

# Calcul de structures hétérogènes avec gradients de microstructure par une approche d'homogénéisation avec re-localisation régularisée

A. KETATA<sup>1,2</sup>, J. YVONNET<sup>2</sup>, F. DETREZ<sup>2</sup>,  
N. FELD<sup>1</sup>, A. PARRET-FREAUD<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Safran Tech, France, {ali.ketata,nicolas.feld,augustin.parret-freaud}@safrangroup.com

<sup>2</sup> MSME, Université Gustave Eiffel, France, {julien.yvonnet,fabrice.detrez}@univ-Eiffel.fr

**Résumé** — Une méthode est proposée pour approximer les champs locaux dans des structures hétérogènes avec gradients de microstructures, dans un cadre d'échelles non séparées. La structure est décomposée en sous-domaines non périodiques. Une homogénéisation classique est réalisée pour obtenir un tenseur élastique homogénéisé et un tenseur de localisation dans chaque sous-domaine. Le problème est résolu sur un maillage grossier, en utilisant les propriétés homogénéisées par sous-domaines, et une relocalisation par sous-domaine avec une régularisation du champ de déformations.

**Mots clés** — homogénéisation, multi-échelle, gradients de propriétés, non séparation d'échelles.

## 1 Introduction

L'ambition d'une aviation décarbonnée passe notamment par l'amélioration de l'efficacité des futurs avions. L'un des principaux leviers à cet effet est l'allègement des structures par l'introduction de matériaux à hautes performances spécifiques. Parmi les principaux candidats, on compte les composites à matrice organique, stratifiés ou tissés 3D, déjà responsables d'importants gains de masse sur le moteur LEAP et dont le rôle est voué à croître dans les parties froides; les composites à matrice céramique, déjà présents sur moteurs M88 mais susceptibles de trouver des applications dans les parties chaudes de réacteurs civils. Dans tous les cas, il s'agit de matériaux hétérogènes dont la mésostructure, c'est-à-dire l'anatomie matérielle, est conçue en même temps que la macrostructure, c'est-à-dire la topologie de la pièce, en fonction des caractéristiques mécaniques requises. Dès lors, les pièces ainsi obtenues présentent généralement des gradients de mésostructure, volontaires ou subis, notamment du fait du procédé de mise en œuvre. Leur prise en compte explicite dans les calculs mécaniques permettrait de réaliser des gains de masse supplémentaires ainsi que d'améliorer la robustesse de nouvelles conceptions, en amont de toute validation expérimentale.

Une façon de modéliser l'influence de la mésostructure sur le calcul de structures passe par l'utilisation de méthodes multi-échelles adaptées aux cas sans séparation d'échelles ni périodicité. Ces contraintes se heurtent cependant aux principes fondateurs de la plupart des théories d'analyse multi-échelles. Des tentatives ont toutefois été réalisées pour pousser l'homogénéisation multi-échelle dans ses retranchements, en réalisant des développements asymptotiques d'ordre élevé [1] ou en améliorant la relocalisation des champs [2]. Ces extensions permettent une nette amélioration des résultats, mais pas de s'affranchir formellement de l'hypothèse de séparation d'échelles. D'autres approches, généralement qualifiées de méthodes éléments finis multi-échelles, ont également tenté d'introduire une relation entre deux maillages éléments finis à différentes échelles [3] [4], mais toujours en supposant ou en se limitant en pratique à une séparation d'échelles très stricte. Une autre approche bien connue pour les problèmes sans séparation d'échelles est l'homogénéisation du second ordre initialement introduite dans [1] [5] [6]. L'idée principale de cette approche est d'imposer le tenseur de déformation macroscopique et son gradient sur un élément de volume représentatif (RVE). Le comportement effectif de la structure est déterminé à l'aide du lemme de Hill Mandel [7] [8]. Contrairement à l'approche d'homogénéisation linéaire du premier ordre, la taille du RVE a un effet sur la détermination du comportement macroscopique.

