

Estimation d'erreur pour la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes

N. Q. Ta^{1,2}, B. Faure², L. Chamoin¹, A. Barbarulo¹, G. Puel¹

¹ Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, ludovic.chamoin@ens-paris-saclay.fr; {nhat-quang.ta, andrea.barbarulo, guillaume.puel}@centralesupelec.fr

² SNCF Innovation-Recherche, baldrik.faure@snCF.fr

Résumé — Ce travail a pour objectif d'établir la faisabilité d'une démarche adaptative d'amélioration de la solution numérique dans le cadre de la théorie variationnelle des rayons complexes appliquée au domaine de l'acoustique ferroviaire. Un exemple académique simple, pour lequel une solution analytique est disponible, permettra de valider l'utilisation d'un estimateur d'erreur de type *Dual-Weighted Residual* sur une quantité d'intérêt telle que la moyenne de la pression ou de la vitesse mesurée sur une paroi.

Mots clés — acoustique, théorie variationnelle des rayons complexes, erreur en quantité d'intérêt.

1 Introduction et contexte

Bien que le transport ferroviaire puisse être considéré comme un mode de transport respectueux de l'environnement, il présente le principal inconvénient d'être une source de bruit problématique pour son voisinage immédiat. Afin de répondre à ce défaut, les acteurs industriels comme académiques du domaine ferroviaire s'intéressent au développement d'outils numériques capables de modéliser précisément le rayonnement acoustique, avec une volonté d'établir des modalités de certification virtuelle.

La bande fréquentielle acoustique d'intérêt pour le domaine ferroviaire se situe dans le domaine dit des moyennes fréquences (jusqu'à 20 kHz typiquement ici). Les méthodes numériques traditionnellement dédiées au domaine des basses fréquences (FEM [1], BEM [2, 3]) et hautes fréquences (SEA [4, 5]) sont inadaptées à cette bande fréquentielle [6]. En effet, le spectre de la réponse acoustique montre une forte densité modale et une sensibilité élevée aux incertitudes tout en conservant une réponse localisée spatialement ; c'est pourquoi des méthodes dédiées aux moyennes fréquences doivent être envisagées.

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) [7], qui appartient à la famille des méthodes de Trefftz [8], a été implémentée dans le cadre de la propagation acoustique en moyennes fréquences. Cette méthode repose sur le choix de fonctions de forme qui vérifient l'équation de Helmholtz *a priori* dans le domaine, ce qui permet de représenter le champ de pression comme une combinaison linéaire d'ondes planes (ici, des fonctions d'Herglotz) orientées selon de multiples directions radiales, chacune d'entre elles étant appelée « rayon TVRC ».

Le code TVRC en acoustique 2D utilisé dans ce travail a été obtenu en introduisant la forme variationnelle du problème [9, 10], et en utilisant une méthode de Galerkin pour obtenir un modèle discrétisé à partir de ces rayons TVRC. Comme ces derniers sont définis sur le domaine tout entier, il n'y a besoin que de tenir compte de leur trace sur la frontière : aucun maillage n'est requis et le système linéaire associé est de dimension correspondant au nombre de rayons TVRC introduits dans la formulation variationnelle. Cette dernière permet ainsi d'éliminer les erreurs d'interpolation et de pollution intrinsèques à la FEM [11] tout en facilitant son couplage avec d'autres physiques.

Bien que la convergence de la solution TVRC vers la solution exacte du problème étudié ait été montrée pour des problèmes 2D bornés et infinis [12], aucune démarche systématique de quantification de l'erreur commise n'a encore été proposée dans le cadre de la TVRC. Le but de cette communication est ainsi d'étudier la possibilité d'introduire un estimateur d'erreur en quantité d'intérêt afin d'obtenir une approche adaptative d'amélioration de la solution TVRC.

2 TVRC en acoustique

2.1 Problème de référence : équation de Helmholtz homogène en 2D

On s'intéresse au problème de référence, illustré sur la figure 1 dans le cas de deux sous-domaines, et correspondant à la formulation forte suivante, que l'on cherche à résoudre dans un domaine Ω pouvant se décomposer comme une partition de sous-domaines étoilés $\{\Omega_e\}_{1 \leq e \leq E}$. Il s'agit alors de trouver $p = (p_1, \dots, p_E)$ tels que :

$$\Delta p_e + k^2 p_e = 0, \text{ dans } \Omega_e, 1 \leq e \leq E \quad (1)$$

et vérifiant les conditions aux limites suivantes :

$$p_e = p_{imp}, \text{ sur } \partial_p \Omega_e \subset \partial \Omega_e, 1 \leq e \leq E \quad (2a)$$

