

Modèle de fissure cohésive : Couplage endommagement et plasticité

G. Blondet¹, C. Maurini²

¹ Navier, École des Ponts, Université Gustave Eiffel, CNRS, gaspard.blondet@enpc.fr

² Institut Jean le Rond d'Alembert, Sorbonne Université, CNRS, corrado.maurini@sorbonne-universite.fr

Résumé — La mécanique de la rupture élastique, largement répandue, peine à prendre en compte la nucléation et les effets d'échelles. Les modèles dits cohésifs définissent la relation entre le saut de déplacement et la contrainte de cohésion au niveau de la fissure. Cela permet d'introduire un critère en contrainte et une longueur interne répondant aux problèmes ci-dessus. En couplant un modèle d'endommagement à gradient et un modèle de plasticité parfaite, Alessi et al. parviennent à observer un comportement cohésif sous certaines conditions [1]. Nous nous proposons d'implémenter ce modèle dans un cas anti-plan.

Mots clés — endommagement, plasticité, fissuration cohésive.

1 Coupler l'endommagement et la plasticité?

En mécanique des milieux continus, une fissure peut être définie comme une zone de discontinuité du déplacement : il y a un saut de déplacement de part et d'autre de la fissure. La théorie la plus répandue pour étudier la rupture des matériaux fragiles est celle développée suite aux travaux de Griffith [7], qui associe à une fissure une énergie de surface proportionnelle à sa longueur (d'un facteur G_c qui est la ténacité du matériau). Lors de la propagation d'une fissure, l'augmentation de cette énergie de surface est égale à la restitution de l'énergie élastique. Cette théorie suppose que la contrainte est nulle au niveau de la fissure. Elle présente quelques défauts comme le manque d'une longueur caractéristique, ce qui peut mener à des problèmes d'échelles, et elle ne donne pas de critère pour la nucléation d'une fissure.

Une fissure cohésive se définit par un saut de déplacement pour une contrainte non nulle, contrairement à la théorie de Griffith, on ne néglige plus les forces de cohésion entre les lèvres de la fissure. Des modèles cohésifs ont déjà été étudiés suite aux travaux de Dugdale [6] et Barenblatt [2]. Ces modèles proposent ainsi des relations entre l'ouverture d'une fissure cohésive et la contrainte normale ou bien tangentielle. L'approche de la fissuration cohésive se fait donc en choisissant la forme de la relation puis en étudiant son effet sur la structure. En particulier, la nucléation d'une fissure est déduite de la valeur initiale de ces relations qui correspond à une contrainte critique du matériau.

En 2014, Alessi et al. proposent une démarche inverse avec une étude analytique d'un modèle 1D couplant la plasticité et l'endommagement [1]. Ce modèle est défini par le choix d'une énergie interne du matériau comprenant un terme élastique, un terme non linéaire analogue au cas de la plasticité parfaite et un terme d'endommagement, voir l'équation 1. Le couplage se fait simplement en choisissant que la rigidité μ , la limite d'élasticité σ_p et l'énergie de fissuration du matériau (le troisième terme de l'intégrale) dépendent d'une variable d'endommagement. Les variables internes pour ce modèle sont le déplacement u , la déformation non linéaire $\underline{\varepsilon}_{NL}$, et l'endommagement α . Il en ressort que sous certains choix de paramètres, une fissure cohésive apparaît et les auteurs donnent la relation analytique entre le saut de déplacement et la contrainte aux bords de la fissure : la loi cohésive.

$$E(u, \underline{\varepsilon}_{NL}, \alpha) = \int_{\Omega} \frac{\mu(\alpha)}{2} (\nabla u - \underline{\varepsilon}_{NL})^2 + \sigma_p(\alpha) \|\underline{\varepsilon}_{NL}\| + W_1 (w(\alpha) + l_0^2 \|\nabla \alpha\|^2) ds; \quad (1)$$

$$w(\alpha) = 1 - (1 - \alpha)^2; \quad \mu(\alpha) = \frac{1 - w(\alpha)}{1 + (\gamma - 1)w(\alpha)} \mu_0; \quad \sigma_p(\alpha) = (1 - w(\alpha)) \theta \sigma_D.$$

