

# Formulation géométrique du contact frottant entre corps rigides 3D pour la méthode non-régulière NSCD

Simon Yans, Michel Henry, Jonathan Lambrechts, Vincent Legat

*Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering, Applied Mechanics and Mathematics, UCLouvain,  
Avenue Georges Lemaître 4-6, Louvain-la-Neuve, Belgique  
{simon.yans,michel.henry,jonathan.lambrechts,vincent.legat}@uclouvain.be*

**Résumé** — Au sein d'un milieu granulaire représenté par une collection de particules, le frottement est le plus souvent représenté par une loi de Coulomb. Résoudre un contact frottant entre deux corps rigides 3D au sein d'une méthode non-régulière est un problème non-linéaire, habituellement résolu par une méthode de Newton sur un système de dimension 5. Cet article s'intéresse à une méthode de résolution exacte sur un système de dimension 2, basée sur une interprétation graphique.

**Mots clés** — méthode des éléments discrets, friction, méthode non régulière.

## 1 Introduction

La simulation numérique de milieux granulaires permet de répondre à une multitude de problèmes d'ingénierie dans des domaines variés. Le comportement macroscopique du milieu dépend de l'interaction locale intervenant entre les éléments formant le matériau. La méthode des éléments discrets (DEM)[1] est une méthode permettant de modéliser le comportement d'un tel milieu, sous réserve de certaines hypothèses simplificatrices concernant la représentation numérique d'un élément. Le plus souvent, un élément est représenté par une particule sphérique dans un espace tridimensionnel. Cette représentation s'accommode de l'isotropie résultante des propriétés de chaque élément. Bien que cette hypothèse simplificatrice soit considérée comme acceptable dans certains cas, l'étude de certains écoulements exige une représentation plus complexe de l'élément. Plusieurs méthodes existent afin de représenter des éléments à géométrie complexes. Dans le cas d'un élément elliptique, une paramétrisation de son interface [2] peut être employée. Similairement, une approche dite multi-particulaire, basée sur une intersection de sphères [3] peut être utilisée, bien que cette dernière complexifie le calcul du volume et de l'inertie de l'élément.

Le phénomène de frottement est inhérent aux écoulements granulaires et influence significativement les conditions d'écoulement du milieu. Bien que provenant de multiples phénomènes (taille, rugosité,...), il est le plus souvent approximé par une loi de Coulomb lors de simulations numériques. Si la résolution d'un contact frottant en trois dimensions est triviale pour deux particules sphériques, sa résolution est complexe pour des corps rigides multi-particulaires [4],[5].

La présente implémentation représente des corps complexes composés de particules sphériques impénétrables et indissociables. Ce choix vise à conserver les performances numériques de la méthode relatives à la détection ainsi qu'à la résolution du contact. L'introduction d'éléments de formes complexes au sein de l'écoulement permet d'introduire une anisotropie locale au contact entre deux corps et améliore au passage la description de l'écoulement.

## 2 La méthode de résolution de contact non-régulière

D'un point de vue général, la méthode NSCD est une méthode itérative visant à résoudre les contacts apparaissant au sein d'un milieu granulaire. L'appellation non régulière provient de l'hypothèse d'unilatéralité des contacts à résoudre qui implique également la condition de non-interpénétrabilité des corps en contact. La condition de Signorini garantit cette propriété en imposant une impulsion positive au contact, et nulle lorsque ce dernier est rompu :

$$\delta \geq 0, \quad P_N \geq 0, \quad \delta P_N = 0, \quad (1)$$

où  $\delta$  exprime la distance normale au point de contact d'un couple de particules. En notant  $d\delta/dt = U_N$ , elle s'exprime également en terme de vitesse :

$$U_N^+ \geq 0, \quad P_N \geq 0, \quad U_N^+ P_N = 0, \quad (2)$$

La loi constitutive du contact est une loi de Newton à coefficient de restitution nul qui permet d'annuler la vitesse relative post-contact :  $U_N^+ = 0$ . La discontinuité de vitesse résultante implique une formulation implicite de la loi de contact, ce qui l'accommode de pas de temps plus importants. La vitesse relative est une fonction supposée localement bornée. La correction de vitesse est basée sur une impulsion calculée au préalable. Considérant uniquement des collisions inélastiques, la force de réaction d'un contact à la fin du pas de temps résulte de toutes les interactions liées à ce contact, l'ensemble de ces derniers étant résolus de manière itérative à chaque pas de temps en suivant la méthode de Gauss Seidel. Les sections suivantes décrivent la description géométrique du problème pour des corps 3D et formulent le problème à résoudre

