

Sur les données mécaniques en viscoélasticité linéaire harmonique

L. Stainier¹, H. Salashoor²

¹ *GeM, Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, laurent.stainier@ec-nantes.fr*

² *Civil and Environmental Engineering, Duke University, hossein.salahshoor@duke.edu*

Résumé — Cette communication s'intéresse à la notion de distance entre états mécaniques dans le contexte de la viscoélasticité harmonique. Par analogie avec le cas de l'élasticité, nous discutons de la définition de potentiels (primal et dual) et de fonction d'écart constitutif. Ces notions sont notamment critiques pour les approches basées sur les données, pour la simulation ou l'identification.

Mots clés — viscoélasticité harmonique, data-driven, approches variationnelles.

1 Introduction

Il est bien établi que l'élasticité peut être traitée de façon variationnelle, sur base de notions de potentiels d'énergie élastique (primal, en déformation, et dual, en contrainte). Ces potentiels permettent notamment de définir une fonction d'écart constitutif pouvant constituer une mesure de distance.

Même si il existe une analogie entre élasticité linéaire et viscoélasticité harmonique en nombres complexes, l'extension de notions de potentiel et de fonction écart constitutif n'est pas triviale, même si des éléments sont disponibles dans la littérature. Comme expliqué ci-dessous, il existe bien une fonction écart constitutif en viscoélasticité harmonique, mais elle implique de mélanger les parties réelle et imaginaire des déformations et des contraintes.

Une fois cette notion de distance établie, elle peut être utilisée pour identifier la réponse viscoélastique de matériaux hétérogènes à partir de mesure de champ.

2 Distance élastique

En élasticité, l'état d'un point matériel est défini par la combinaison d'une déformation et d'une contrainte. Nous nous limiterons ici à la cinématique linéarisée, auquel cas l'état est donné par $\mathbf{z} = \{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\}$, où $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ sont les tenseurs (d'ordre 2) de déformation et de contrainte, respectivement. Considérant deux états $\mathbf{z}^{(1)}$ et $\mathbf{z}^{(2)}$, on peut alors définir une distance entre ces deux états par

$$d(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(1)} - \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(2)} \right) : \mathbb{C} : \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(1)} - \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(1)} - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(2)} \right) : \mathbb{C}^{-1} : \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(1)} - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(2)} \right)$$

où \mathbb{C} est un tenseur d'ordre 4 faisant office de métrique.

Cette distance est par exemple à la base des approches data-driven DDCM (Kirchdoerfer et Ortiz [1]) ou DDI (Leygue et al. [2]). Elle peut de façon plus générale servir à mesurer l'écart entre des champs cinématiquement et statiquement admissibles et des champs reliés par une relation de comportement. La solution d'un problème d'élasticité minimise donc cette distance (le minimum étant zéro).

3 Élasticité

Les matériaux élastiques linéaires sont caractérisés par un tenseur d'élasticité \mathbb{C} :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (1)$$

Le tenseur \mathbb{C} a ici un sens physique et sa structure et ses valeurs reflètent les caractéristiques du matériau.

3.1 Écart constitutif

La relation constitutive (1) peut alternativement être représentée par un potentiel énergie stockée $W(\underline{\underline{\varepsilon}})$:

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2)$$

tel que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}). \quad (3)$$

La relation constitutive peut également être représentée par le potentiel dual $W^*(\underline{\underline{\sigma}})$:

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \mathbb{C}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (4)$$

tel que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial W^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}). \quad (5)$$

On peut alors définir la fonction

$$G(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}) = W(\underline{\underline{\varepsilon}}) + W^*(\underline{\underline{\sigma}}) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (6)$$

qui, pour autant que \mathbb{C} soit défini positif, a les propriétés suivantes :

$$G(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}) \geq 0 \quad \text{et} \quad G(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}) = 0 \iff \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (7)$$

La fonction $G(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$ définit donc un *écart constitutif* mesurant la déviation d'un état mécanique $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$ par rapport à la relation constitutive (1). Cette fonction, classique en analyse convexe, est aussi connue sous le nom d'erreur en comportement en mécanique.