Les paramètres du modèle sont la rigidité initiale μ_0 , les facteurs γ et θ , le terme énergétique W_1 et la longueur l_0 qui est caractéristique de la taille de la localisation de l'endommagement. La contrainte

critique d'endommagement σ_D est déterminée en écrivant le critère d'endommagement pour $\varepsilon_{NL} = 0$ et $\alpha = 0$, voir l'équation 2. La limite d'élasticité initiale est ainsi donnée par $\sigma_{p,0} = \theta\sigma_D$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \right)' (\alpha = 0) \underline{\sigma}^2 \leq W_1 w'(\alpha = 0) ; \sigma_D = \sqrt{2W_1 \frac{\mu_0}{\gamma}}. \quad (2)$$

2 Implémentation du problème

On étudie une structure soumise à un chargement en cisaillement anti-plan. On se ramène donc à un problème bidimensionnel où les déplacements n'admettent qu'une composante non nulle, dans la direction normale au plan z . Les contraintes et déformations sont des vecteurs de deux composantes reliées aux dérivées du déplacement suivant les deux axes du plan x, y . La résolution consiste à minimiser l'énergie 1 de la structure. Le problème étant non-linéaire, on résout par incréments de chargement. La méthode des éléments finis est employée via le logiciel open-source FEniCSx [9].

L'énergie dépend de trois variables indépendantes. Cependant, on peut relier la déformation non linéaire au déplacement et à l'endommagement. Il ne nous restera ensuite qu'à procéder à une minimisation alternée.

On définit $\|\underline{\sigma}\| = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ avec $\underline{\sigma} = \mu(\alpha)(\nabla u - \underline{\varepsilon}_{NL})$. Le critère de plasticité s'écrit :

$$\|\underline{\sigma}\| - \sigma_p(\alpha) \leq 0.$$

À l'incrément de chargement i , on regarde si on a besoin de définir une déformation non linéaire. Pour cela, on définit un prédicteur élastique $\underline{\sigma}_{elas} = \mu(\alpha)\nabla u$ qui ne dépend que de u et α . Si ce prédicteur élastique suffit à vérifier le critère, nous pouvons donc prendre $\underline{\varepsilon}_{NL} = \underline{0}$. Dans le cas contraire, on doit prendre en compte une non-linéarité, et cela implique que le critère soit une égalité. On en déduit donc la valeur de la déformation non linéaire.

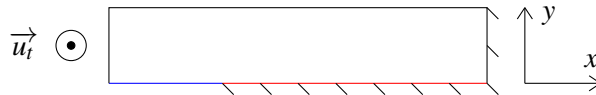
$$\|\underline{\varepsilon}_{NL}\| = \frac{\|\underline{\sigma}_{elas}\| - \sigma_p(\alpha)}{\mu},$$

$$\underline{\varepsilon}_{NL} = \|\underline{\varepsilon}_{NL}\| \frac{\underline{\sigma}_{elas}}{\|\underline{\sigma}_{elas}\|}.$$

Ceci nous permet donc d'obtenir $\underline{\varepsilon}_{NL}$ en fonction des deux autres variables. Cet algorithme se retrouve dans la littérature sous le nom d'algorithme du retour radial [3].

Pour la minimisation globale de l'énergie, un algorithme de minimisation alternée est implémenté. On minimise en fonction du déplacement, à endommagement fixe, puis en fonction de l'endommagement à déplacement fixe. La déformation non linéaire est définie implicitement dans la première minimisation. Cette double minimisation est répétée jusqu'à convergence de la norme de l'endommagement.

3 Propagation d'une fissure cohésive



Considérons une structure avec une fissure déjà existante (en bleu) est chargée en déplacement sur une extrémité, provoquant la propagation de la fissure si le chargement est suffisamment important.

Les résultats obtenus sont présentés figure 1. En choisissant $\theta < 1$, on impose que la plasticité apparaisse avant l'endommagement. Le cercle de plasticité en pointe de fissure est caractéristique du comportement élasto-plastique d'une fissure chargée en ouverture en mode III (anti-plan). Le rayon de ce cercle se retrouve analytiquement :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{III}}{\sigma_p} \right)^2$$

où K_{III} est le coefficient d'intensité des contraintes, relié au chargement et aux conditions aux limites.