## 2 Approche proposée

Nous proposons une méthode simplifiée de calcul pour estimer les champs locaux dans des structures hétérogènes en l'absence de séparation d'échelle. Les idées principales sont : (i) une estimation de propriétés homogénéisées pour différents sous-domaines, possiblement non périodiques ; (ii) la résolution du problème de structure sur un maillage grossier, évitant la résolution sur le maillage fin complet de la structure, et utilisant les propriétés homogénéisées par sous-domaines ; (iii) une re-localisation différenciée par sous-domaines, et améliorée en utilisant une représentation régularisée du champ de déformations macroscopiques. Une représentation schématique des différentes étapes de la méthode est proposée dans la figure 1.

### 2.1 Résolution des problèmes locaux

Le but de cette première étape est de déterminer un tenseur l'élasticité homogène propre à chaque sous-domaine. L'ensemble de la structure  $\Omega$  est divisé en sous-domaine  $\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N^{sd}$  avec  $N^{sd}$  est le nombre de sous-domaine tel que  $\cup_\alpha \Omega^\alpha = \Omega$  et  $\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ . On construit un maillage à l'échelle mésoscopique pour chaque sous-domaine afin de calculer le tenseur d'élasticité homogène qui est obtenu par superposition linéaire des solutions élémentaires du problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbb{C} : \varepsilon(x)) = f & \forall x \in \Omega^\alpha \\ u = u^d & \forall x \in \delta\Omega^\alpha \end{cases} \quad (1)$$

Les conditions de Dirichlet sont définies de la manière suivante :

$$u_i^d(x) = \bar{\varepsilon}_{ij} \cdot x_j \quad \text{sur } \delta\Omega^\alpha \quad (2)$$

Avec  $\bar{\varepsilon}$  représente la déformation macroscopique. Le tenseur d'élasticité homogène s'écrit :

$$\bar{\mathbb{C}}(x) = \frac{1}{\mathcal{A}} \sum_i \mathbb{C}(x_i) B_e(x_i) \{U^e\} J_i w_i \quad (3)$$

Où  $\mathcal{A}$  est l'aire du sous-domaine ;  $B_e$  représente la dérivée des fonctions de formes,  $\{U^e\}$  désigne l'ensemble des solutions élémentaires en déplacement du problème 1,  $w$  est le poids de Gauss et  $J$  son jacobien. Comme le problème à résoudre sur  $\Omega^\alpha$  est linéaire, le champ de déformation est exprimé sous forme d'une combinaison linéaire des solutions (ou modes) du problème 1.

$$[\varepsilon(x)] = A^\alpha(x) : \bar{\varepsilon} \quad (4)$$

Où  $A^\alpha(x)$  représente le tenseur de re-localisation dont chaque colonne est la solution en déformation du problème élémentaire 1.

### 2.2 Résolution du problème global

Dans cette étape on effectue la résolution du problème sur un maillage grossier de la structure entière. Prenons la structure définie dans un domaine  $\Omega$  dont la frontière est notée  $\delta\Omega$ , composée de deux parties disjointes nommée  $\delta\Omega_u$  et  $\delta\Omega_F$ , sur lesquelles on applique un champ de déplacement  $U^*$  et des efforts  $F^*$ . Le problème global peut-être exprimé par :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\sigma}(x) + f(x) = 0 & \forall x \in \Omega \\ \bar{\sigma}(x) = \bar{\mathbb{C}}(x) : \bar{\varepsilon}(x) & \forall x \in \Omega \\ \bar{\sigma}(x) \cdot n(x) = F^*(x) & \forall x \in \delta\Omega_F \\ \bar{U} = U^* & \forall x \in \delta\Omega_u \end{cases} \quad (5)$$

