

Vers une compréhension de la convergence de la méthode d'identification data-driven

N. Hachem, A. Leygue, L. Stainier

Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, 44000 Nantes, France
{nour.hachem, adrien.leygue, laurent.stainier}@ec-nantes.fr

Résumé — L'approche d'identification Data-Driven (DDI), proposée par Leygue *et al.* (2018), permet d'estimer les champs de contraintes à partir des mesures de champs de déformation et des résultantes d'efforts appliqués, sans postuler de modèle de comportement. Une analyse mathématique approfondie de cette approche reste cependant à réaliser. Ce travail présente une étude sur la convergence de la méthode dans le cadre du comportement élastique.

Mots clés — Data-Driven, Identification.

1 Introduction

L'identification de la réponse mécanique des matériaux constitue un défi important en mécanique des solides. L'objectif principal est d'établir une relation entre au moins une mesure de déformation et une mesure de contrainte, bien que d'autres caractéristiques puissent être prises en compte, en fonction du matériau, telles qu'une réponse dépendante du temps ou de la vitesse.

Cette relation peut être identifiée grâce à des essais mécaniques, qu'ils soient des essais simples –homogènes isostatiques– ou complexes. Les essais simples sur le matériau permettent de calculer le champ de contrainte d'une manière directe à partir d'une mesure de force. Ces essais ne permettent toutefois de solliciter le matériau que dans des modes de déformation simples, ce qui nécessite parfois de réaliser plusieurs essais. D'autre part, les essais complexes avec un champ de déformation hétérogène offrent davantage d'informations en un seul essai, mais il n'est alors pas possible d'acquérir directement l'état de contrainte avec les méthodes classiques.

Pour surmonter ces difficultés, différentes méthodes d'identification et d'ajustement des paramètres ont été proposées [1], telles que la méthode de recalage par élément fini (FEMU), la méthode des champs virtuels (VFM), ainsi que des approches basées sur les réseaux de neurones [6], entre autres. Ces méthodes sont basées sur un modèle de comportement postulé a priori, dont les paramètres sont ajustés en fonction des données expérimentales. Cependant, l'efficacité de ces méthodes repose sur la qualité des mesures expérimentales, et le choix du modèle de comportement qui introduit un biais fort, ce qui renforce l'intérêt d'obtenir une méthode permettant d'identifier les valeurs des contraintes sans postuler un modèle de comportement.

Une approche d'identification appelée Data-Driven Identification (DDI) a été proposée par Leygue *et al.* [4], permettant d'estimer les champs de contraintes à partir des mesures de champs de déformation et des résultantes d'efforts appliqués, sans postuler un modèle de comportement. Cette méthode est basée sur la méthode Data Driven Computational Mechanics (DDCM) introduite par Kirchdoerfer et Ortiz [3], où une base de données de couples déformations-contraintes admissibles échantillonnent la réponse mécanique du matériau.

La DDI construit cette base de données qui sert à régulariser le problème d'estimation des contraintes, qui admet en général de multiples solutions. La robustesse de l'algorithme est conditionnée par deux paramètres. Leur influence est évaluée à l'aide de données synthétiques dans la thèse de Dalémat [2], comme illustré dans la figure 1. Dans cette figure, e est une mesure de l'erreur d'identification des contraintes, r^* est inversement proportionnel à la taille de la base de données N^* , tandis que C est un paramètre de la DDI qui définit la norme utilisée. On observe que pour des grandes valeurs de C la courbe d'erreur en fonction de r^* semble converger et on note la présence d'un minimum unique qui semble indiquer une valeur optimale pour r^* .

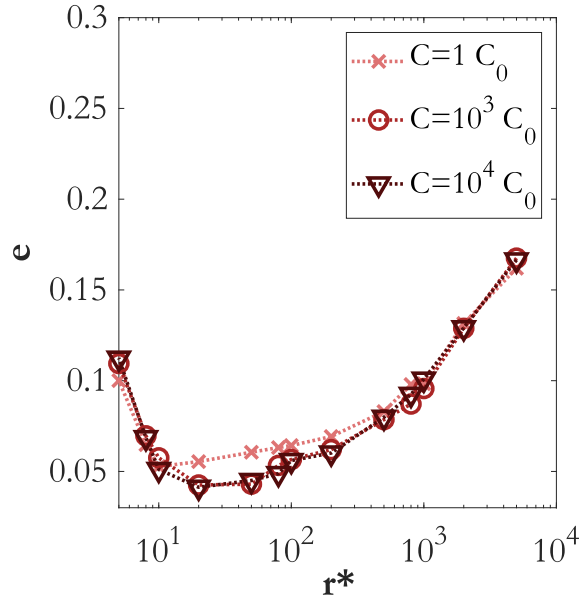


FIGURE 1 – Influence des paramètres r^* et C en fonction de e , une mesure de l'erreur d'identification des contraintes [2]

