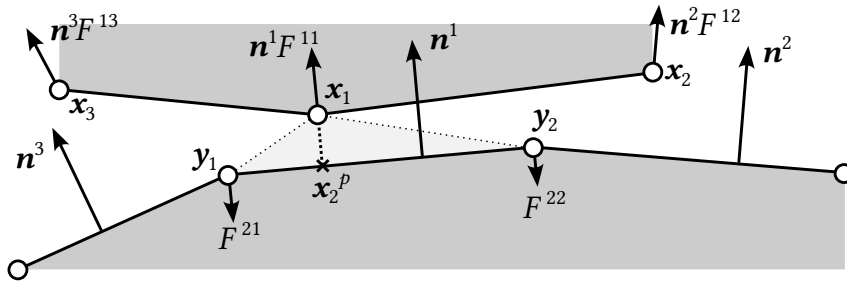


FIGURE 2 – Éléments de contact illustrant les forces surfaciques appliquées et les déplacements résultants.

Localement, dans les éléments de contact et comme illustré dans la Fig. 2, la condition de non-pénétration peut être formulée classiquement comme :

$$g(\mathbf{x}_1) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2^p) \cdot \mathbf{n}^1 \geq 0, \quad \mathbf{x}_2^p = \sum_{i=1}^{N_2} N_i(\xi^{p,1}) \mathbf{y}_i, \quad (7)$$

où la coordonnée de projection $\xi^{p,1}$ est trouvée par minimisation de $\mathcal{F}(\xi) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2(\xi))^2$. En intégrant les matrices de flexibilité, l'équation (7) se transforme pour chaque élément de contact en :

$$g(\mathbf{x}_1) = \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{S}_{1i}^1 \cdot \mathbf{n}^i F^{1i} - N_1(\xi^{p,1}) \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{S}_{1j}^2 \cdot \mathbf{n}^j F^{2j} - N_1(\xi^{p,1}) \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{S}_{2j}^2 \cdot \mathbf{n}^j F^{2j} + g_0(\mathbf{x}_1) \geq 0. \quad (8)$$

Cependant, comme les efforts F^{2j} sur la surface maître $\Gamma_2^{c,h}$ ne sont pas indépendants mais peuvent être identifiés de manière unique par les efforts F^{1i} sur la surface esclave $\Gamma_1^{c,h}$ pour des projections ξ^p données, l'équation (8) peut être réécrite comme :

$$g(\mathbf{x}_1) = W_{1j}F^{1j} + g_0(\mathbf{x}_1) \geq 0, \quad (9)$$

où la forme du vecteur W_{1j} (une colonne de la matrice globale W_{ij}) n'est pas explicitée mais dépend de la configuration de l'ensemble du contact, notamment de tous les vecteurs normaux \mathbf{n}^j et de toutes les projections $\xi^{p,i}$. Avec les séparations initiales $g_0^i = g_0(\mathbf{x}_i)$, on obtient N_1 conditions de type Hertz-Signorini-Moreau mais réécrites avec un seul vecteur d'inconnus, les efforts normaux à la surface esclave $\Gamma_1^{c,h}$:

$$W_{ij}F^{1j} + g_0^i \geq 0, \quad F^{1j} \geq 0, \quad F^{1j} (W_{ij}F^{1j} + g_0^i) = 0, \quad (10)$$

Une solution de ce système d'équations réduit, représentant le problème auxiliaire discretisé, peut être obtenue via différentes méthodes [3, 4, 5] et les efforts résultants seront donc injectés dans le problème global (1) comme des efforts externes. Dans le cas où des non-linéarités supplémentaires se présentent dans le problème structurel, plusieurs itérations globales de Newton peuvent s'avérer nécessaires. De plus, l'utilisation d'une matrice tangente mise à jour est cruciale pour la détermination précise des matrices de flexibilité.

Il est également important de souligner que, bien que le développement présenté ici se concentre sur le cas de la discrétisation du contact en nœud-à-surface, une technique similaire peut être appliquée à d'autres types de discrétisation, y compris celle en segment-à-segment.