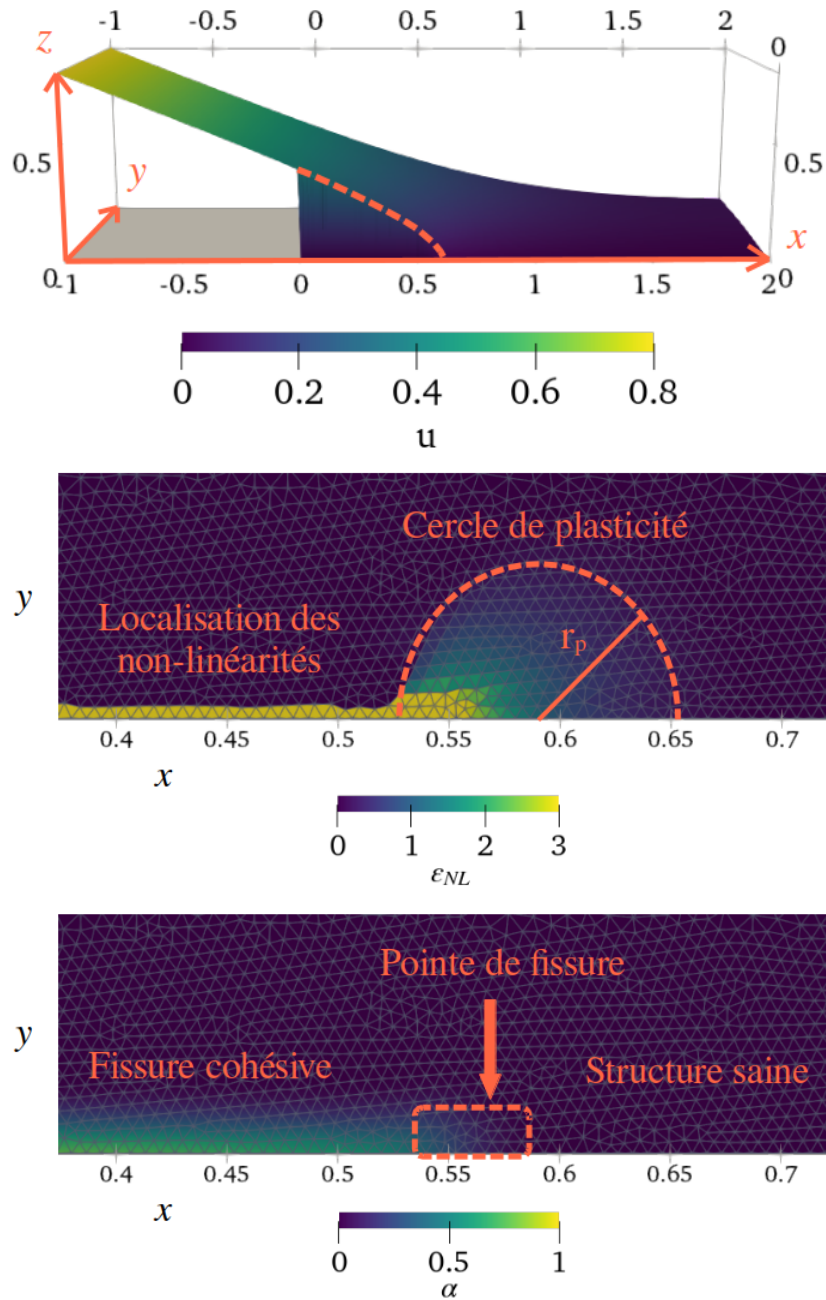


FIGURE 1 – Champ de déplacement (haut) : la fissure s’est propagée de $x = 0$ à $x = 0.5$ environ. Un saut de déplacement (sous la ligne en pointillé) permet de respecter la condition d’encastrement. Si on regarde de plus près la pointe de fissure, on peut observer le champ de déformation non linéaire (milieu) et le champ d’endommagement (bas). En pointe de fissure, la plasticité apparaît à l’intérieur d’un cercle avant de se localiser sur la lèvres (en atteignant des valeurs bien supérieures à 3), permettant ainsi un saut de déplacement sans avoir un endommagement $\alpha = 1$, donc en préservant des efforts de cohésion.

