

# Simulation massivement parallèle et raffinement adaptatif de maillage pour les problèmes de mécanique du contact 3D

A. Epalle<sup>1,2</sup>, I. Ramière<sup>1</sup>, G. Latu<sup>1</sup>, F. Lebon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CEA, DES, IRESNE, DEC, SESC ; Cadarache, F-13108 Saint-Paul-Lez-Durance, {alexandre.epalle,isabelle.ramiere,guillaume.latu}@cea.fr

<sup>2</sup> Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA ; F-13453 Marseille cedex 13, {epalle,lebon}@lma.cnrs-mrs.fr

**Résumé** — La mise en place d'une stratégie numérique de raffinement adaptatif de maillage pour la résolution de problèmes de mécanique du contact adaptée à des calculateurs parallèles est primordiale pour envisager des simulations multiphysiques complexes en 3D qui dépassent les performances actuelles. Cette contribution présente un algorithme scalable, générique, robuste et efficace, permettant de répondre à cet enjeu.

**Mots clés** — Mécanique du contact, Raffinement de maillage adaptatif, Calcul Haute Performance, Élasticité.

## 1 Contexte et objectifs

Les problèmes de mécanique du contact sont connus pour être localement fortement non-linéaires et non-réguliers. Ainsi, leur simulation numérique précise et rapide reste encore un défi. Leur résolution doit combiner techniques de discrétisation, méthodes et bibliothèques numériques efficaces. Pour des raisons évidentes de coût en matière de temps de calcul et d'espace mémoire, un maillage optimal est souvent recherché pour résoudre ce type de problèmes. Des solutions numériques efficaces à ces problèmes reposent sur des méthodes de raffinement adaptatif de maillage (AMR en anglais). Ces techniques permettent d'ajuster localement le maillage en fonction de la précision souhaitée. Cependant, pour des problèmes fortement singuliers tels que ceux issus de la mécanique du contact, la discrétisation peut devenir très fine localement et le nombre d'inconnues prohibitif selon la précision prescrite. Il est donc également souhaitable d'utiliser des méthodes de calcul haute performance (HPC en anglais) pour accélérer leur traitement [1]. Néanmoins, combiner la parallélisation de méthodes AMR avec la mécanique du contact reste un défi scientifique, les développements actuels se concentrant soit sur de nouvelles méthodes adaptatives non parallélisées de raffinement de maillage, soit sur des méthodes de parallélisation pour des maillages uniformément raffinés.

L'objectif de ce travail est d'introduire une stratégie HPC pour résoudre les problèmes de contact 3D avec AMR sur des éléments hexaédriques. Le contact est traité par un appariement nœud-à-nœud et une résolution par pénalisation, afin d'avoir à ne gérer que des variables primales. En ce qui concerne la stratégie AMR, une solution de raffinement h-adaptative non conforme est considérée. Cette méthode s'est déjà avérée très scalable dans d'autres contextes applicatifs [1, 2]. Son application sur des problèmes à bords courbes, souvent rencontrés en mécanique du contact, reste néanmoins un challenge. Des éléments super-paramétriques sont donc utilisés afin de préserver la forme des géométries raffinées hiérarchiquement, même pour des solutions éléments finis du premier ordre. Une approche estimate-mark-refine est appliquée afin de réaliser le processus AMR. Les éléments à raffiner sont marqués en fonction de critères d'optimalité basés sur un estimateur d'erreur a posteriori de type Zienkiewicz-Zhu (ZZ) [3]. Le processus s'arrête automatiquement via des critères adaptés. Cette stratégie combinée a récemment prouvé son efficacité [4].

Nous introduisons dans cette contribution un algorithme AMR parallèle et générique pour la résolution efficace de problèmes de mécanique du contact. L'algorithme de contact est tout d'abord basé sur un partitionnement du maillage qui garantit que les nœuds de contact appariés se trouvent sur les mêmes processus. Ainsi, la matrice de rigidité de contact est construite localement et les échanges sont minimisés entre les unités de calcul. L'algorithme combiné AMR-contact est régi par deux boucles itératives imbriquées. La boucle externe concerne le processus AMR tandis que la boucle interne traite de la réso-

lution du contact. Le processus itératif de résolution du contact est exécuté jusqu'à ce que l'ensemble des nœuds de contact actifs (détectés par interpénétration) ne varie plus. Une fois que la boucle de contact a convergé, la stratégie AMR est appliquée localement et la décomposition du maillage est rééquilibrée avec les contraintes de contact de partitionnement discutées précédemment.

Pour la mise en œuvre de ces simulations, nous nous plaçons dans l'environnement logiciel MFEM [2], une bibliothèque open-source implémentant la méthode des éléments finis. Dans MFEM, un algorithme parallélisé pour l'AMR h-local non conforme est disponible. Cette méthode est enrichie par notre propre approche estimate-mark-refine et ses propriétés de scalabilité sont validées sur un cas d'étude de référence.

