

# Instabilité des structures minces multicouches à l'aide de la méthode asymptotique numérique

H. Azzayani, H. Zahrouni, N. Mathieu,  
P. Ventura, M. Brun, M. Potier-Ferry

Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers ParisTech, LEM3, F-57000 Metz, France, hamza.azzayani@univ-lorraine.fr

**Résumé** — Dans cet article, nous nous intéressons à l'analyse de la stabilité des coques minces multicouches en utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN) associée aux approximants de Padé. Cette technique est très efficace pour résoudre les problèmes non linéaires, en particulier pour la modélisation de l'instabilité des structures minces, grâce à l'algorithme d'ordre élevé qui permet de calculer avec une grande précision les points singuliers le long des branches de la solution non linéaire. Nous présentons différentes techniques pour détecter les points de bifurcation.

**Mots clefs** — Instabilité, bifurcation, méthode asymptotique numérique, structures multicouches.

## 1. Introduction

Les structures composites multicouches sont largement utilisées dans les domaines du génie civil, de l'aérospatiale, de l'automobile, de l'énergie et bien d'autres (par exemple : protection thermique des réservoirs de lancement de satellites [14], cartes de circuits imprimés [13,3], profils aérodynamiques [2]). Cependant, ces structures sont très sensibles aux instabilités [6,10] et sont soumises à une réduction drastique de la charge critique en présence de défauts géométriques ou matériels. Cette instabilité présente souvent des comportements mécaniques complexes avec de grandes déformations, une forte non-linéarité, des points de bifurcation multiples et plusieurs chemins d'équilibre. Dans le contexte des matériaux multicouches, l'instabilité est très sensible à la géométrie, au nombre de couches dans l'épaisseur, à leurs orientations et aux propriétés anisotropes du matériau.

La méthode asymptotique numérique (MAN) basée sur la technique de perturbation est un outil adéquat pour résoudre les problèmes non linéaires dans le cadre des instabilités des structures [12]. Elle s'appuie sur la combinaison des développements asymptotiques et des méthodes numériques. Les inconnues du problème sont développées en séries entières. La MAN transforme le problème initial (non linéaire) en une succession de problèmes linéaires admettant le même opérateur de rigidité tangente. Ensuite, ces problèmes sont résolus par une méthode numérique telle que la méthode des éléments finis (FEM). Comme les séries ont un rayon de convergence limité, une technique de continuation a été proposée pour obtenir l'ensemble de la branche de solution.

Dans le cadre de la MAN, des indicateurs de bifurcation ont été proposés pour identifier les points critiques. Un premier indicateur est une fonction scalaire calculée en introduisant une force de perturbation fictive dans le problème d'équilibre [4]. L'indicateur peut être déterminé explicitement le long de la branche d'équilibre par la technique de perturbation. Les racines de cette fonction caractérisent les points singuliers [1]. Le deuxième indicateur consiste à analyser les pôles de la représentation rationnelle. Globalement, le point de bifurcation correspond au plus petit pôle réel de l'approximant de Padé. Une troisième technique de détection des points singuliers est une combinaison de l'analyse du flambage et des vibrations. La méthode commence par le calcul de la branche d'équilibre. Ensuite, nous procédons à la détermination des fréquences propres avec les modes de vibration correspondants autour de cette branche. Dans cette méthode, les fréquences propres sont utilisées comme indicateur de bifurcation. Plusieurs études montrent que les fréquences propres diminuent lorsque la charge appliquée augmente et que leurs racines correspondent à des points critiques (points de bifurcation ou points limites) [5].

Dans ce qui suit, nous présentons dans la section 2 la formulation de la coque et l'algorithme asymptotique numérique pour résoudre le problème non linéaire résultant. Dans la section 3, nous donnons des détails sur les trois techniques utilisées pour détecter les points de bifurcation. Dans la section 4, nous présentons quelques résultats numériques et dans la section 5, nous concluons notre étude.