Dans la suite de ce document, on propose une étude paramétrique similaire qui montre que la réalité est sans doute plus complexe. Dans la section 2, on rappelle la méthode DDI et une implémentation itérative de la solution similaire à celle utilisée par la thèse de Dalémat. Dans la section 3, on effectue une analyse paramétrique afin d'étudier l'erreur commise par la DDI mais aussi l'unicité de la solution en fonction de r^* .

2 Méthode Data-Driven Identification

Dans cette section, on présente la DDI telle qu'elle peut se simplifier pour $C \gg 1$, afin de se placer dans un cadre d'étude similaire à celui de Dalémat. La DDI vise à minimiser la distance entre les contraintes mécaniques dans la pièce et leur plus proche représentant dans une base de donnée matériau. Le problème se traduit mathématiquement comme,

$$\begin{aligned}
 \text{solution} &= \arg \min_{ie, \epsilon_{ie}^*, \sigma_{ie}^*, \sigma_e} \sum_{e=1}^M \left\| (\epsilon_e, \sigma_e) - (\epsilon_{ie}^*, \sigma_{ie}^*) \right\|_C^2 \\
 &= \arg \min_{ie} \left[\arg \min_{\epsilon_{ie}^*} \sum_{e=1}^M C \left\| \epsilon_e - \epsilon_{ie}^* \right\|_2^2 + \arg \min_{\sigma_{ie}^*, \sigma_e} \sum_{e=1}^M C^{-1} \left\| \sigma_e - \sigma_{ie}^* \right\|_2^2 \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

où ϵ_e est la déformation mesurée en chaque point d'intégration e , σ_e la contrainte de Cauchy, $(\epsilon_{ie}^*, \sigma_{ie}^*)$ la base de donnée matériau qui échantillonne le comportement et $ie := i(e)$ la fonction d'appariement qui pour chaque couple (ϵ_e, σ_e) donne le couple $(\epsilon_{ie}^*, \sigma_{ie}^*)$ le plus proche au sens de (1). Cette minimisation s'effectue sous la contrainte d'équilibre mécanique : $D \sigma = f$ avec σ la représentation vectorielle de σ_e et D l'opérateur de divergence discret.

Quand C est suffisamment grand, on peut montrer que l'algorithme suivant effectue bien la minimisation.

1. Appliquer un *K-means* sur ϵ_e , les centroïdes identifiées donnent ϵ_{ie}^* et les clusters ainsi définis donnent ie . Cette étape nécessite un choix de N^* la taille de base de données.
2. Initialisation de σ^* la base de donnée en contraintes.
3. Minimisation de (1) par rapport à σ_e sous contraintes d'équilibre $D \sigma = f$.

$$\arg \min_{\sigma_e} \sum_{e=1}^M \left\| \sigma_e - \sigma_{ie}^* \right\|_2^2$$

4. Minimisation de (1) par rapport à σ_{ie}^* .

$$\arg \min_{\sigma_{ie}^*} \sum_{e=1}^M \|\sigma_e - \sigma_{ie}^*\|_2^2$$

5. On itère les points 3-4 jusqu'à la stagnation de la solution.

Le lecteur intéressé est invité à consulter les travaux de Leygue *et al.* [4] pour plus de détails.

Dans la suite de ce travail, on va tester la convergence de ce schéma pour différentes valeurs de r^*/N^* et pour différentes initialisations de σ^* .