Avec  $f(x)$  est la force volumique appliquée sur la structure et  $n(x)$  est un vecteur unitaire normal à  $\delta\Omega_F$ . Une discrétisation classique par éléments finis sur le maillage grossier conduit à un système d'équations linéaires sous la forme :

$$\bar{K}\bar{U} = \bar{f} \quad (6)$$

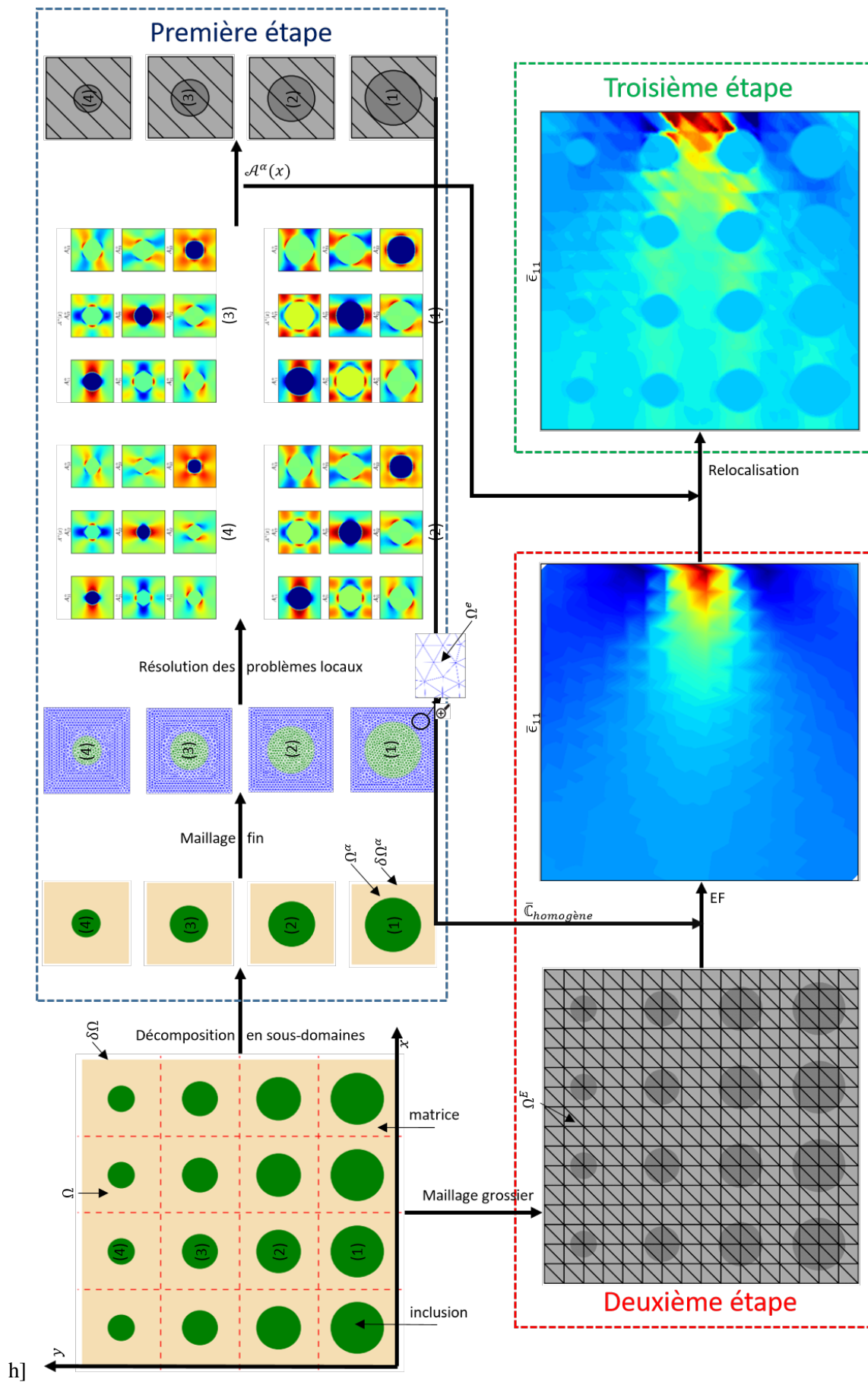


FIGURE 1 – Description de la méthode

### 2.3 Relocalisation

Après avoir résolu le système linéaire précédent, la déformation relocalisée à l'échelle mésoscopique est donnée par l'équation suivante :

$$[\varepsilon(x)] = A^\alpha(x) : \tilde{\varepsilon} \quad (7)$$

Avec  $\tilde{\varepsilon}$  est la forme régularisée de la déformation macroscopique :