## 2. Formulation statique de la coque et algorithme de résolution

Dans cet article, nous considérons des structures minces multicouches parfaitement collées. Le comportement de chaque couche est décrit comme élastique orthotrope. Une formulation de coque, adaptée aux grands déplacements et aux grandes rotations, utilisant uniquement des variables de type déplacement est utilisée [11]. La figure 1 montre la géométrie et la cinématique de la coque proposée dans la configuration de référence et la configuration déformée. Le vecteur position d'un point matériel arbitraire de la configuration initiale peut être défini comme suit :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3) = \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) + \boldsymbol{\theta}_3 \mathbf{a}_3(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \quad (1)$$

Où  $\mathbf{r}$  est la projection de ce point sur la surface médiane,  $\mathbf{a}_3$  le vecteur directeur de la coque et  $(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3)$  les coordonnées curvilignes.

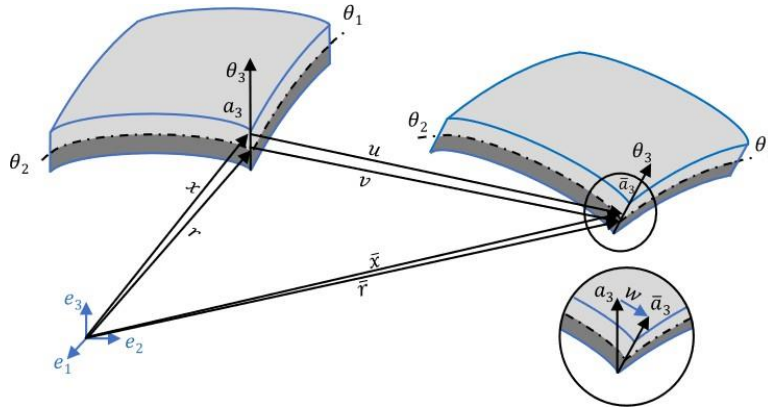


Figure 1 – Description géométrique et cinématique de la coque

En supposant une variation linéaire du déplacement dans la direction de l'épaisseur, le champ de déplacement correspondant à la configuration déformée peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) + \boldsymbol{\theta}_3 \mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) \quad (2)$$

Où  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  représentent respectivement le déplacement de la surface moyenne et la différence entre les vecteurs directeurs de la coque entre la configuration initiale et la configuration déformée. Le lecteur souhaitant plus de détails sur cette formulation peut se référer au travail de Büchter et al. [11].

Sur la base de la fonctionnelle de Hu-Washizu, nous considérons une formulation de coque avec trois champs indépendants  $(\mathbf{u}, \mathbf{S}^m, \tilde{\boldsymbol{\gamma}})$  [7]. Pour éviter le problème du verrouillage numérique, le concept EAS (Enhanced Assumed Strain) proposé par Simo et Rifai [9] est utilisé. Cette méthode consiste à introduire un champ de déformation supplémentaire  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  incompatible avec le déplacement et qui est choisi, par construction, orthogonal au champ de contrainte  $\mathbf{S}^m$ . Ainsi, la formulation s'écrit sous la forme suivante :

$$\pi_{EAS}(\mathbf{u}, \mathbf{S}^m, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) : \mathbf{S}^m d\Omega - \lambda \mathbf{P}_e(\mathbf{u}) \quad (3)$$

Où  $\mathbf{u}, \mathbf{S}^m = \mathbf{D}^m : (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}), \mathbf{D}^m, \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}), N$  et  $\lambda \mathbf{P}_e(\mathbf{u})$  représentent respectivement le champ de déplacement, le champ de contrainte relatif à chaque couche, le tenseur d'élasticité de la  $m^{\text{ème}}$  couche, le champ de déformation compatible avec le déplacement, le nombre de couches de la coque stratifiée et le travail des forces extérieures ( $\lambda$  est un paramètre de charge).

Selon le principe de l'énergie potentielle minimale, la condition de stationnarité conduit à l'équation du travail virtuel :

$$\sum_{m=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{S}^m : \delta(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) d\Omega - \lambda \mathbf{P}_e(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

En définissant le vecteur inconnu mixte  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{S}^m, \tilde{\boldsymbol{\gamma}})$ , nous pouvons écrire l'équation (4) sous la forme simple suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \lambda \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (5)$$

Où  $\mathbf{L}(\cdot)$  est un opérateur linéaire,  $\mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$  un opérateur quadratique et  $\mathbf{F}$  est le vecteur de la force extérieure.