3.2 Distance élastique

Comme l'ont bien remarqué Conti *et al.* [3], la distance minimale entre un état arbitraire z et l'ensemble des états z^* vérifiant la relation constitutive (1) est en fait la fonction écart constitutif :

$$\int_{z^*} d(z, z^*) = G(z) \quad (8)$$

pour autant que l'on utilise le tenseur d'élasticité \mathbb{C} comme métrique.

Pour des comportements généraux (p.e. élasticité non-linéaire), la fonction d'écart constitutif peut inversement constituer (parmi d'autres, cf. [4]) une fonction distance (à des données sur la relation de comportement) intéressante.

4 Viscoélasticité

4.1 Domaine temporel

Considérons maintenant un matériau viscoélastique linéaire, dont la réponse est décrite par

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathbb{C}_e : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) + \mathbb{C}_v : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(t) \quad (9)$$

où \mathbb{C}_e est un tenseur d'élasticité et \mathbb{C}_v un tenseur de viscosité.

Dans le cadre des matériaux standards généralisés [5], les relations constitutives peuvent être caractérisées par un potentiel d'énergie stockée $W(\underline{\underline{\varepsilon}})$ et un potentiel de dissipation $\phi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})$, prenant ici la forme :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}_e : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{and} \quad \phi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \mathbb{C}_v : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (10)$$

telle que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}). \quad (11)$$

Les relations constitutives peuvent alors être représentées par le potentiel en taux de déformation

$$\Phi(\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \dot{W}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) + \phi(\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}) \quad (12)$$

tel que

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}(\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}). \quad (13)$$

Il n'y a pas de relation de dualité claire dans ce cas.

Dans le cadre incrémental, partant d'un état connu $(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n, \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_n)$, le potentiel (12) peut être intégré, donnant

$$\mathcal{W}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n) = W(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) - W(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n) + (t - t_n) \phi \left(\frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n}{t - t_n} \right) \quad (14)$$

tel que

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n) = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) + \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}} \left(\frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n}{t - t_n} \right) \quad (15)$$

relation qui est équivalente à (9) où le taux de déformation a été approché par une différence finie d'ordre un. On peut alors définir un potentiel dual incrémental

$$\mathcal{W}^*(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n) = \inf_{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \left[\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \mathcal{W}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n) \right] \quad (16)$$

dont l'expression explicite est donnée par

$$\mathcal{W}^*(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \tilde{\mathbb{C}}^{-1} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \tilde{\mathbb{C}}^{-1} : \tilde{\mathbb{C}}_v : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n : \mathbb{C}_e : \tilde{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{C}_e : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_n \quad (17)$$

où $\tilde{\mathbb{C}}_v = \Delta t^{-1} \mathbb{C}_v$ et $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_e + \tilde{\mathbb{C}}_v$.

4.2 Domaine fréquentiel

Dans le cas de sollicitations harmoniques, il est plus simple de travailler dans le domaine fréquentiel. Considérons le cas

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' \cos(\omega t) - \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'' \sin(\omega t) = \Re[(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' + i \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'') e^{i\omega t}] \quad (18)$$

où $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}''$ sont les parties réelle et imaginaire de la représentation complexe d'une déformation harmonique. La contrainte calculée par (9) donne alors

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' \cos(\omega t) - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}'' \sin(\omega t) = \Re[(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' + i \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}'') e^{i\omega t}] \quad (19)$$

où

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' = \mathbb{C}_e : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' - \omega \mathbb{C}_v : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'' \quad (20a)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}'' = \mathbb{C}_e : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'' + \omega \mathbb{C}_v : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' \quad (20b)$$

ce qui peut être réécrit sous la forme

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' + i \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}'' = (\mathbb{C}' + i \mathbb{C}'') : (\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' + i \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'') \quad (21)$$

avec $\mathbb{C}' = \mathbb{C}_e$ et $\mathbb{C}'' = \omega \mathbb{C}_v$ les *modules de conservation* et de *perte*, respectivement. En considérant des dépendances plus générales de $\mathbb{C}'(\omega)$ et $\mathbb{C}''(\omega)$ à la pulsation ω , cette représentation couvre un spectre de comportements viscoélastiques plus large que (9).