La friction est introduite par la loi de Coulomb qui impose une limite à la composante tangentielle de l'impulsion de contact en fonction de l'impulsion normale. Lors du glissement, l'impulsion de friction s'oppose à la vitesse relative tangentielle et a pour valeur l'impulsion normale multipliée par le coefficient de friction  $\mu$  :

$$\|\vec{P}_T\| \leq \mu P_N, \quad \|\vec{U}_T^+\| \neq 0 \implies \vec{P}_T = -\mu P_N \frac{\vec{U}_T^+}{\|\vec{U}_T^+\|}. \quad (3)$$

### 3 La dynamique du contact 3D

Lors d'une simulation, les interactions entre les corps rigides sont représentées par une liste de contacts. Un corps est constitué d'un ensemble de particules, formant un ensemble rigide. Les coordonnées du centre de masse du corps, inscrites dans le repère global  $\mathbf{x}^{abs}$ , sont connues. La position des particules est décrite de manière relative par rapport au centre de masse de leur corps associé. Ces positions relatives sont décrites dans le repère local du body  $\mathbf{X}^{loc}$ . Deux corps entrent en contact à travers l'interaction d'un ou de plusieurs couples de particules. Pour chacun de ces couples, un repère de contact local  $\mathbf{X}^C$  est construit (voir Figure 1), afin de décrire l'impulsion locale du contact  $\vec{P}$ .

La description d'un corps dans un espace tri-dimensionnel nécessite la connaissance de son orientation initiale afin de décrire son évolution. Lors de l'insertion d'un corps rigide, son centre de masse est calculé ainsi que sa matrice d'inertie. Les directions principales d'inertie sont stockées dans une matrice diagonale  $\mathbf{I}_0$ . Les valeurs et vecteurs propres associés à la matrice d'inertie permettent de déterminer l'orientation du corps dans le repère global. L'orientation du corps est stockée sous forme d'un quaternion unitaire  $\mathbb{Q}$  dans le repère du corps  $\mathbf{X}^{loc}$ . L'utilisation des quaternions intervient dans un contexte d'optimisation. Leur description sort du cadre de cet article et est laissée au lecteur intéressé. La position d'une particule  $p$  d'un corps rigide  $rb$  est donnée par :

$$\vec{x}_p^{abs.} = \vec{x}_{rb}^{abs.} + \vec{x}_p^{loc.}(\mathbb{Q}), \quad (4)$$

et sa matrice d'inertie exprimée dans le repère global est calculée telle que :

$$\mathbf{I}_{rb}^{abs}(\mathbb{Q}) = \mathbf{S}(\mathbb{Q})\mathbf{I}_0\mathbf{S}(\mathbb{Q}^T), \quad (5)$$

où  $\mathbf{S}(\mathbb{Q})$  est la matrice de rotation associée au quaternion du corps.

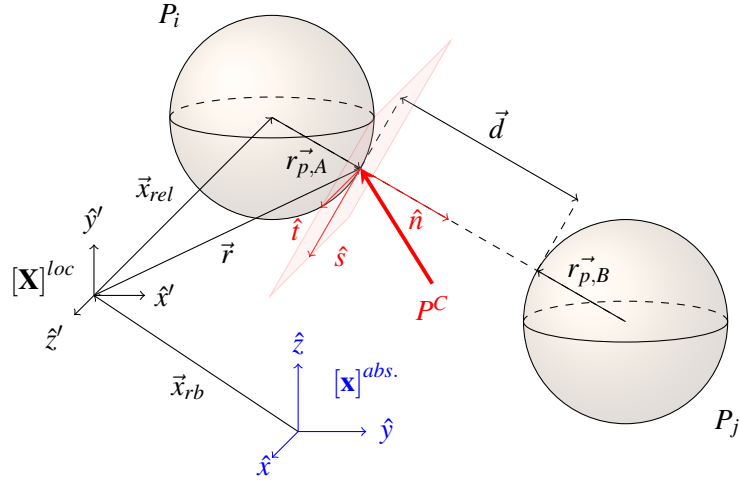


FIGURE 1 – Représentation schématique de corps tri-dimensionnels en collision. La particule  $i$  est rattachée à un corps de position absolue  $\vec{x}_{rb}$ . La base du contact est construite par les vecteurs orthonormés  $\hat{n}, \hat{t}, \hat{s}$  exprimés en coordonnées globales.