$$\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_e}{\partial n_e} = v_{imp}, \text{ sur } \partial_v \Omega_e \subset \partial \Omega_e, 1 \leq e \leq E \quad (2b)$$

$$p_e - \frac{i Z_{imp}}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_e}{\partial n_e} = 0, \text{ sur } \partial_Z \Omega_e \subset \partial \Omega_e, 1 \leq e \leq E \quad (2c)$$

et les conditions de continuité suivantes sur la frontière Γ_{ef} entre deux domaines Ω_e et $\Omega_{f \neq e}$:

$$p_e - p_f = 0, \text{ sur } \Gamma_{ef} = \partial \Omega_e \cap \partial \Omega_f, 1 \leq e \neq f \leq E \quad (3a)$$

$$\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_e}{\partial n_e} + \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_f}{\partial n_f} = 0, \text{ sur } \Gamma_{ef} = \partial \Omega_e \cap \partial \Omega_f, 1 \leq e \neq f \leq E \quad (3b)$$

où ω est la pulsation d'étude, $k = (1 - i\eta)\omega/c_0$ le nombre d'onde (complexe) associé, et ρ_0 , c_0 et η sont respectivement la densité, la vitesse du son et le facteur d'amortissement pour le fluide, tous supposés homogènes. Par ailleurs, p_{imp} , v_{imp} et Z_{imp} désignent respectivement la pression, la vitesse et l'impédance imposées sur les différentes parties du bord $\partial \Omega_e$. Enfin, \underline{n}_e désigne la normale unitaire sortante au sous-domaine Ω_e sur sa frontière, et permet de définir la dérivée normale associée $\partial \bullet / \partial n_e$.

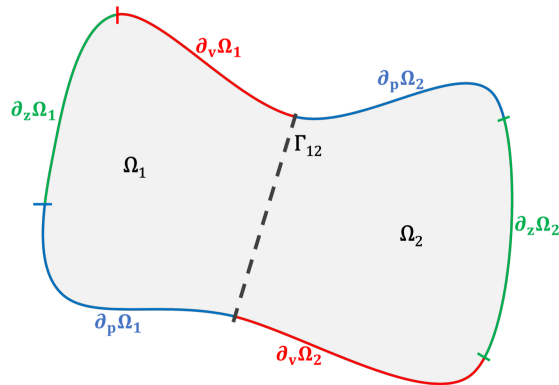


FIGURE 1 – Problème de référence pour la TVRC appliquée à l'acoustique 2D : illustration pour deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 .

2.2 Formulation TVRC

Comme les rayons TVRC vérifient l'équation de Helmholtz à l'intérieur de chaque sous-domaine, la forme variationnelle associée au problème de référence précédent est écrite sur la frontière; il s'agit alors de trouver $p = (p_1, \dots, p_E)$ tel que $\Delta p_e + k^2 p_e = 0$, dans Ω_e , $1 \leq e \leq E$ et :

$$B(p, \delta p) = F(\delta p), \forall \delta p = (\delta p_1, \dots, \delta p_E) \quad (4a)$$

$$\text{avec } B(p, \delta p) = \sum_{e=1}^E \Re \left\{ \int_{\partial_p \Omega_e} p_e \overline{\delta v_e} dS_e + \int_{\partial_v \Omega_e} v_e \overline{\delta p_e} dS_e + \int_{\partial_z \Omega_e} (p_e - Z_{imp} v_e) \overline{\delta v_e} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{f \neq e} \int_{\Gamma_{ef}} (p_e - p_f) \overline{\delta v_e - \delta v_f} + (v_e + v_f) \overline{\delta p_e + \delta p_f} dS_{ef} \right\} \quad (4b)$$

$$\text{et } F(\delta p) = \sum_{e=1}^E \Re \left\{ \int_{\delta_p \Omega_e} p_{imp} \overline{\delta v_e} dS_e + \int_{\delta_v \Omega_e} v_{imp} \overline{\delta p_e} dS_e \right\} \quad (4c)$$

où $v_e = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_e}{\partial n_e}$ et $\delta v_e = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \delta p_e}{\partial n_e}$ sont définis sur $\partial \Omega_e$, et $\bar{\bullet}$ désigne le conjugué de \bullet .