Différentes quantités intéressantes peuvent être définies, telle que la fonction de dissipation moyenne

$$\phi(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}', \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'') = \frac{1}{2\pi} \oint \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}} dt = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' : \mathbb{C}'' : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'' : \mathbb{C}' : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'' \right) \quad (22)$$

ou l'énergie stockée moyenne

$$W(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}', \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'') = \frac{1}{T} \oint \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} dt = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' : \mathbb{C}' : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}' + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'' : \mathbb{C}' : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}'' \right) \quad (23)$$

mais elles ne peuvent être utilisées comme des potentiels pour les contraintes (complexes). En fait, si on écrit (20) sous forme matricielle, on obtient

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma'}} \\ \underline{\underline{\sigma''}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}' & -\mathbb{C}'' \\ \mathbb{C}'' & \mathbb{C}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon'}} \\ \underline{\underline{\varepsilon''}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

et l'anti-symétrie de la matrice constitutive indique l'absence d'un potentiel classique (la matrice peut être rendue symétrique en inversant le signe de la seconde équation, mais elle perd alors son caractère défini positif).

Une solution formelle consiste à utiliser les dérivées de Wirtinger [6], définies telles que, si $F(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}})$ est une fonction de la déformation complexe, alors

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\varepsilon'}}} - i \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\varepsilon''}}}. \quad (25)$$

Definissant alors $F(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}})$ comme

$$F(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon'}} : \mathbb{C}' : \underline{\underline{\varepsilon'}} - \underline{\underline{\varepsilon'}} : \mathbb{C}'' : \underline{\underline{\varepsilon''}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon''}} : \mathbb{C}' : \underline{\underline{\varepsilon''}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon'}} & \underline{\underline{\varepsilon''}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}' & -\mathbb{C}'' \\ -\mathbb{C}'' & -\mathbb{C}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon'}} \\ \underline{\underline{\varepsilon''}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

on peut formellement écrire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} + i \underline{\underline{\sigma''}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (27)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon'}} + i \underline{\underline{\varepsilon''}}$. De façon similaire, on peut définir une fonction conjuguée $F^*(\underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\sigma''}})$:

$$F^*(\underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\sigma''}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma'}} & \underline{\underline{\sigma''}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbb{C}' + \mathbb{C}'' : \mathbb{C}'^{-1} : \mathbb{C}'')^{-1} & (\mathbb{C}'' + \mathbb{C}' : \mathbb{C}''^{-1} : \mathbb{C}')^{-1} \\ (\mathbb{C}'' + \mathbb{C}' : \mathbb{C}''^{-1} : \mathbb{C}')^{-1} & -(\mathbb{C}' + \mathbb{C}'' : \mathbb{C}'^{-1} : \mathbb{C}'')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma'}} \\ \underline{\underline{\sigma''}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

telle qu'on peut formellement écrire

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon'}} + i \underline{\underline{\varepsilon''}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (29)$$

où $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} + i \underline{\underline{\sigma''}}$ et où la dérivée est une dérivée de Wirtinger. On constate cependant que ces fonctions ne sont pas convexes dans les parties imaginaires des déformations et des contraintes, ce qui empêche de construire un principe de minimisation ou une distance sur cette base.