La dynamique granulaire est obtenue par la deuxième loi de Newton :

$$\frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{g} + \sum_{i \neq j}^i \vec{F}_{ij}, \quad (6)$$

dont la résolution fournit les forces de réactions de chaque contact. À cet effet, un premier changement de repère est nécessaire pour résoudre chaque contact dans son repère local avant de ramener la solution dans le repère global. La résolution permet d'obtenir les positions et vitesses des corps à la fin du pas de temps.

L'intégration de 6 s'effectue par un schéma d'Euler implicite :

$$\mathbf{M}(\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n) = \vec{p}^{n+1} \quad (7)$$

$$\vec{q}^{n+1} = \vec{q}^n + \vec{u}^{n+1} \Delta t \quad (8)$$

où  $p^{n+1}$  étant la résultante des impulsions ayant eu lieu au cours du pas de temps,  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\vec{q}$  est le vecteur  $(\dots \vec{x}_i, \vec{Q}_i, \vec{x}_j, \vec{Q}_j \dots)^T$  reprenant les positions et orientations des corps et  $\vec{u}$  est le vecteur  $(\dots \vec{u}_i, \vec{\omega}_i, \vec{u}_j, \vec{\omega}_j \dots)^T$  reprenant leurs vitesses linéaires et angulaires.

### Passage du repère global au repère local :

Les impulsions  $\vec{p}$  sont stockées dans le repère global.  $\mathbf{B}$  est la matrice de changement de base entre le repère global et le repère du contact. Les impulsions locales sont obtenues par  $\vec{P} = \mathbf{B} \vec{p}$ . La contribution des impulsions au moment angulaire du corps est donnée par  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\mathbf{B} \vec{P})$ , où  $\vec{r}$  est le vecteur reliant le centre de masse du corps à son point de contact exprimé dans le repère global. L'impulsion du contact donne lieu à une impulsion globale ainsi qu'un moment angulaire :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & t_x & s_x \\ n_y & t_y & s_y \\ n_z & t_z & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ P_t \\ P_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_s \\ P_t \\ P_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dès lors, pour un corps, la variation de vitesse locale  $\Delta \vec{U}$  induite par l'impulsion locale  $\vec{P}$  au point de

contact est obtenue par :

$$\begin{bmatrix} \Delta U_s \\ \Delta U_t \\ \Delta U_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbb{I} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_A^{-1} \\ \mathbf{I}_{rb}^{abs} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \begin{bmatrix} P_s \\ P_t \\ P_n \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Toujours pour un seul corps et notant  $\mathbf{C} = \mathbf{SRB}$ , où  $\mathbf{B}$  est la matrice de changement de base de  $[\mathbf{X}]^C$  à  $[\mathbf{x}]^{abs}$ ,  $\mathbf{R}$  l'opérateur produit vectoriel appliqué sur  $\vec{r} \in [\mathbf{X}]^{abs}$  et  $\mathbf{S}$ , la matrice de rotation associée au quaternion du corps qui exprime le changement de base du repère global  $[\mathbf{x}]^{abs}$  au repère du corps  $[\mathbf{X}]^{loc}$ , la matrice de Delassus s'écrit ;

$$\mathbf{W}_{rb} = \frac{\mathbb{I}}{m} + \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{I}_{abs}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{B} = \frac{\mathbb{I}}{m} + \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T \mathbf{S}^T \mathbf{I}_0^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{B} = \frac{\mathbb{I}}{m} + \mathbf{C}^T \mathbf{I}_0^{-1} \mathbf{C} \quad (11)$$