4 Accélération par \mathcal{H} -matrice

Cette formulation du problème de contact offre plusieurs avantages : (i) le contact et les changements de statut des éléments de contact n'affectent pas la matrice tangente du problème global, (ii) le problème local est distinct du problème global, permettant de déterminer les efforts de contact dans un problème de taille réduite, (iii) la méthode est à la fois robuste et précise, (iv) les efforts de contact sont explicitement obtenus et peuvent être facilement analysés et post-traités. Cependant, cette méthode présente un inconvénient majeur : la construction des matrices de flexibilité $S_{ij}^{1,2}$ peut être très coûteuse, de même que la résolution du problème (10).

L'objectif de cette étude est de surmonter cet inconvénient majeur en exploitant le concept des matrices hiérarchiques, ou \mathcal{H} -matrices [6, 7]. Cette approche peut être vue comme une modélisation réduite de la matrice de flexibilité, où des blocs sont remplacés par des matrices de rang réduit. L'utilisation de cette technique permettra (1) de faciliter la construction de la matrice de flexibilité, (2) d'accélérer la phase de résolution et (3) d'ouvrir la voie à l'utilisation de cette technique directe en calcul parallèle.

Les étapes clés pour la construction des \mathcal{H} -matrices sont les suivantes. Premièrement, les surfaces potentielles de contact discrétisées seront hiérarchisées et organisées dans un arbre kd. Les feuilles de cet arbre représentent des clusters d'éléments (ou nœuds) surfaciques. L'interaction entre les feuilles voisines de cet arbre doit être précisément décrite, mais pour les feuilles plus éloignées répondant à un certain critère de distance relative à leur taille, les composantes du bloc correspondant de la matrice de flexibilité peuvent être simplifiées en une matrice de rang inférieur, via une méthode de type ACA (Adaptive Cross Approximation) [8] ou SVD. Cette structure hiérarchique de la matrice conduit à une réduction drastique du stockage et à une accélération significative de la résolution, notamment avec des solveurs itératifs.

Pour obtenir les éléments nécessaires à la construction de ces \mathcal{H} -matrices, il est indispensable d'accéder à certaines composantes de la matrice originale, ce qui n'est pas évident pour de grands problèmes. L'approche consistant à conserver un bloc de super-élément incluant tous les nœuds d'une surface de contact, utilisée dans la version originale de la méthode de flexibilité [3], n'est pas réalisable pour la taille des problèmes d'ingénierie actuels. Nous développons donc une méthode pour construire la matrice à partir de colonnes isolées judicieusement choisies, permettant d'interpoler les données manquantes. Cette procédure est réalisée par des solutions multiples du problème linéaire global pour des points d'application des efforts spécifiquement choisis.

5 Conclusion et perspectives

L'algorithme résultant, ainsi que la technique de construction des matrices hiérarchiques, seront analysés à travers de nombreux exemples issus de nos études. Une comparaison rigoureuse des performances avec des méthodes classiques implémentées dans le même cadre sera effectuée. L'extension potentielle de ces techniques à des problèmes impliquant le frottement, via la méthode du bi-potentiel [9], sera également envisagée.

Références

- [1] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*, volume 2. Springer, 2006.
- [2] V.A. Yastrebov. *Numerical methods in contact mechanics*. John Wiley & Sons, 2013.
- [3] A. Francavilla and O.C. Zienkiewicz. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9(4) :913–924, 1975.
- [4] Z.-Q. Feng, K. Aazizou, and F. Hourlier. Modélisation des problèmes de contact avec frottement – Implantation en C++ dans le code Zébulon. In *Colloque National en Calcul des Structures*, volume 2, pages 1141–1156, 1993.
- [5] P. Joli and Z.-Q. Feng. Uzawa and Newton algorithms to solve frictional contact problems within the bi-potential framework. *International journal for numerical methods in engineering*, 73(3) :317–330, 2008.
- [6] M. Bebendorf. *Hierarchical matrices*. Springer, 2008.
- [7] S. Chaillat, L. Desiderio, and P. Ciarlet. Theory and implementation of \mathcal{H} -matrix based iterative and direct solvers for Helmholtz and elastodynamic oscillatory kernels. *Journal of Computational Physics*, 351 :165–186, 2017.
- [8] M. Bebendorf. Approximation of boundary element matrices. *Numerische Mathematik*, 86 :565–589, 2000.
- [9] G. de Saxcé and Z.-Q. Feng. New inequality and functional for contact with friction : the implicit standard material approach. *Journal of Structural Mechanics*, 19(3) :301–325, 1991.