Nous remarquons qu'une fois que l'endommagement apparaît, la déformation non linéaire se localise sur une bande d'épaisseur un élément, et continue de croître uniquement dans cette bande. Cette déformation localisée permet une variation de déplacement très importante, assimilable à un saut. Cependant, la variable d'endommagement ne vaut pas 1, le matériau admet encore une contrainte non nulle dans cette zone. On peut ainsi récupérer les valeurs de sauts de déplacement et de contraintes sur les différents nœuds (au sens des éléments finis) de cette fissure cohésive, et tracer la loi cohésive. Cette dernière est présentée figure 2 pour plusieurs instants de chargement.

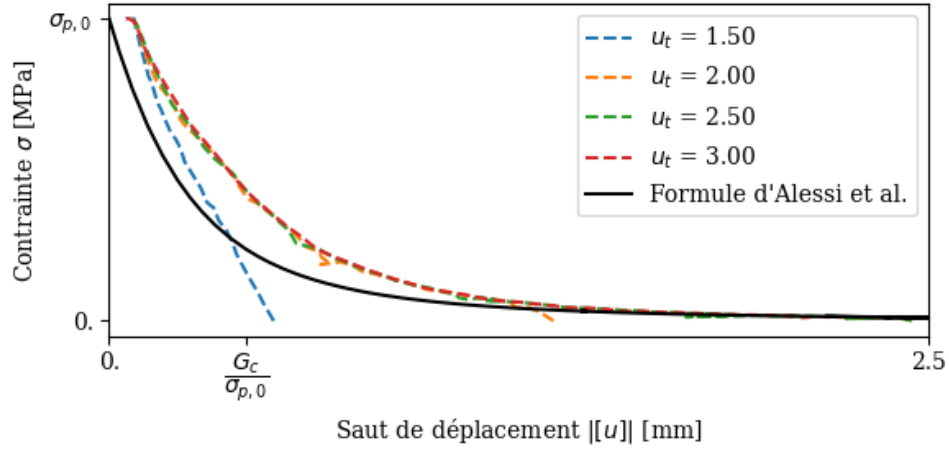


FIGURE 2 – Loi cohésive, comparaison entre le modèle numérique et la relation analytique. Le comportement fragile se retrouve asymptotiquement, lorsque la fissure s'ouvre grandement – pour des nœuds éloignés de la pointe de fissure. Au niveau de la pointe de fissure - $[u] = 0$ - l'endommagement ne s'est pas développé et la contrainte est égale à la limite élastique.

La densité d'énergie cohésive s'obtient en intégrant cette loi cohésive. Elle est tracée en figure 3. Notre modèle propose un critère en énergie et en contrainte. Ces deux critères se retrouvent graphiquement : l'énergie est bornée par G_c , analogue à une ténacité dans un modèle de rupture fragile à la Griffith; et la contrainte, dérivée de l'énergie, est bornée par la limite d'élasticité $\sigma_{p,0} = \theta\sigma_D$. À titre de comparaison, un modèle à la Griffith admettrait des contraintes infinies, ainsi la densité d'énergie serait directement égale à la ténacité du matériau à l'apparition d'une fissure. En définissant la ténacité comme

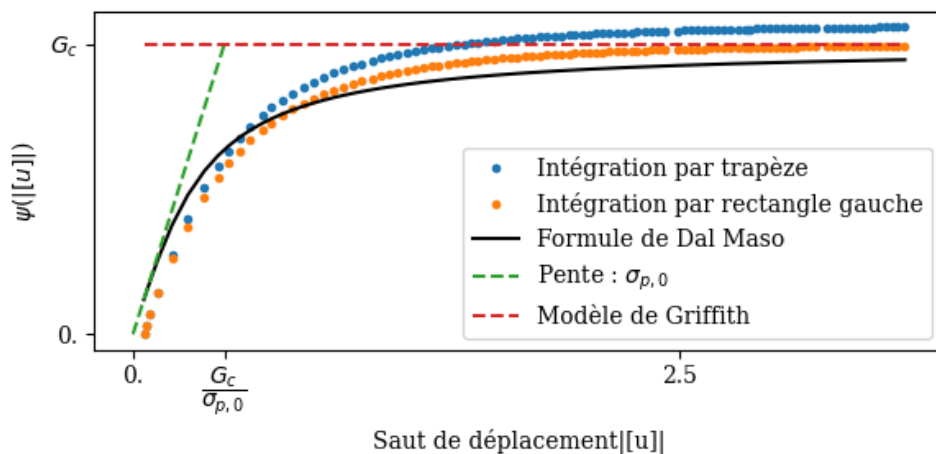


FIGURE 3 – Densité d'énergie cohésive, comparaison entre le modèle numérique et la relation analytique.