3 Résultats et Discussion

Dans cette section, on applique la DDI telle que décrite ci-dessus sur des données synthétiques. Le problème consiste à identifier la réponse mécanique d'un matériau non linéaire sur un problème bi-dimensionnel, avec l'hypothèse de contrainte plane. Nous considérons un maillage d'éléments finis 2D avec 4866 nœuds et 9204 points de quadrature, représenté par la figure 2. On a appliqué sur l'éprouvette une traction dans la direction y pour générer un allongement relatif de 5%. Le modèle de comportement utilisé pour la simulation est le même que celui décrit dans la section 3.2 de [4].

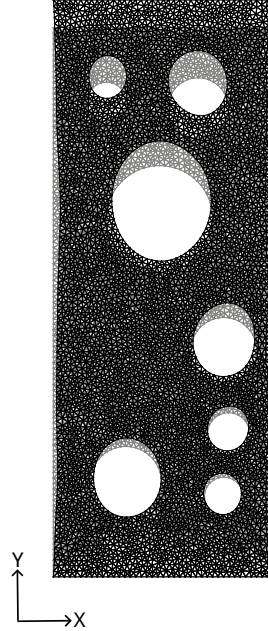


FIGURE 2 – Structure déformée en traction

Les contraintes générées par le modèle de comportement $\hat{\sigma}$ sont notées $\sigma_e^{FE} = \hat{\sigma}(\varepsilon_e)$. Les contraintes mécaniques du résultat de la DDI seront notées σ_e^{DDI} .

Pour chaque valeur de r^* , on va considérer trois initialisations :

1. Initialisation à zéro, $\sigma_{ie}^* = 0$.
2. Initialisation avec le vrai modèle de comportement, $\sigma_{ie}^* = \hat{\sigma}(\varepsilon_{ie}^*)$.
3. Initialisation aléatoire qui suit une distribution normale.

Pour chaque application de la DDI, on calcule l'erreur comme suit :

$$e_m = \sum_e \|\sigma_e^{DDI} - \sigma_e^{FE}\|_2^2 \quad (2)$$

Il est important de noter qu'on a maintenu le même clustering pour les trois initialisations, autrement dit, on a gardé le même ie . En outre, en ce qui concerne l'initialisation aléatoire, nous avons effectué 50 initialisations aléatoires, et l'erreur affichée dans la figure 4 représente la moyenne des erreurs e_m sur ces 50 initialisations.

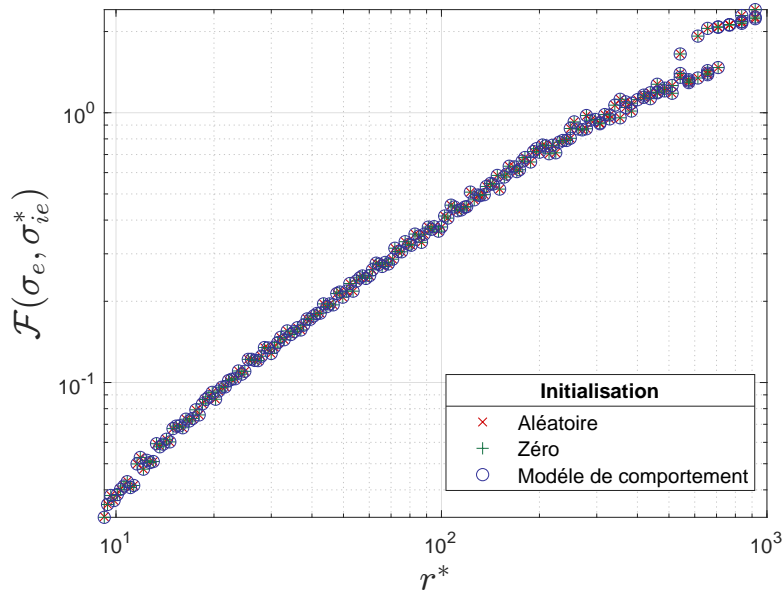


FIGURE 3 – Résultat de minimisation de $\mathcal{F}(\sigma_e, \sigma_{ie}^*)$ pour différentes initialisations et différents r^*