Comme la méthode NSCD s'intéresse à la variation de vitesse *relative* entre les deux corps, l'opérateur de Delassus associée au contact entre deux corps  $i$  et  $j$  est donnée par :

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_i + \mathbf{W}_j = \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \mathbb{I} + \mathbf{C}_i^T \mathbf{I}_{0,i}^{-1} \mathbf{C}_i + \mathbf{C}_j^T \mathbf{I}_{0,j}^{-1} \mathbf{C}_j \quad (12)$$

Par un changement de repère approprié, on obtient que la dynamique du contact entre deux corps en collision exprimée dans le repère local du contact est donnée par :

$$\mathbf{W} \vec{P} = \Delta \vec{U} \quad (13)$$

## 4 Contact frottant en 3D

La procédure de résolution d'un contact frottant tri-dimensionnel diffère en fonction du régime. Plus particulièrement, si celui-ci est glissant, le problème est non linéaire et l'unicité de la solution n'est pas garantie. Une première résolution de l'équation de la dynamique décrite précédemment permet d'extraire une première impulsion  $\vec{P}_{test}$  en supposant que les composantes de vitesse post-impact sont nulles  $\vec{U}^+ = 0$  (pas de glissement).

$$\vec{P}_{test} = \mathbf{W}^{-1} \vec{U}^- \quad (14)$$

solution acceptable sous réserve de la condition suivante :

$$P_{test,t}^2 + P_{test,s}^2 \leq \mu^2 P_{test,n}^2,$$

vérifiant que la solution du problème frottant se situe dans le cône de friction (pas de glissement). Si ce critère n'est pas respecté, la solution n'est plus unique, et d'autres équations sont nécessaires afin de résoudre ce problème non-linéaire : Il faut tout d'abord restreindre la norme des impulsions tangentielles par rapport à l'impulsion normale, de sorte à re-projeter la solution sur le cône de friction.

$$P_t^2 + P_s^2 \leq \mu^2 P_n^2 \quad (15)$$

Une condition supplémentaire est introduite afin de garantir l'alignement des composantes tangentielles de la vitesse  $(U_t^+, U_s^-)$  post impact avec les composantes tangentielles de l'impulsion  $(P_s, P_t)$  :

$$P_t U_s^+ - P_s U_t^+ = 0 \quad (16)$$

$U_N^+$  étant connu *a priori* (collision inélastique) ; le problème à résoudre devient : trouver  $\vec{P} = (P_n, P_t, P_s)$  et  $(U_t^+, U_s^+)$ , tels que :

$$\begin{cases} w_{nn} P_n + w_{nt} P_t + w_{ns} P_s + U_n^+ & - U_n^- = 0, & \text{dynamique} \\ w_{nt} P_n + w_{tt} P_t + w_{ts} P_s + U_t^+ & - U_t^- = 0, & \text{dynamique} \\ w_{ns} P_n + w_{ts} P_t + w_{ss} P_s + U_s^+ & - U_s^- = 0, & \text{dynamique} \\ -\mu^2 P_n^2 + P_t^2 + P_s^2 & = 0, & \text{Coulomb} \\ - P_s U_t^+ + P_t U_s^+ & = 0, & \text{direction} \end{cases}$$

Dans le cas de corps asymétriques, l'opérateur Delassus est plein, rendant la résolution du problème coûteuse. Plusieurs techniques de résolution existent dans la littérature. Une première approche consiste à diagonaliser l'opérateur Delassus  $\mathbf{W} = \gamma \mathbf{I}$ , où  $\gamma = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{W})$  [5] [6], pour laquelle la résolution du contact n'est pas exacte, mais la convergence sur le réseau est garantie. Une seconde approche consiste à résoudre exactement le contact frottant par la méthode de Newton-Raphson :

$$\text{Trouver } \vec{x} = [P_n, P_t, P_s, U_t^+, U_s^+]^T \text{ tel que son résidu } f(\vec{x}) = \vec{0}$$

avec des itérés successifs de la forme :

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \mathbf{J}^{-1}(\vec{x}_k) f(\vec{x}_k) \text{ où } \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

où quelques itérations sur le système  $5 \times 5$  permettent de converger sur le contact.