Cherkaev and Gibiansky [7] ont introduit des fonctions "mixtes", qui peuvent conduire à des principes de minimisation. Le premier potentiel mixte est donné par

$$W_{\varepsilon\sigma}(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\sigma''}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon'}} & \underline{\underline{\sigma''}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}' + \mathbb{C}'' : \mathbb{C}'^{-1} : \mathbb{C}'' & -\mathbb{C}'^{-1} : \mathbb{C}'' \\ -\mathbb{C}'' : \mathbb{C}'^{-1} & \mathbb{C}'^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon'}} \\ \underline{\underline{\sigma''}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

tel que $\underline{\underline{\sigma'}} = \partial_{\underline{\underline{\varepsilon'}}} W_{\varepsilon\sigma}(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\sigma''}})$ et $\underline{\underline{\varepsilon''}} = \partial_{\underline{\underline{\sigma''}}} W_{\varepsilon\sigma}(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\sigma''}})$. Le potentiel dual est donné par

$$W_{\sigma\varepsilon}(\underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma'}} & \underline{\underline{\varepsilon''}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}'^{-1} & \mathbb{C}'^{-1} : \mathbb{C}'' \\ \mathbb{C}'' : \mathbb{C}'^{-1} & \mathbb{C}' + \mathbb{C}'' : \mathbb{C}'^{-1} : \mathbb{C}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma'}} \\ \underline{\underline{\varepsilon''}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

tel que $\underline{\underline{\varepsilon'}} = \partial_{\underline{\underline{\sigma'}}} W_{\sigma\varepsilon}(\underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}})$ et $\underline{\underline{\sigma''}} = \partial_{\underline{\underline{\varepsilon''}}} W_{\sigma\varepsilon}(\underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}})$. Il est alors possible de définir une fonction d'écart constitutif donnée par

$$G(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}}, \underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\sigma''}}) = W_{\varepsilon\sigma}(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\sigma''}}) + W_{\sigma\varepsilon}(\underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}}) - (\underline{\underline{\sigma'}} : \underline{\underline{\varepsilon'}} + \underline{\underline{\sigma''}} : \underline{\underline{\varepsilon''}}) \quad (32)$$

qui vérifie bien les propriétés attendues

$$G(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}}, \underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\sigma''}}) \geq 0 \quad \text{and} \quad G(\underline{\underline{\varepsilon'}}, \underline{\underline{\varepsilon''}}, \underline{\underline{\sigma'}}, \underline{\underline{\sigma''}}) = 0 \iff (21). \quad (33)$$

On peut noter que ces auteurs avaient aussi identifié que les fonctions (26) et (28) conduisent à des formulations de point-selle (min-max).

5 Identification de la réponse viscoélastique harmonique

La méthode DDI de [2] peut être appliquée telle quelle à des champs de variables complexes, et permet donc d'identifier la réponse complexe d'un matériau viscoélastique à partir d'un champ de déplacement complexe (à une fréquence donnée et connue). La méthode DDI fonctionne par ailleurs pour des matériaux hétérogènes, comme montré dans [8].

On illustre ici cette approche sur un cas très simple, sur un domaine unidimensionnel de longueur $L = 0.1$, de densité $\rho = 1000$, sollicité à une fréquence $\omega = 200$ (grandeurs adimensionnelles). La figure 1 montre le champ de déplacement complexe servant de donnée (on notera la présence d'une inclusion, au travers des non-régularités apparaissant à ses frontières).