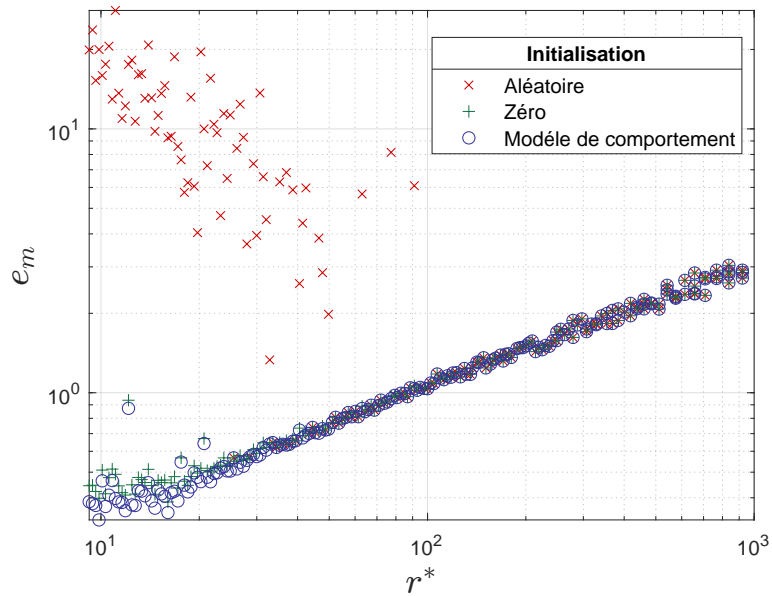


FIGURE 4 – Étude paramétrique sur l'influence de r^* et de l'initialisation par rapport à l'erreur e_m

En se référant à la figure 4, on remarque que, lorsque la valeur de r^* est grande, le résultat est le même. En revanche, lorsque r^* diminue l'erreur diminue également, ce qui illustre la convergence de la DDI vers le vrai champ de contraintes. Cependant, en deçà d'une certaine valeur, on observe que la DDI converge vers des résultats différents en fonction de l'initialisation. D'autre part, pour tout r^* , la valeur minimale atteinte par le résultat de minimisation de $\mathcal{F}(\sigma_e, \sigma_{ie}^*) = \sum_e \|\sigma_e - \sigma_{ie}^*\|_2^2$ ne dépend pas de l'initialisation, comme le montre la figure 3. Ceci suggère que pour certaine valeur de r^* , le problème (1) admet plusieurs solutions et qu'il est mal conditionné.

Il est fort probable que le même problème soit présent dans la figure 1 : à partir d'une certaine valeur de r^* on perd l'unicité de la solution au problème posé par la DDI. En d'autres termes, au-delà de ce seuil, nous ne pouvons pas faire confiance aux résultats donnés dans la figure 1. L'augmentation de l'erreur observée aux faibles valeurs de r^* est probablement liée aux détails de l'initialisation des calculs.

4 Conclusion

Nous avons montré que le problème DDI, tel qu'il est formulé dans les références jusqu'à présent, peut admettre plusieurs solutions dans certaines conditions. Il nous faut donc une analyse mathématique plus approfondie de cette approche, qui nous permettra d'évaluer sa convergence, sa robustesse et ses limitations. Grâce à cette analyse, nous pourrions également mieux définir le domaine d'application de la méthode DDI et identifier les conditions dans lesquelles elle est la plus appropriée et efficace.

Remerciements

Ces travaux ont bénéficié d'un financement de l'ISite NExT (Nantes Université) au travers du projet IRP iDDrEAM.

Références

- [1] S. Avril, M. Bonnet, AS. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, F. Pierron, *Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements*, *Experimental Mechanics* 48, 381-402, 2008.
- [2] M. Dalémat, *Une expérimentation réussie pour l'identification de la réponse mécanique sans loi comportement : Approche data-driven appliquée aux membranes élastomères*, Thèse de Doctorat, École centrale de Nantes, 2019.
- [3] T. Kirchdoerfer, M. Ortiz, *Data-driven computational mechanics*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 304, 81-101, 2016.
- [4] A. Leygue, M. Coret, J. Réthoré, L. Stainier, E. Verron, *Data-based derivation of material response*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 331, 184-196, 2018.
- [5] L. Stainier, A. Leygue, M. Ortiz, *Model-free data-driven methods in mechanics : material data identification and solver*, *Computational Mechanics* 64 (2), 381-393, 2019.
- [6] P. Thakolkaran, A. Joshi, Y. Zheng, M. Flaschel, L. De Lorenzis, S. Kumar, *NN-EUCLID : Deep-learning hyperelasticity without stress data*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 169, 105076, 2022.