Nous proposons de résoudre le problème non linéaire (5) par la méthode asymptotique numérique. Tout d'abord, nous utilisons la technique de perturbation pour transformer le problème non linéaire en une succession de problèmes linéaires admettant tous le même opérateur tangent. Les problèmes résultants jusqu'à l'ordre  $p$  sont discrétisés et résolus par la méthode des éléments finis. Ainsi, nous obtenons analytiquement une partie du chemin de solution avec une seule décomposition de la matrice de rigidité. A partir d'une solution initialement connue  $(\mathbf{U}_0, \lambda_0)$ , la technique de perturbation consiste à chercher le chemin de solution du problème non linéaire sous forme d'un développement asymptotique par rapport à un paramètre de chemin (a) :

$$\mathbf{U}(\mathbf{a}) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{a}\mathbf{U}_1 + \mathbf{a}^2\mathbf{U}_2 + \dots + \mathbf{a}^n\mathbf{U}_n \quad (6)$$

$$\lambda(\mathbf{a}) = \lambda_0 + \mathbf{a}\lambda_1 + \mathbf{a}^2\lambda_2 + \dots + \mathbf{a}^n\lambda_n \quad (7)$$

Les séries entières sont caractérisées par un rayon de convergence qui dépend de l'ordre de troncature de la série  $n$  et d'un paramètre de précision  $\delta$  défini par l'utilisateur et s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{a}_{max} = \left( \delta \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_n\|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (8)$$

L'utilisation de la représentation rationnelle, appelée approximants de Padé, au lieu de la représentation polynomiale permet d'augmenter le domaine de validité de la solution. Pour une étude plus détaillée des approximants de Padé, nous renvoyons le lecteur à la référence [8].

### 3. Méthodes de détection des bifurcations

#### 3.1. Indicateur de bifurcation

L'objectif de cette section est de développer un algorithme fiable, basé sur la MAN, pour la détermination des points de bifurcation. Ces points sont détectés en évaluant, le long de la branche d'équilibre, une fonction scalaire appelée indicateur de bifurcation. Ce scalaire est obtenu en introduisant une force de perturbation fictive dans le problème d'équilibre, et qui s'annule aux points singuliers.

Soit  $\Delta \boldsymbol{\mu} \mathbf{f}$  une force de perturbation fictive appliquée à la structure dans un état déformé  $(\mathbf{U}, \lambda)$ .  $\Delta \boldsymbol{\mu}$  représente l'intensité de la force et  $\Delta \mathbf{U} = (\Delta \mathbf{u}, \Delta \tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \Delta \mathbf{S})$  sa réponse associée. Dans ces conditions, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}, \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F} + \Delta \boldsymbol{\mu} \mathbf{f} \quad (9)$$

### 3.2. Pôles des approximants de Padé

Une autre méthode simple pour détecter les points de bifurcation est l'analyse des pôles des approximants de Padé. En fait, les points de bifurcation correspondent aux racines réelles du dénominateur de la fraction rationnelle [4][1]. Nous notons ici un autre intérêt de la représentation rationnelle par rapport à la représentation polynomiale.

### 3.3. Fréquence propre de vibration

Une technique classique pour combiner l'analyse des vibrations et du flambement consiste à commencer par le calcul de la branche d'équilibre. Ensuite, on procède à la détermination des fréquences avec les modes de vibration correspondants autour de cette branche. Plusieurs études montrent que les fréquences propres diminuent à mesure que la charge appliquée augmente et s'annulent exactement aux points critiques (points de bifurcation ou points limites) [5].

Pour une charge appliquée donnée, la structure est supposée osciller autour d'un état statique  $U$ . Ces oscillations sont décrites par le vecteur mixte  $V(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$  dépendant du temps, de sorte que la réponse globale s'écrit  $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + V(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t)$ . Les oscillations de la structure autour d'un état d'équilibre statique sont décrites par l'équation suivante :

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{V}}) + \mathbf{L}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U} + \mathbf{V}, \mathbf{U} + \mathbf{V}) = \lambda \mathbf{F} \quad (10)$$

Où  $\ddot{\mathbf{V}}$  est la dérivée seconde par rapport au temps de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{M}$  est l'opérateur de masse.