### Réduction du problème et interprétation graphique

En tirant profit de la linéarité des trois premières équations de la dynamique, on peut alors décroître la taille du problème considéré tout en gardant inchangée l'opérateur Delassus :

$$\text{Trouver } \vec{x} = [P_t, P_s]^T = [x, y]^T \text{ tel que son résidu } f(\vec{x}) = \vec{0}.$$

De ces équations on extrait :

$$\begin{cases} P_N = -w_{nn}^{-1} [(U_N^+ - U_N^-) + w_{nt}x + w_{ns}y] & (17a) \\ U_T^+ = U_T^+(P_t, P_s) & (17b) \\ U_S^+ = U_S^+(P_t, P_s) & (17c) \end{cases}$$

La ré-injection des expressions 17b et 17c dans la condition de Coulomb 15 et la ré-injection de 17a dans la condition d'alignement 16 donne respectivement :

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 & (18a) \\ \gamma[x^2 - y^2] + [\beta_S - \alpha_T]xy - \alpha x + \beta y = 0 & (18b) \end{cases}$$

Ces deux expressions permettent de réduire le problème de contact frottant avec glissement sous la forme de la recherche d'intersections de deux coniques.

$$\begin{cases} F_0 \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ F_1 \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0 \end{cases} \quad (19)$$

En général, la condition de frottement est elliptique, tandis que celle de l'alignement est hyperbolique. À titre d'exemple, le contact frottant présenté à la figure 2 entre deux corps rigides présentés ci-dessous possède une interprétation graphique illustrée à la figure 3.

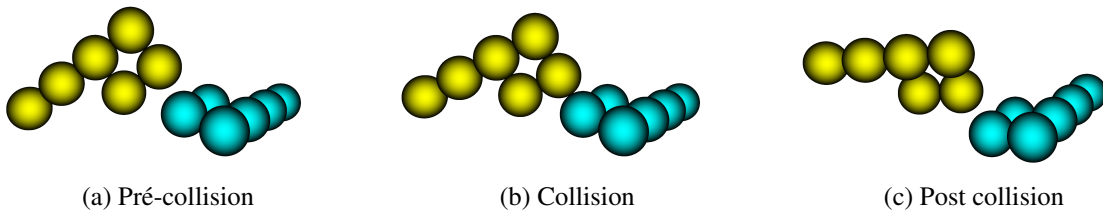


FIGURE 2 – Contact frottant ( $\mu = 0.5$ ) entre du corps rigides

Le vecteur  $\vec{P}_{test}$  est solution de la condition d'alignement 16. Par conséquent, elle est positionnée sur l'hyperbole. Un bon itéré de départ  $\vec{x}_0 = [P_{t,0}, P_{s,0}]^T$  est fourni par l'intersection formée par l'ellipse et la droite reliant  $\vec{P}_{test}$  au centre de l'ellipse. La solution exacte du contact frottant non-linéaire 19 est obtenue par une méthode de Newton-Raphson, cette fois pour un système de deux inconnues. En pratique, quelques itérations suffisent pour atteindre le critère de convergence.