l'énergie dissipée par la structure durant tout le processus d'endommagement (donc jusqu'à la limite $\alpha = 1$), Alessi et al. montrent que :

$$G_c = \frac{\pi\gamma\theta\sigma_D^2}{2\mu_0}l_0. \quad (3)$$

Dal Maso et al. ont repris ce couplage entre endommagement et plasticité avec une approche fonctionnelle [5]. Cela a permis de montrer la Γ -convergence du modèle vers un modèle de rupture cohésive, et de donner une formule pour la densité d'énergie cohésive, tracée sur la figure 3. De plus, Dal Maso et al. démontrent que la densité d'énergie cohésive tend vers G_c défini ci-dessus, et sa dérivée à l'origine vaut la contrainte critique.

4 Étude de la nucléation, nécessité de critères adaptés

Tanné et al. ont réalisé une étude sur la nucléation de fissure pour un modèle d'endommagement à gradient [8]. Ils ont ainsi étudié un cas intermédiaire entre une structure saine et une structure avec une fissure préexistante : une structure avec un défaut en forme de V (V-notch). On étudie ce cas en ne regardant qu'à proximité de la pointe du défaut, ce qui revient à une géométrie Pac-Man chargée sur ses bords par la solution asymptotique en déplacement issue de la théorie élastique, voir la figure 4. Un facteur d'intensité de contrainte généralisé k_c est alors introduit pour tenir compte de l'ouverture $2\bar{\omega}$ du défaut initial. Ce facteur peut être pris comme paramètre de chargement, et on relève pour chaque ouverture la valeur critique avant propagation d'une fissure. La courbe ainsi obtenue permet donc de faire la transition entre le cas d'une structure saine et le cas d'une structure avec fissure. On propose de reprendre cette étude avec notre modèle couplé plasticité et endommagement.

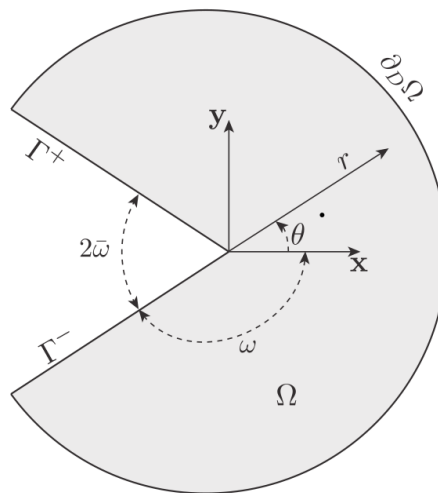


FIGURE 4 – Géométrie Pac-Man. Image issue de Tanné et al. [8]. En fonction de la géométrie et du chargement de la structure globale, on impose sur $\partial_D \Omega$ un déplacement issu de la théorie élastique de la rupture.

La courbe de nucléation pour notre modèle cohésif est tracée figure 5. On s'attend à retrouver la contrainte critique $\sigma_{p,0}$ pour le cas d'une structure saine, et le facteur d'intensité des contraintes critique pour le cas d'une fissure $K_{III,c,eff}$. Ce deuxième cas est plus subtil à appréhender. Nous avons vu en effet que notre modèle tend *asymptotiquement* vers le modèle de Griffith. En particulier, l'endommagement tend vers 1, et on n'observe pas de fissure avec une contrainte nulle. Nous avons défini un critère sur la valeur de l'endommagement pour dire : à partir de $\alpha = \alpha_{lim}$, on considère que c'est une fissure. Hors le facteur d'intensité des contraintes critiques, qui sert généralement de critère de propagation dans le cas de la théorie de Griffith, est justement défini en négligeant les contraintes de cohésion. Se pose ainsi la question de trouver un critère adapté pour les modèles cohésifs, et en particulier le nôtre qui ne permet pas l'apparition d'une zone cohésive bornée des deux côtés, au contraire d'un modèle de type Dugdale-Barenblatt qui rejoint le modèle de Griffith pour une valeur finie d'ouverture de fissure, laissant la place à une "vraie" fissure, non cohésive. On renvoie à ce propos au papier de Dal Maso [4] qui montre que dans le cas anti-plan, la propagation d'une fissure cohésive se fait par sauts intermittents, ce que nous n'observons pas. Ici, la fissure cohésive ne sert pas juste de transition pour passer à une fissure non cohésive et c'est peut-être une des sources de nos ennuis.