## 4. Application numérique

Dans cette section, une analyse de bifurcation est menée pour une structure multicouche avec pré-flambage non linéaire afin d'évaluer l'efficacité et la robustesse des algorithmes de détection de bifurcation. Nous considérons un toit cylindrique stratifié composé de trois couches orthotropes (figure 2). L'épaisseur de chaque couche est la même. Les couches supérieure et inférieure sont orientées à  $45^\circ$  et la couche centrale à  $0^\circ$  ( $45^\circ/0^\circ/45^\circ$ ). Les caractéristiques des matériaux sont indiquées dans le tableau 1. Le toit est fixé sur les deux bords droits et libre sur les deux autres bords et soumis à une charge ponctuelle sur son centre. La structure est discrétisée par des éléments de coque présentés dans la section 2 et le maillage consiste en 36 éléments uniformément distribués.

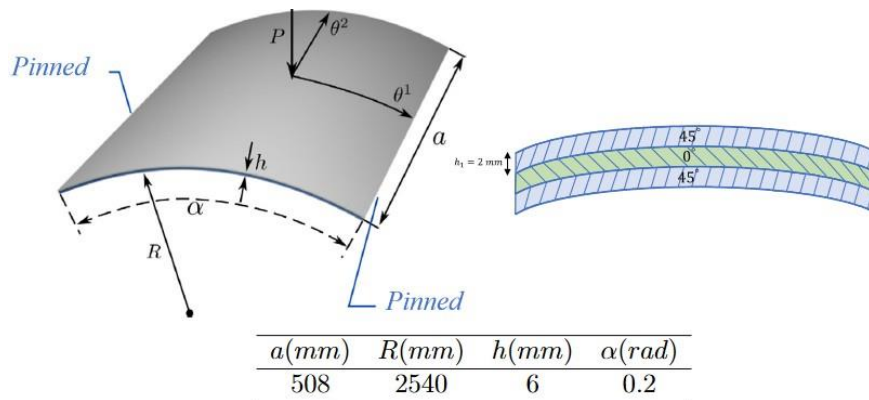


Figure 2 – Paramètres géométriques du toit cylindrique

Tableau 1 – Propriétés mécaniques de chaque couche du toit

	$E(\text{MPa})$	$\mu$		$G(\text{MPa})$	
$E_1$	3300	$\mu_{12}$	0.25	$G_{12}$	660
$E_2$	1100	$\mu_{23}$	0.25	$G_{23}$	440
$E_3$	1100	$\mu_{13}$	0.25	$G_{13}$	660

La courbe de réponse de la structure utilisant la représentation rationnelle est donnée dans la *figure 3*. Pour atteindre un déplacement vertical du point d'application de la charge de  $30 \text{ mm}$ , la MAN nécessite 35 pas (35 décompositions matricielles) pour un ordre de troncature  $n = 15$  et un paramètre de précision  $\delta = 10^{-6}$ . Le même problème est simulé sous Abaqus avec l'algorithme de Newton Raphson associé à la technique de Riks. Le maillage est le même que celui utilisé pour la MAN avec un élément à huit nœuds *S8R* disponible dans Abaqus implicite. Un déplacement de  $30 \text{ mm}$  du point d'application de la charge nécessite 124 pas avec 374 décompositions matricielles en utilisant un incrément fixe égal à  $0,05$ . Cette comparaison montre l'efficacité de la MAN.