Le champ de pression est alors recherché comme une somme d'ondes planes par sous-domaine :

$$p_e = \sum_{n_e=1}^{N_e} a_{n_e} e^{ik_{n_e}(\theta_{n_e}) \cdot \underline{x}}, \text{ dans } \Omega_e, 1 \leq e \leq E \quad (5)$$

pour laquelle une discrétisation angulaire $\{\theta_{n_e}\}_{1 \leq n_e \leq N_e}$ est choisie pour chaque sous-domaine Ω_e . Le système linéaire final à résoudre peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{B} \underline{a} = \underline{F} \quad (6)$$

où \underline{a} est le vecteur des inconnues d'amplitude des différents rayons, et \mathbb{B} et \underline{F} sont les versions discrétisées de la forme bilinéaire $B(\bullet, \bullet)$ et de la forme linéaire $F(\bullet)$, de dimensions respectives $N \times N$ et $N \times 1$, où $N = \sum_{e=1}^E N_e$.

3 Erreur en quantité d'intérêt

3.1 Principe

Afin de proposer une version adaptative de la TVRC, permettant d'atteindre une précision garantie choisie à l'avance, on adopte le concept d'erreur en quantité d'intérêt, proposé dans un cadre général dans [13, 14]. L'idée est d'approcher une quantité dite d'intérêt aussi bien que possible : cette dernière est définie de façon générale comme une forme linéaire de la solution du problème simulé : $Q(p)$.

Pour un problème générique écrit sous forme variationnelle analogue à l'équation (4), on introduit un problème d'état adjoint, qui consiste à déterminer $z = (z_1, \dots, z_E)$ tel que $\Delta z_e + k^2 z_e = 0$, dans Ω_e , $1 \leq e \leq E$ et :

$$B(\delta z, z) = Q(\delta z), \forall \delta z = (\delta z_1, \dots, \delta z_E) \quad (7)$$

avec les mêmes formes bilinéaire B et linéaire F que dans l'équation (4).

Il est alors possible d'introduire un estimateur d'erreur de type DWR (*Dual-Weighted Residual* [15, 16, 17]) qui permet de quantifier l'écart entre la quantité d'intérêt obtenue par simulation et celle associée au problème de référence à l'aide des solutions (p_h, z_h) du problème initial (4) et du problème adjoint (7) :

$$Q(p) - Q(p_h) \approx F(z_h) - B(p_h, z_h) \quad (8)$$

où z_h est supposée être très proche de la solution z du problème adjoint (7).

3.2 Application à un exemple académique

Afin de montrer la faisabilité de la démarche, on se propose d'étudier un exemple simple de propagation acoustique dans une seule cavité 2D de forme rectangulaire, pour laquelle on impose une pression nulle sur trois côtés et une pression unitaire au niveau du quatrième côté $\partial_4 \Omega$. La quantité d'intérêt choisie est alors la vitesse moyenne au niveau de ce côté :

$$Q(p) = \frac{1}{|\partial_4 \Omega|} \Re \left\{ \int_{\partial_4 \Omega} \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p}{\partial n} dS \right\} \quad (9)$$

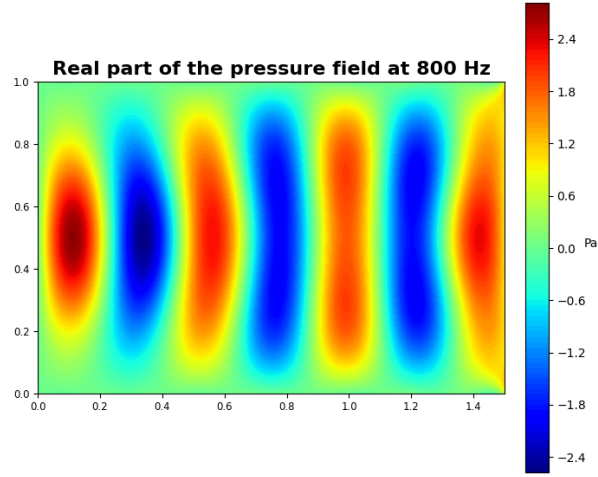


FIGURE 2 – Problème de référence considéré (pression imposée sur le bord de droite $\partial_4\Omega$) : champ de pression calculé par la TVRC (128 rayons).

La solution en pression de ce problème, obtenue avec 128 rayons, est représentée sur la figure 2.

Le problème adjoint associé à cette quantité d'intérêt est alors défini comme suit :

$$\Re \left\{ \int_{\partial\Omega} \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial z}{\partial n} \overline{\delta z} dS \right\} = B(\delta z, z) = Q(\delta z) = \frac{1}{|\partial_4\Omega|} \Re \left\{ \int_{\partial_4\Omega} \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \delta z}{\partial n_e} dS \right\}, \forall \delta z \quad (10)$$

La solution de ce problème adjoint peut alors être obtenue dans le cadre de la TVRC, puis l'erreur en quantité d'intérêt peut être estimée à l'aide de l'équation (8). Par ailleurs, le problème de référence étant suffisamment simple pour admettre une solution analytique, il est possible de comparer cet estimateur à la valeur vraie de l'erreur, comme illustré sur la figure 3 dans le cas d'un problème de référence résolu avec seulement 20 rayons (de directions équiréparties dans le domaine) : on constate alors une très bonne correspondance entre les deux quantités dès que le problème adjoint arrive à convergence, aux alentours de 35 rayons.