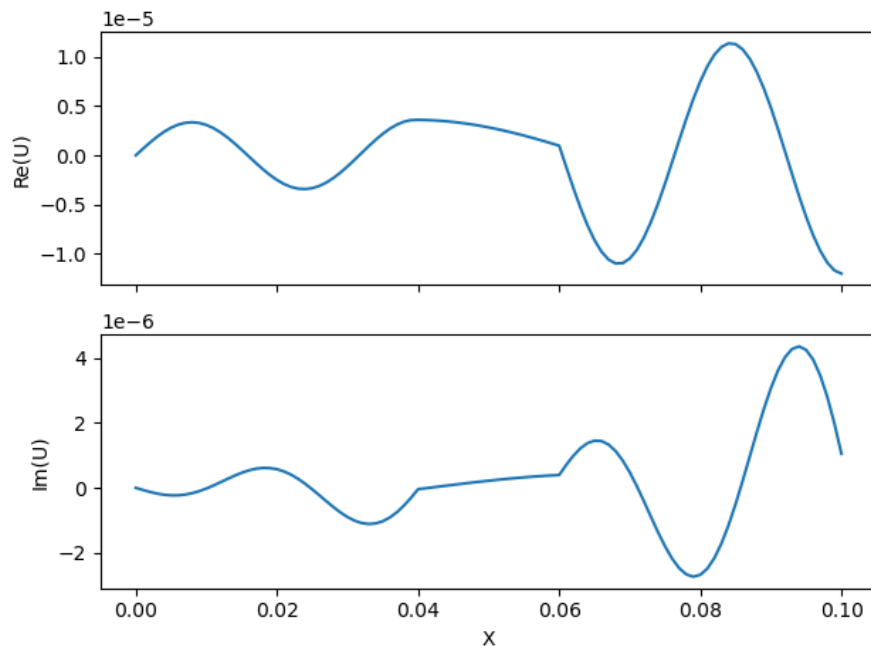


FIGURE 1 – Champ de déplacement complexe

La figure 2 montre le résultat de l'application de la DDI, avec 15 clusters pour 100 points de mesure de la déformation complexe. Les couleurs correspondent aux différents clusters, dont les centroïdes sont marqués par les disques bleus. On distingue clairement la présence de deux matériaux, caractérisés par une réponse mécanique différente. Ces résultats peuvent être reportés (figure 3) sur le domaine physique (géométries), ce qui permet de localiser (au travers des couleurs des clusters), assez clairement dans ce cas simple, l'inclusion et la matrice.

Le cas 1d est évidemment très simple (le champ de contrainte peut facilement être intégré directement). La figure 4 montre un résultat sur une géométrie 2d, où on observe beaucoup plus de bruit. On distingue toujours une distribution bimodale, correspondant aux deux matériaux (les réponses de référence sont marquées par les lignes rouges), mais la partition des deux nuages de points est moins évidente. Les notions de distance discutées plus haut peuvent alors être utilisées dans des approches de clustering pour différencier / identifier les deux matériaux. Des exemples 2d plus complexes seront présentés lors de la conférence.

6 Conclusion et perspectives

Des notions de distance et d'écart constitutif entre des états mécaniques représentés par des déformations et des contraintes complexes peuvent être établies. Ces notions, combinées avec une approche d'identification data-driven DDI devraient permettre d'identifier la réponse viscoélastique de matériaux hétérogènes. Les matériaux biologiques présentent un intérêt particulier, au vu des avancées dans les techniques d'imagerie, comme par exemple l'élastographie par résonance magnétique (voir p.e. [9]).