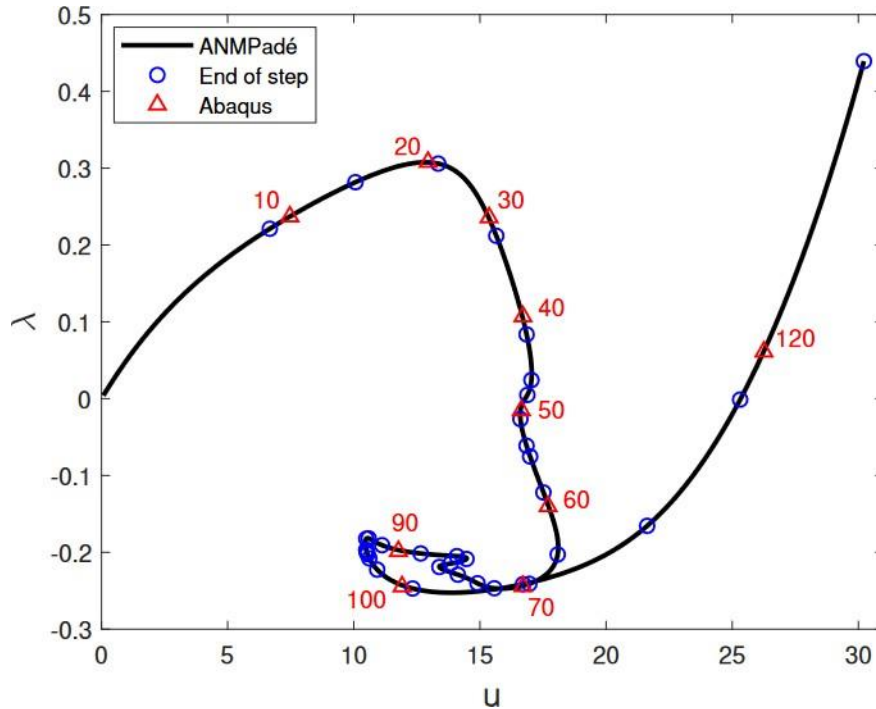


Figure 3 – Charge - déplacement vertical du point d'application de la charge ( $n = 15$  et  $\delta = 10^{-6}$ ). La ligne noire représente la réponse donnée par la MAN avec l'approximation de Padé, les cercles sont relatifs à la fin de chaque pas MAN et les triangles représentent 10 points de la réponse Abaqus-Riks (le nombre de pas est 124)

En fonction des paramètres  $n$  et  $\delta$  et de la technique utilisée pour représenter la solution (représentation polynomiale ou rationnelle), la méthode asymptotique numérique permet d'avoir d'autres trajectoires d'équilibre comme le montre la *figure 5*. Pour  $n = 15$  et  $\delta = 10^{-6}$  et avec une représentation polynomiale, on remarque une déviation de la courbe au point *C* puis une autre déviation au point *B*, qui sont tous des points de bifurcation. La courbe continue à suivre la même trajectoire entre *C* et *B*. En gardant la même représentation, on observe une autre trajectoire d'équilibre avec  $n = 20$  et  $\delta = 10^{-8}$ . Les points *A* et *F* sont également des points de bifurcation de la structure. Deux autres points de bifurcation (points *D* et *E*) apparaissent avec une représentation rationnelle et les paramètres  $n = 15$  et  $\delta = 10^{-10}$ . Nous avons donc six points de bifurcation que nous essayons de déterminer à l'aide des trois techniques décrites dans la *section 3*. Il faut noter que lorsque la structure atteint ces points de bifurcation, elle devient instable et un changement important de sa forme peut se produire.

L'indicateur de bifurcation détecte les six points de bifurcation. Il s'annule exactement aux points critiques (voir *figure 5*). La *figure 6* montre l'évolution de la fréquence relative  $\beta$  pour le premier mode de vibration en fonction du paramètre de charge  $\lambda$ . Comme pour l'indicateur de bifurcation,  $\beta$  est nul aux points critiques et détecte avec précision le point de bifurcation A. L'analyse des pôles des approximants de Padé donne aussi de bons résultats et permet de détecter les six points de bifurcation.