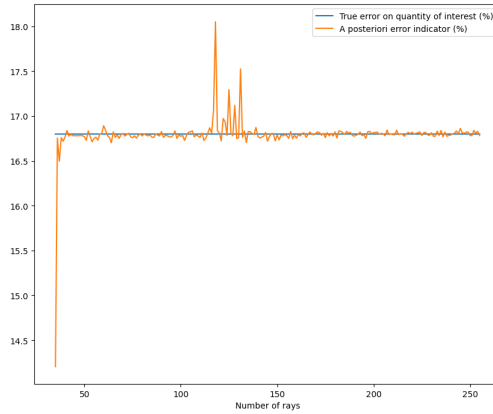


FIGURE 3 – Comparaison entre l'erreur vraie et l'estimateur d'erreur pour la quantité d'intérêt $Q(p)$, avec 20 rayons pour le problème de référence, et de 35 à 256 rayons pour le problème adjoint.

Une étape importante sera ensuite d'analyser la contribution de chaque rayon à cet estimateur d'erreur, ce qui permettra d'envisager des stratégies d'« enrichissement » de la solution, en ajoutant des rayons selon des directions qui permettront de réduire le plus l'erreur estimée. Ceci sera l'objectif de la présentation prévue pour le colloque.

4 Conclusion et perspectives

Ce travail constitue une première étape dans la construction d'une stratégie d'adaptativité pour la TVRC. Son originalité principale réside dans le fait qu'on ne considère pas ici, comme dans le cadre de la FEM, une adaptativité au sens d'un maillage, mais bien un raffinement en termes de directions de rayons TVRC. À terme, l'objectif sera de pouvoir garantir un niveau d'erreur en quantité d'intérêt dans le cadre d'une démarche de certification numérique, étape cruciale pour valider tout dispositif de réduction de bruit dans le domaine ferroviaire.

Références

- [1] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, Fifth edition, Butterworth Heinemann, 2000.
- [2] P. K. Banerjee. *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill College, 1994.
- [3] M. Bonnet. *Bounary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, Wiley, 1999.
- [4] R. H. Lyon, G. Maidanik. *Power flow between linearly coupled oscilattors*, Journal of the Acoustic Society of America 34, AIP Publishing, pp. 623–639, 1962.
- [5] C. Farhat, I. Harari, L. P. Franca. *The discontinuous enrichment method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 :48, Elsevier, pp. 6455–6479, 2001.
- [6] I. Babuška, S. A. Sauter. *Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave number ?*, SIAM Journal on Numerical Analysis 34 :6, 1997.
- [7] P. Ladevèze. *Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences*, Comptes rendus de l'Académie des sciences - série II 332 :12, pp. 849–856, 1996.
- [8] E. Trefftz. *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren*, Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, pp. 131–137, 1926.
- [9] H. Riou, P. Ladevèze, B. Sourcis. *The multiscale VTCR method applied to acoustics problems*, Journal of Computational Acoustics 16 :4, World Scientific, pp. 487–505, 2008.
- [10] H. Riou, P. Ladevèze, B. Sourcis, B. Faverjon, L. Kovalevsky. *An adaptative numerical strategy for the medium-frequency analysis of Helmholtz's problem*, Journal of Computational Acoustics 20 :01, World Scientific, 2012
- [11] A. Deraemaeker, I. Babuška, P. Bouillard. *Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 46 :4, Wiley, pp. 471–499, 1999.
- [12] R. Cettour-Janet. *Modélisation de la réponse vibratoire et du rayonnement acoustique de la voie ferrée et application à la conception de voies silencieuses*, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2019.
- [13] J. T. Oden, S. Prudhomme. *Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method*, Computers & Mathematics with Applications 41 :5-6, pp. 735–756, 2001.
- [14] J. T. Oden, S. Prudhomme. *Estimation of modeling error for computational mechanics*, Journal of Computational Physics 182 :2, Elsevier, pp. 496–515, 2002.
- [15] R. Becker, R. Rannacher. *A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples*, Journal of Numerical Mathematics 4, pp. 237–264, 1996.
- [16] R. Becker, R. Rannacher. *An optimal control approach to a posteriori error estimation*, Acta Numerica 10, pp. 1–102, 2001.
- [17] T. Richter, T. Wick. *Variational localizations of the dual weighted residual estimator*, Journal of Computational and Applied Mathematics 279, pp. 192–208, 2015.