La principale perspective de poursuite de ce travail est donc de définir un critère de propagation de fissure adapté à notre modèle. Il s'agit là de tracer la limite entre fissure non cohésive, à contrainte nulle,

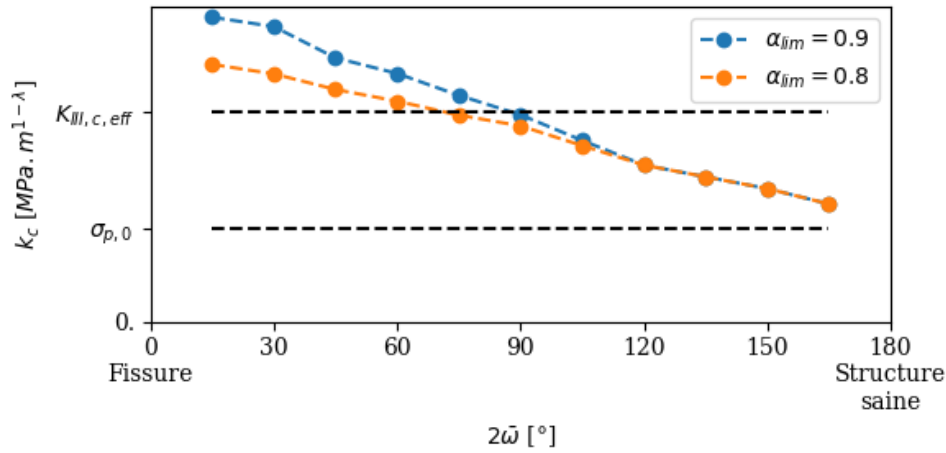


FIGURE 5 – Courbe de nucléation. Notre modèle tend vers un critère en contrainte pour une structure saine. En revanche, le cas de propagation d’une fissure nécessite de définir un critère adapté à notre modèle, qui correspondrait au critère en concentration de contrainte.

fissure cohésive, et structure saine, sans saut de déplacement.

Références

- [1] R. Alessi, J.-J. Marigo, S. Vidoli. *Gradient damage models coupled with plasticity and nucleation of cohesive cracks*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 214 :575– 615, 2014.
- [2] G. I. Barenblatt. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture.*, Advances in applied mechanics, 7 :55–129, 1962.
- [3] M. Bonnet, A. Frangi. *Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis*, Notes de cours, École Polytechnique, 2005.
- [4] G. Dal Maso, L. Heltai. *A numerical study of the jerky crack growth in elastoplastic materials with localized plasticity*, arXiv preprint arXiv :2004.12705, 2020.
- [5] G. Dal Maso, G. Orlando, R. Toader. *Fracture models for elasto-plastic materials as limits of gradient damage models coupled with plasticity : the antiplane case*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 55 :45-63, 2016.
- [6] D. S. Dugdale. *Yielding of steel sheets containing slits*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8(2) :100–104, 1960.
- [7] A. A. Griffith. *The phenomena of rupture and flow in solids.*, Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character, 221(582-593) :163–198, 1921
- [8] E. Tanne, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini. *Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 110 :80–99, 2018.
- [9] M. W. Scroggs, J. S. Dokken, C. N. Richardson, G. N. Wells. *Construction of arbitrary order finite element degree-of-freedom maps on polygonal and polyhedral cell meshes*, ACM Transactions on Mathematical Software 48(2) 2022.

Voir également sur : <https://fenicsproject.org/>