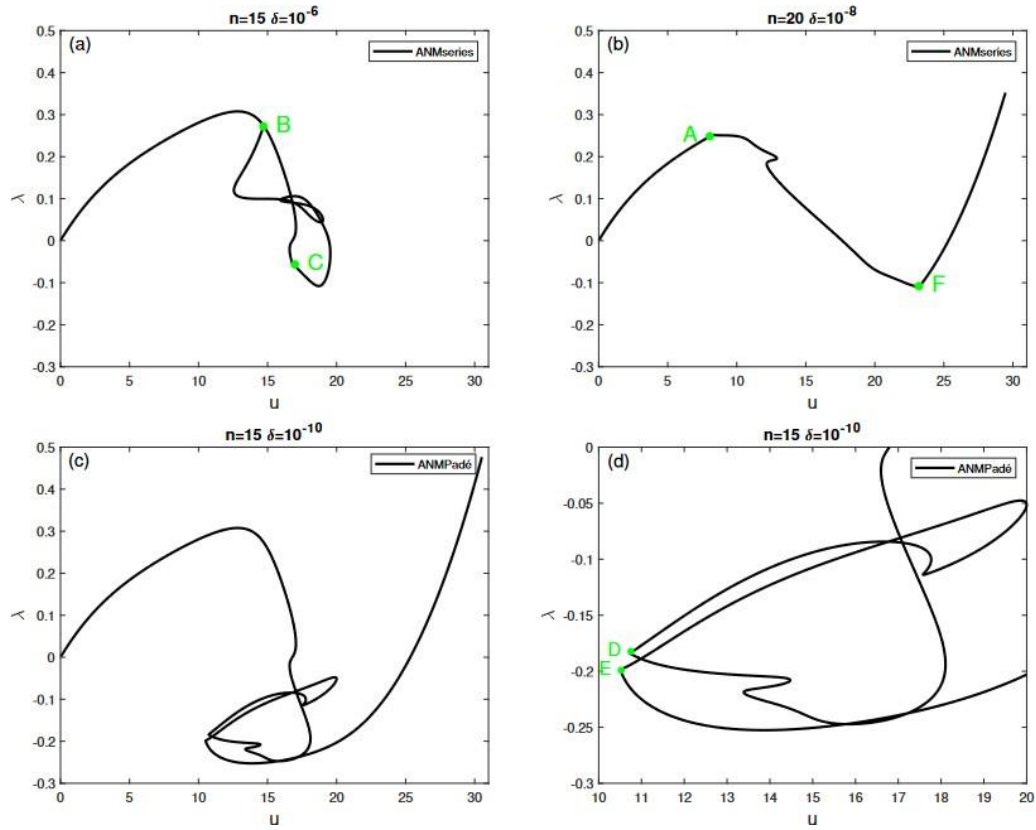


Figure 4 – Autres trajectoires d'équilibre de la structure en fonction du type de représentation, de l'ordre de troncature  $n$  et du paramètre de précision  $\delta$ . (a)  $n = 15, \delta = 10^{-6}$ , représentation en série (b)  $n = 20, \delta = 10^{-8}$ , représentation en série (c)  $n = 15, \delta = 10^{-10}$ , représentation Padé (d) un zoom de la figure 4.c ( $u \in [10 ; 20]$  et  $\lambda \in [-0.3 ; 0]$ )

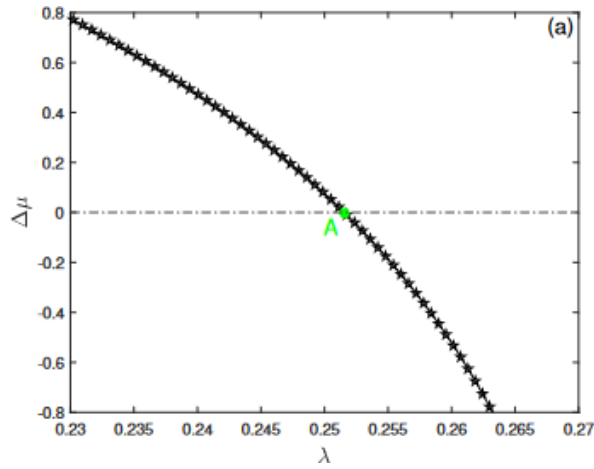


Figure 5 – Indicateur de bifurcation, le long de la branche d'équilibre, en fonction du paramètre de charge pour  $n = 15$  et  $\delta = 10^{-6}$  (Padé). Le point A est l'un des points de bifurcation de la structure