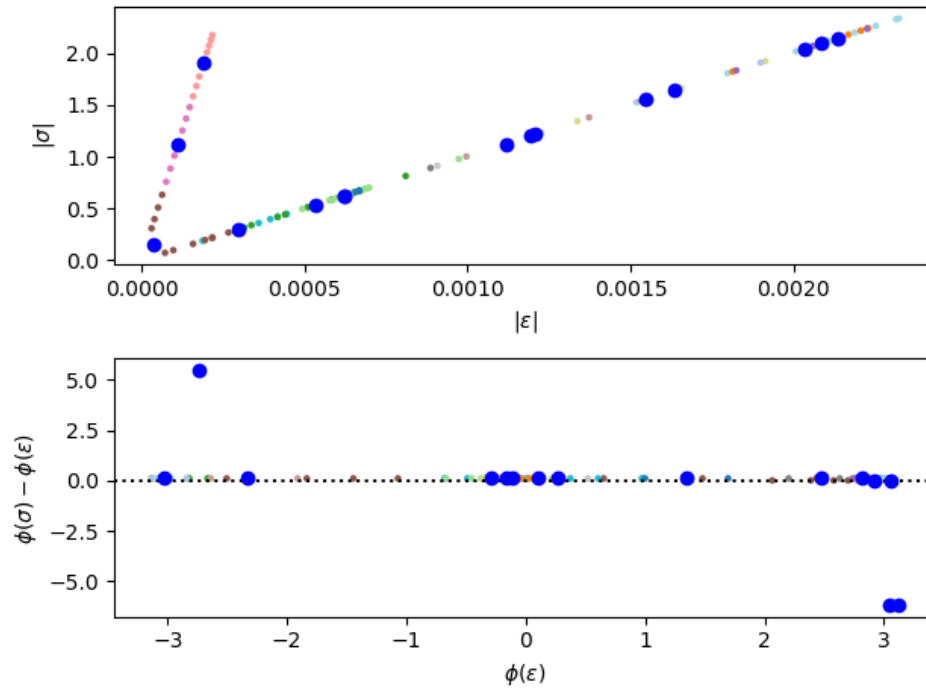


FIGURE 2 – Réponse viscoélastique identifiée par la DDI (amplitude et déphasage)

7 Remerciements

Ces travaux ont bénéficié d'un financement de l'ISite NEXt (Nantes Université) au travers du projet IRP iDDrEAM.

Références

- [1] T. Kirchdoerfer, M. Ortiz. *Data-driven computational mechanics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 304, 81-101, 2016.
- [2] A. Leygue, M. Coret, J. Réthoré, L. Stainier, E. Verron. *Data-based derivation of material response*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 331, 184-196, 2018.
- [3] S. Conti, S. Müller, M. Ortiz. *Data-Driven Problems in Elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. 229(1), 79-123, 2018.
- [4] S. Andrieux. *Bregman divergences for physically informed discrepancy measures for learning and computation in thermomechanics*, C.R. Mécanique 352, 59-81, 2023.
- [5] B. Halphen, Nguyen Q.S. *Sur les matériaux standard généralisés*, Journal de Mécanique 14(1), 39-63, 1975.
- [6] W. Wirtinger. *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen*, Mathematische Annalen 97(1), 357-375, 1927.
- [7] A. V. Cherkaev, L. V. Gibiansky. *Variational principles for complex conductivity, viscoelasticity, and similar problems in media with complex moduli*, J. Math. Phys. 35(1), 127-145, 1994.
- [8] G. Valdés-Alonzo. *Identification of material properties and phase distribution of heterogeneous materials through data-driven computational methods : Towards an enhanced constitutive space*, thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech, 2022.
- [9] J. Weickenmeier, M. Kurt, E. Ozkaya, M. Wintermark, K. B. Pauly, E. Kuhl. *Magnetic resonance elastography of the brain : A comparison between pigs and humans*, J. Mech. Behav. Biomed. Mater. 77, 702-710, 2018.