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{\sum_{k \in \Omega_i} \bar{\varepsilon}_k w_k(x) J_k}{\sum_{k \in \Omega_i} w_k(x) J_k}, i = 1, \dots, N^E \quad (8)$$

### 3 Exemple numérique

On considère une structure hétérogène possédant un gradient de microstructure et 16 inclusions, comme décrite dans la figure 1. Les centres des inclusions circulaires sont disposés périodiquement dans le domaine carré, mais les diamètres varient dans la direction  $y$ , induisant une non périodicité et un gradient de microstructure. Les 16 sous-domaines sont décrits également dans la figure 1, et ne sont pas tous identiques. La taille de la structure  $L$  est égale à 360 mm. Le diamètre de l'inclusion dépend de la position  $y$  ( $D_1 = 60$  mm,  $D_2 = 50$  mm,  $D_3 = 40$  mm,  $D_4 = 30$  mm). Les inclusions occupent les centres des sous-domaines. La matrice est considérée comme un matériau élastique isotrope dont le module de Young  $E_{mat}$  est égal à 1 Mpa et le coefficient de Poisson  $\nu_{mat}$  est égal à 0.25. Les inclusions possèdent le même coefficient de poisson que la matrice et leur module de Young vaut  $10^6$  Mpa. La structure est soumise à des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$U^* \begin{cases} U_x = 0, & x = 0 \\ U_y = 0, & x = 0 \text{ et } y = 0 \\ U_x = 10 e^{-0.5(\frac{y-180}{30})^2}, & x = 360 \end{cases} \quad (9)$$

Une solution de référence est obtenue par simulation numérique directe par la méthode des éléments finis avec un maillage triangulaire composé de 32656 éléments et 33138 degrés de liberté. Pour analyser la convergence de la méthode, on fait varier le nombre des éléments du maillage grossier (macro). Le tableau 1 fournit le nombre de degrés de liberté et d'éléments macro utilisés pour le maillage grossier. Des éléments linéaires sont utilisés.

TABLE 1 – Nombre de degrés de liberté et d'éléments pour le maillage macro

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4	Maillage 5
Nombre d'éléments	8	32	128	512	2048
Nombre de degrés de liberté	18	50	162	578	2178