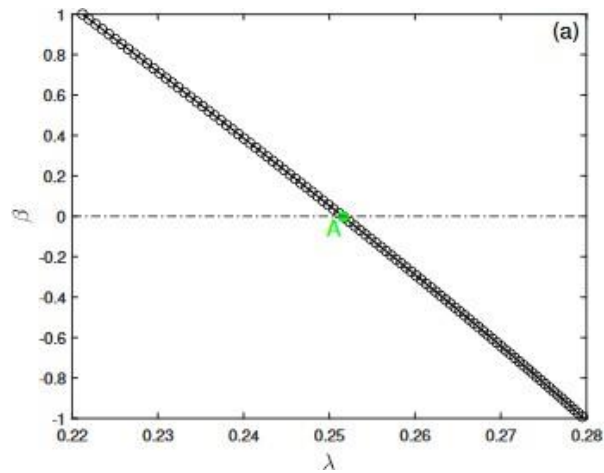


Figure 6 – Evolution de la fréquence propre relative  $\beta$  le long de la branche d'équilibre de la *figure 3*, en fonction de la charge  $\lambda$  pour le premier mode de vibration ( $n = 15$  et  $\delta = 10^{-6}$ ). Le point A est un point de bifurcation de la structure

## 5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons mis le point sur l'analyse de bifurcation pour les structures multicouches en utilisant la méthode asymptotique numérique. Trois techniques de détection de bifurcation ont été rappelées et nous ont permis de mener une étude approfondie sur l'instabilité des structures coques multicouches. La première technique est basée sur l'indicateur de bifurcation qui est calculé le long de la branche d'équilibre et qui s'annule exactement aux points critiques. L'utilisation d'une représentation rationnelle (approximants de Padé) au lieu d'une représentation polynomiale (séries de Taylor) permet à la fois d'améliorer le domaine de validité de la solution et de détecter la bifurcation en analysant les racines du dénominateur des fractions rationnelles. Une combinaison de flambage et de vibration décrit la troisième technique et les fréquences propres de vibration permettent de détecter les bifurcations.

## Références

- [1] A. Tri, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, Bifurcation indicator based on meshless and asymptotic numerical methods for nonlinear poisson problems, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 30 (3) (2014) 978–993.
- [2] C. G. Diaconu, P. M. Weaver, F. Mattioni, Concepts for morphing airfoil sections using bi-stable laminated composite structures, *Thin-Walled Structures* 46 (6) (2008) 689–701.
- [3] D. Kim, S. Joo, D. Kwak, H. Kim, Anisotropic viscoelastic shell modeling technique of copper patterns/photoimageable solder resist composite for warpage simulation of multi-layer printed circuit boards, *Journal of Micromechanics and Microengineering* 25 (10) (2015) 105016.
- [4] E. H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi, Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60 (12) (2004) 1987–2012.
- [5] E. H. Boutyour, L. Azrar, M. Potier-Ferry, Vibration of buckled elastic structures with large rotations by an asymptotic numerical method, *Computers & Structures* 84 (3-4) (2006) 93–101.
- [6] E. Ramm, *Buckling of Shells: Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium*, Universität Stuttgart, Germany, May 6–7, 1982, Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method, *Computer methods in applied mechanics and engineering* 175 (1-2) (1999) 71–85.
- [8] G. A. Baker, P. Graves-Morris, Padé approximants. Part 1: Basic theory, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications* (1981).
- [9] J. C. Simo, M. S. Rifai, A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29 (8) (1990) 1595–1638.
- [10] K. K. Yadav, S. Gerasimidis, Instability of thin steel cylindrical shells under bending, *Thin-Walled Structures* 137 (2019) 151–166.
- [11] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl, Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (15) (1994) 2551–2568.
- [12] N. Damil, M. Potier-Ferry, A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures, *International Journal of Engineering Science* 28 (9) (1990) 943–957.
- [13] Y. Wang, K. H. Low, H. L. J. Pang, K. H. Hoon, F. X. Che, Y. S. Yong, Modeling and simulation for a drop-impact analysis of multi-layered printed circuit boards, *Microelectronics Reliability* 46 (2-4) (2006) 558–573.
- [14] Z. S. Toor, Space applications of composite materials, *Journal of Space Technology* 8 (1) (2018) 65–70.