## 2 Résolution du contact

### 2.1 Problème discret

Deux solides élastiques linéaires en contact sans frottement sont considérés. Avec la technique numérique de la pénalisation, une force de réaction de contact est ajoutée au problème éléments finis pour pénaliser l'interpénétration des surfaces.

Une fois discrétisé par la méthode des éléments finis, le problème de mécanique du contact pénalisé s'écrit

$$\left(\underline{\underline{K}} + k_N \underline{\underline{K}}_C\right) \underline{U} = \underline{L}^{ext}(\underline{U}) + k_N \underline{\underline{B}}^T \hat{\underline{d}}. \quad (1)$$

Dans cet équilibre mécanique,  $\underline{\underline{K}}$  et  $\underline{\underline{K}}_C = \underline{\underline{B}}^T \hat{\underline{B}}$  sont les matrices de raideur éléments finis et de raideur de contact,  $\underline{U}$  la solution du problème discrétisé,  $\underline{L}^{ext}$  le vecteur de force de contact et  $k_N$  le coefficient de pénalisation. En outre,  $\underline{\underline{B}}$  et  $\hat{\underline{d}}$  représentent la matrice d'appariement et les jeux initiaux entre les solides restreints aux nœuds de contact actifs. Ils sont une sous-matrice de la matrice d'appariement des nœuds de contact potentiels  $\underline{B}$  et un sous-vecteur des jeux initiaux entre les solides  $\underline{d}$ .

### 2.2 Appariement nœud-à-nœud

Pour résoudre le problème de contact décrit par (1), les éléments de contact doivent être appariés ; ce qui permet dans un premier temps de construire la matrice  $\underline{B}$  et de calculer les jeux initiaux correspondants dans  $\underline{d}$ . Ensuite, déterminer les éléments en contact actif via une stratégie de détection basée sur le calcul des interpénétrations permet de construire la matrice  $\hat{\underline{B}}$  et le vecteur  $\hat{\underline{d}}$ .

Ici, l'approche d'appariement nœud-à-nœud est choisie pour sa facilité d'implémentation et ses coûts de calculs très faibles. Néanmoins, il faut s'assurer que l'hypothèse des petites perturbations (HPP) soit toujours valide avec ce type d'appariement, de manière à ce que les nœuds en contact potentiels soient en vis-à-vis. Dans ce qui suit, les maillages considérés seront toujours concordants sur la surface de contact.

### 2.3 Traitement algorithmique du problème de contact

La stratégie proposée pour résoudre le problème de contact considéré ici est régie par un processus itératif. L'appariement nœud-à-nœud, permettant donc d'établir  $\underline{B}$  et  $\underline{d}$ , est réalisé une seule fois avant d'entrer dans la boucle, tandis que l'ensemble des paires de nœuds de contact actif est mis-à-jour à la fin de chaque itération en regardant l'interpénétration des solides. Les matrice et vecteur de contact,  $\underline{\underline{K}}_C$  et  $\underline{\underline{B}}^T \hat{\underline{d}}$ , sont donc reconstruits en conséquence. Le système linéaire résultant (1) est résolu par un solveur linéaire itératif de type gradient conjugué pré-conditionné, adapté aux problèmes d'optimisation sous-contrainte utilisant la technique de pénalisation. Le critère d'arrêt, qui exige que l'ensemble des nœuds de contact actif ne varie plus, vérifie la convergence du processus itératif.

Remarque : une fois que le solveur a convergé, une routine s'assure que la condition nœud-à-nœud est toujours respectée (pas de glissement entre nœuds appariés).

### 3 Processus de raffinement adaptatif de maillage

#### 3.1 Estimation de l'erreur

L'ingrédient clé pour l'adaptation automatique du maillage est l'estimateur d'erreur. Dans cette étude, l'estimateur d'erreur a posteriori, largement utilisé, introduit par Zienkiewicz et Zhu (ZZ) a été choisi. Réputé pour sa robustesse, sa simplicité d'implémentation et sa performance (coûts de calcul réduits), il évalue sur le maillage la différence entre un champ de contraintes lissé  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  et le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^h$ , généralement discontinu, obtenu à partir de la solution éléments finis. Pour la reconstruction du champ lissé, nous considérons la technique de projection aux nœuds de discrétisation du maillage, introduite dans [3]. Ceci nous permet d'estimer une distribution d'erreur élémentaire en norme énergie. Elle s'écrit, pour l'élément  $T_i$  du maillage,

$$\xi_{T_i} = \left( \int_{T_i} \left( \underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^h \right) : \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}^h \right) dT_i \right)^{1/2} \quad (2)$$

avec  $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^*$  et  $\underline{\underline{C}}$  le tenseur d'élasticité.