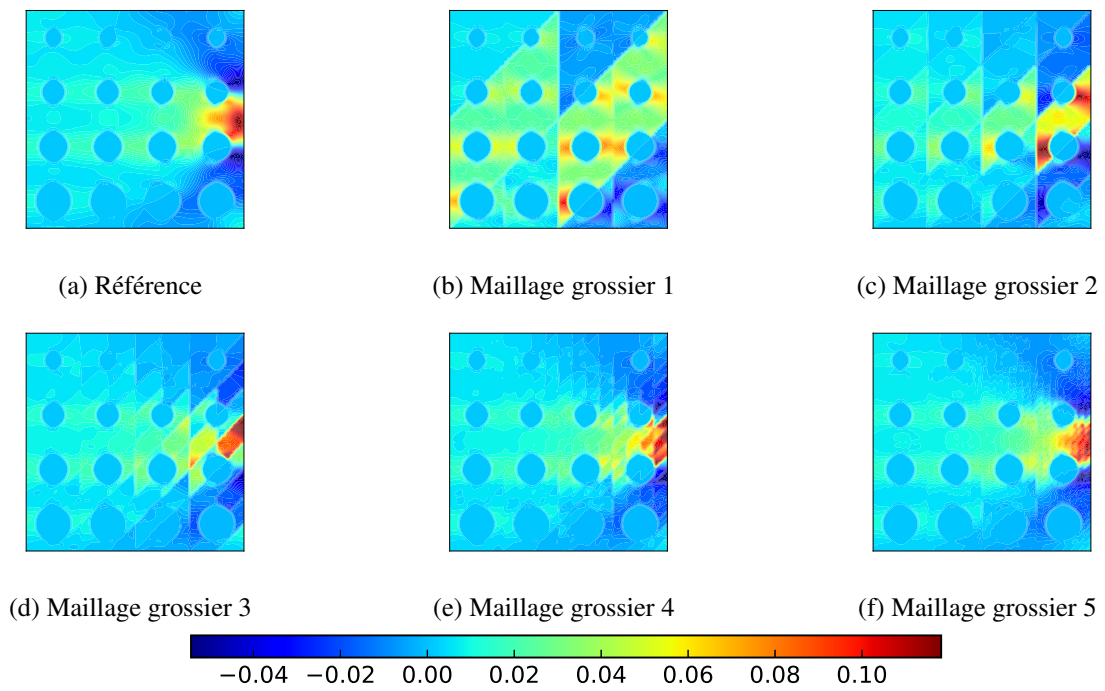


FIGURE 2 – La déformation  $\varepsilon_{11}$  de référence et relocalisée pour différents maillage macro

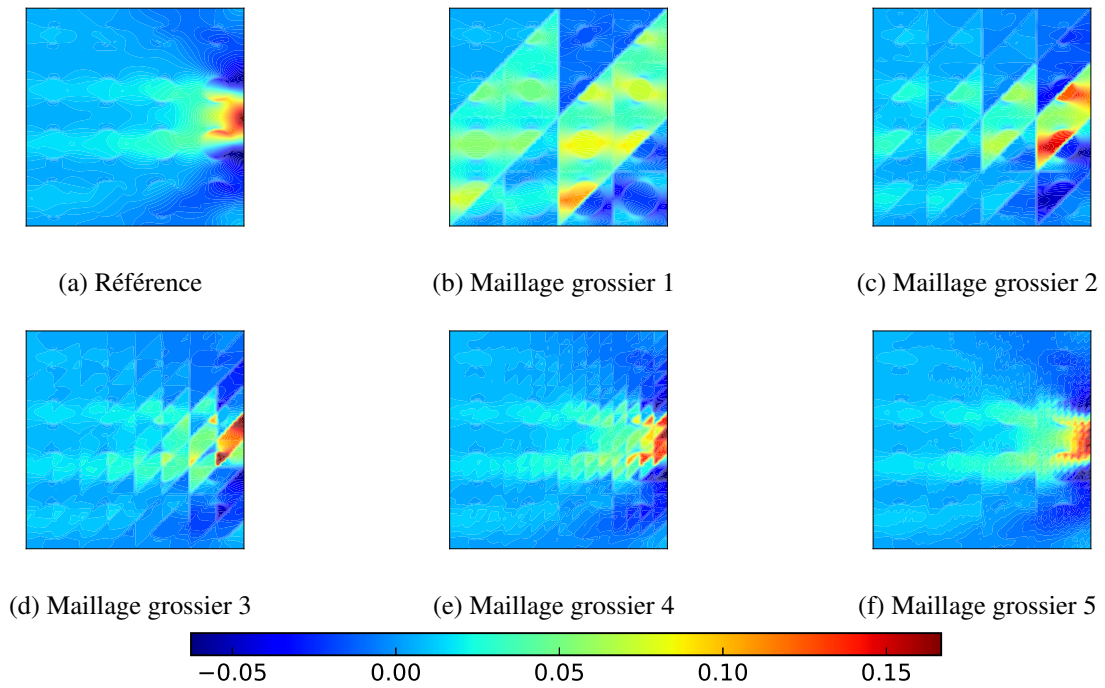


FIGURE 3 – La contrainte  $\sigma_{11}$  de référence et relocalisée pour différents maillage macro