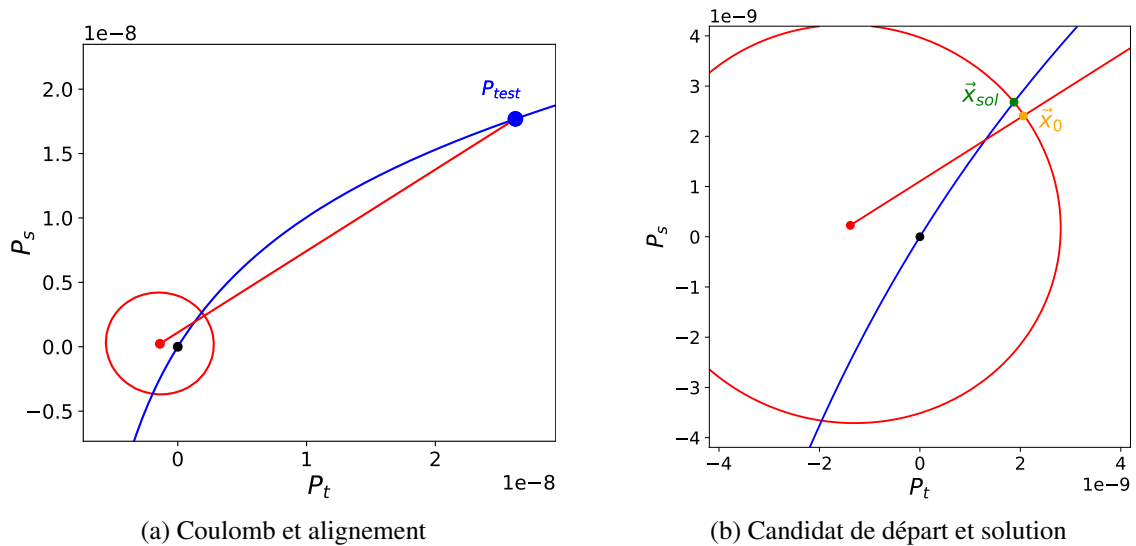


FIGURE 3 – Représentation graphique du problème de contact frottant

La figure 4 montre l'application de la présente méthode pour un ensemble de corps rigides formés de six particules sphériques, disposés dans une boîte tournant autour de l'axe  $(1, 1, 1)$ . À chaque corps est assigné une vitesse de translation et de rotation aléatoire, ainsi qu'une orientation initiale aléatoire. Le coefficient de friction est identique pour les interactions corps-corps et corps-frontière, ces dernières étant modélisées comme des corps de masse infinie.

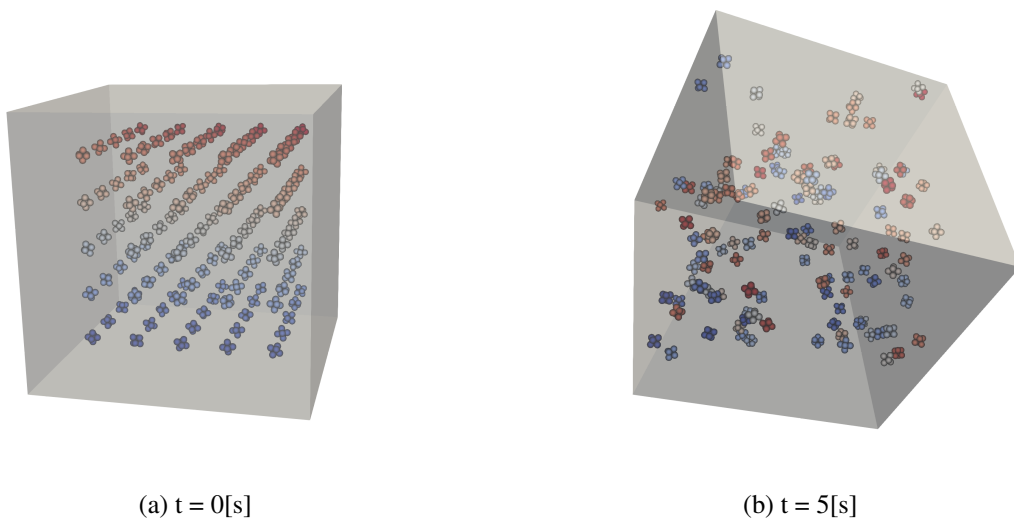


FIGURE 4 – Simulation multicorps dans un domaine mobile.

## Références

- [1] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, March 1979. Publisher : ICE Publishing.
- [2] Huaqing Ma and Yongzhi Zhao. Modelling of the flow of ellipsoidal particles in a horizontal rotating drum based on DEM simulation. *Chemical Engineering Science*, 172 :636–651, November 2017.
- [3] Darius Markauskas and Rimantas Kačianauskas. Investigation of rice grain flow by multi-sphere particle model with rolling resistance. *Granular Matter*, 13(2) :143–148, April 2011.
- [4] Alain Curnier and Pierre Alart. Generalized Newton method for contact problems with friction. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 7, January 1988.
- [5] Gilles Saussine, Catherine Cholet, Frédéric Dubois, and Claude Bohatier. Modélisation du comportement du ballast par une méthode d'éléments discrets. *Revue Européenne des Éléments*, 13, October 2004.
- [6] Jean Jacques Moreau. Modélisation et simulation de matériaux granulaires. June 2003.