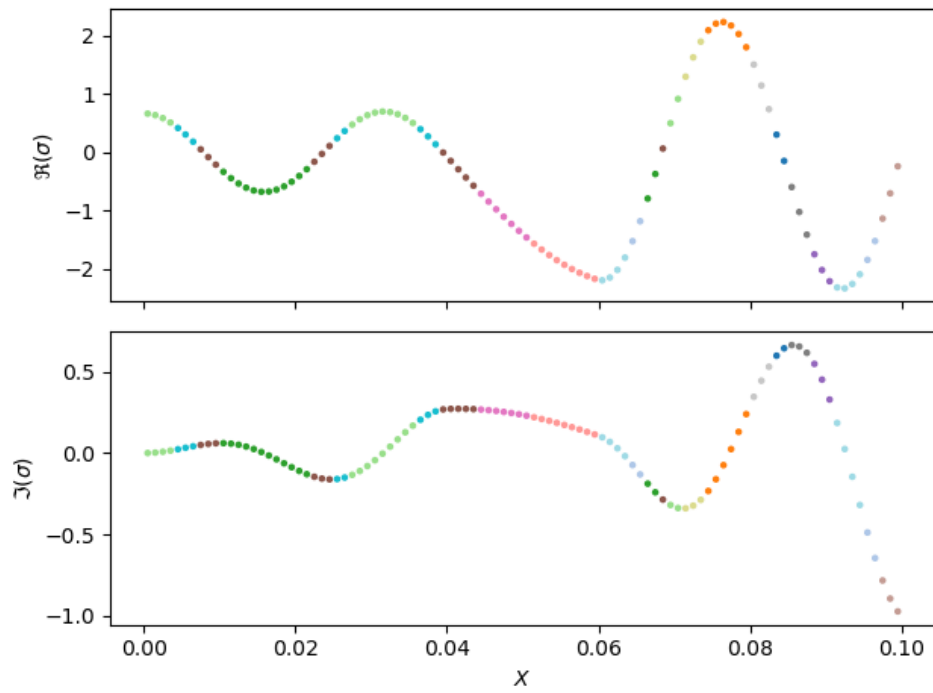


FIGURE 3 – Champ de contrainte complexe identifié par DDI

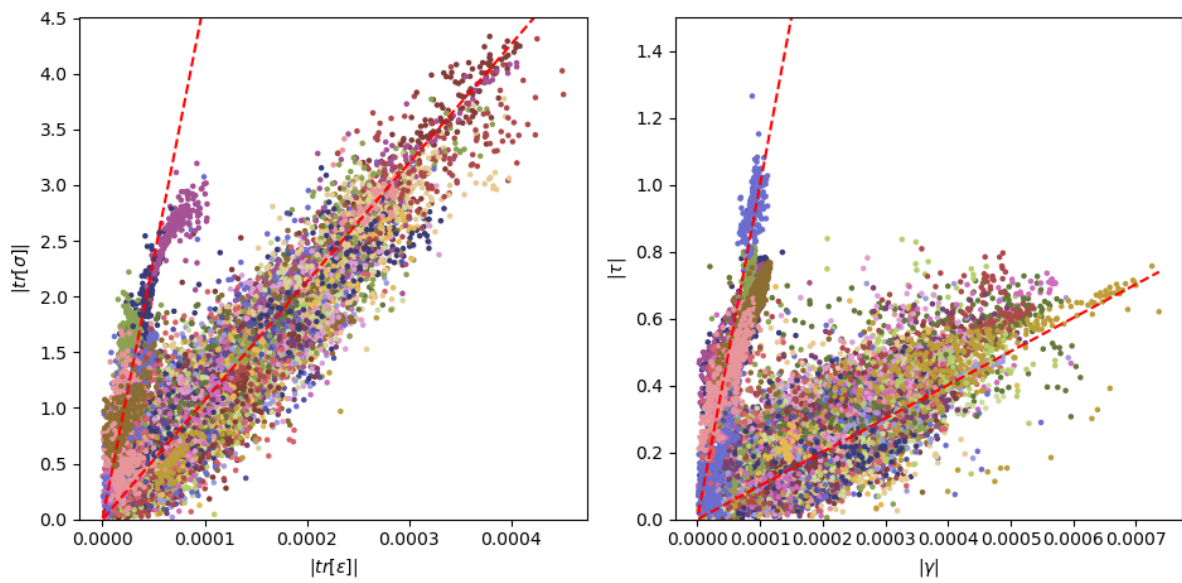


FIGURE 4 – Réponse viscoélastique identifiée par la DDI en 2d (amplitudes)