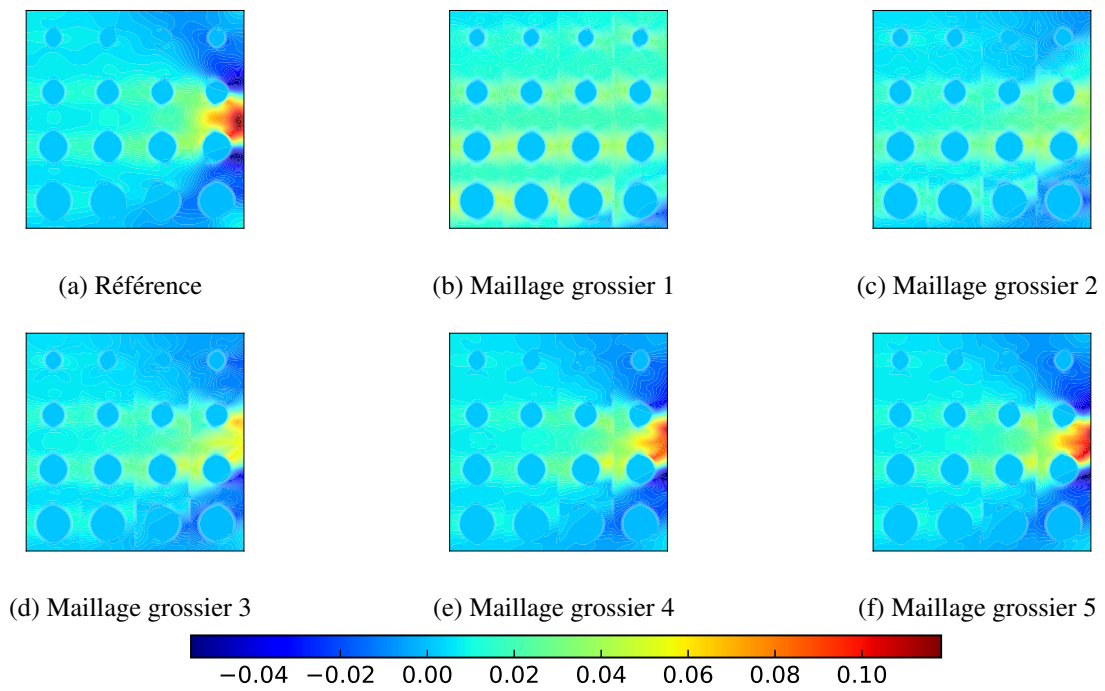


FIGURE 4 – La déformation  $\varepsilon_{11}$  régularisée suivie par une relocalisation

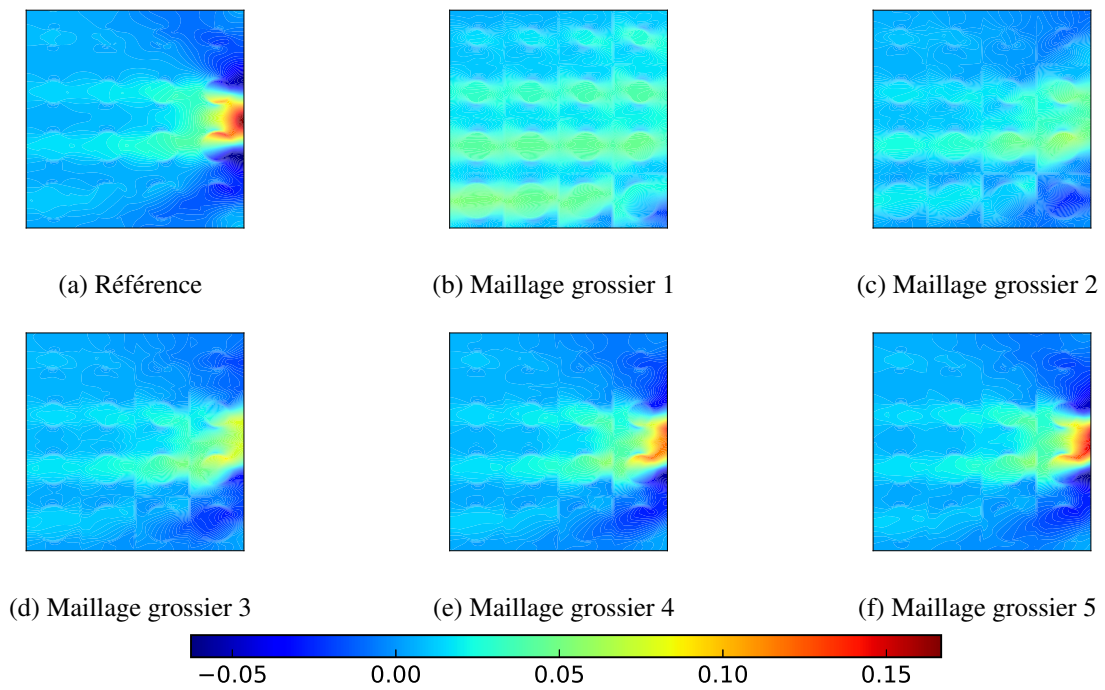


FIGURE 5 – La contrainte  $\sigma_{11}$  régularisée suivie par une relocalisation

Les résultats sont fournis dans les figures 2, 3, 4 et 5 où les champs de déformations et de contraintes locaux obtenus par la méthode après re-localisation sont comparés avec la solution de référence par calcul direct. Dans les figures 2 et 3, la régularisation des déformations obtenues par la résolution du problème macro (sur le maillage grossier) n'est pas appliquée. On peut voir que malgré une convergence vis-à-vis du maillage macro, la qualité de la solution re-localisée est pauvre. Au contraire, dans les figures 4 et 5, on peut observer que l'application de la régularisation des déformations macro avant re-localisation améliore nettement la qualité de la solution re-localisée.

## 4 Conclusion

Nous avons proposé une méthode simple basée sur l'homogénéisation numérique pour estimer les champs locaux dans des structures hétérogènes, non périodiques, et dans un cas d'échelles non séparées. La technique ne nécessite que des calculs préalables sur des sous-domaines préalables, et un calcul sur un maillage grossier de toute la structure, permettant des gains significatifs par rapport à un calcul direct de la structure hétérogène. Des résultats prometteurs ont été obtenus pour un exemple de structure linéaire possédant un gradient de microstructure.

## Références

- [1] V. Kouznetsova, M. G. D. Geers et W. A. M. Brekelmans, *Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme*, International Journal for the Numerical Methods in Engineering, vol. 54, pp. 1235-1260, 2002.
- [2] S. Kruch, *Homogenized and relocalized mechanical fields*, Journal of Strain Analysis for Engineering Design, vol. 42, n 14, pp. 215-226, 2007.
- [3] T. Y. Hou et X.-H. Wu, *A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media*, Journal of Computational Physics, vol. 134, n 11, pp. 169-189, 1997.
- [4] E. Weinan, B. Engquist, L. Xiantao, R. Weiqing et E. Vanden-Eijnden, *Heterogeneous multiscale methods : A review*, Communications in Computational Physics, vol. 2, n 13, pp. 367-450, 2007.
- [5] Kouznetsova, V., Geers, M., and Brekelmans, W, *Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003.
- [6] Kouznetsova, V., Geers, M., and Brekelmans, W, *Multi-scale second order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193 :5525-5550, 2004a.
- [7] Suquet, P, *Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity*, Plasticity today, pages 279-309, 1985a.
- [8] Hill, R, *Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11(5) :357-372, 1963.