L'erreur globale absolue estimée (sur  $\Omega$  le domaine d'étude) est alors écrite en sommant les contributions élémentaires

$$\xi_{\Omega} = \left( \sum_{T_i \in \Omega} \xi_{T_i}^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

#### 3.2 Critères d'optimalité de maillage

La stratégie de sélection des éléments à raffiner est généralement basée sur un usage qualitatif du champ d'erreur élémentaire estimé. Dans cette étude, nous nous concentrons sur une procédure de marquage quantitative faisant usage de deux critères d'optimalité de maillage (au choix de l'utilisateur).

- Premièrement, dans [3], Zienkiewicz et Zhu ont proposé un critère d'optimalité de maillage (noté ZZ) basé sur le principe d'équidistribution des erreurs. L'erreur élémentaire absolue globale maximum admise est alors définie par

$$\xi_{T_i}^{\max, ZZ} = e_{\Omega} \omega_{\Omega} / \sqrt{N}, \quad (4)$$

avec  $N$  le nombre d'éléments du maillage,  $e_{\Omega}$  la précision prescrite par l'utilisateur et  $\omega_{\Omega}$  l'énergie globale de déformation. Cette énergie est obtenue à partir des contributions élémentaires :

$$\omega_{\Omega} = \left( \sum_{T_i \in \Omega} \omega_{T_i}^2 \right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \omega_{T_i} = \left( \int_{T_i} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\varepsilon}}^h dT_i + \int_{T_i} \left( \underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^h \right) : \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}^h \right) dT_i \right)^{1/2} \quad \text{pour } T_i \in \Omega \quad (5)$$

l'énergie de déformation sur l'élément  $T_i$ , proche de la norme énergie d'un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^h$  calculé sur cet élément.

Il s'agit aujourd'hui du critère d'optimalité de maillage le plus répandu.

- Ensuite, dans [5], un critère d'optimalité local (noté LOC) est introduit. Il est directement basé sur l'erreur élémentaire locale admissible :

$$\xi_{T_i}^{\max, LOC} = e_{\Omega, LOC} \omega_{T_i}. \quad (6)$$

Ainsi, l'ensemble des éléments marqués déterminé par un de ces critères se définit par

$$\mathcal{M}_i^0 = \{ T_i \in \Omega / \xi_{T_i} > \xi_{T_i}^{\max} \}. \quad (7)$$

Cet ensemble est élargi aux éléments situés sur les frontières de contact dont l'élément qui lui est apparié est marqué pour raffinement. Nous parlons ici d'éléments finis appariés lorsque tous leurs nœuds situés sur les frontières de contact sont appariés entre eux. Cette extension permet que les maillages raffinés restent concordants sur la surface de contact :

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i^0 \cup \{ T_j \in \Omega / T_i \in \mathcal{M}_i^0 \text{ apparié avec } T_j \}. \quad (8)$$

Dans ce travail, les éléments sont raffinés avec un raffinement isotrope et un ratio de raffinement fixe et égal à 2. En outre, les éléments finis utilisés sont à transformation super-paramétrique dans le but de conserver la courbure de la frontière.

### 3.3 Critères d'arrêt du raffinement

Dans cette étude, le processus de raffinement est arrêté automatiquement en utilisant l'un deux critères d'arrêts suivants. Un premier critère (voir [3]) arrête le processus lorsque l'erreur relative globale est inférieure au seuil  $e_\Omega$  prescrit :

$$\xi_\Omega \leq e_\Omega \omega_\Omega. \quad (9)$$

Afin d'éviter un processus de raffinements infini, un second critère, introduit dans [5] et basé sur des considérations géométriques, est également utilisé pour arrêter le processus de raffinement lorsque la mesure de l'ensemble des éléments détectés  $\mathcal{M}_i$  par rapport à la mesure totale du domaine est inférieure à un seuil  $\delta$  défini par l'utilisateur :

$$\mu(\Omega_{\mathcal{M}_i}) \leq \delta \mu(\Omega). \quad (10)$$

### 3.4 Traitement algorithmique de la combinaison AMR-contact

Le processus de combinaison AMR-contact est régi par deux boucles itératives imbriquées et est décrit par l'algorithme 1.

---

#### Algorithme 1 Processus combiné AMR-contact

---

**Entrée:** Données du problème, nombre maximum de boucles d'itérations d'AMR  $n_{max}$

**Sortie:** Solution éléments finis  $\underline{U}$  sur maillage non conforme

Initialiser les paramètres de la boucle AMR ( $n \leftarrow 1$ ,  $stop_{AMR} \leftarrow faux$ )

**tant que**  $stop_{AMR} = faux$  and  $n \leq n_{max}$  **faire**

    Initialisation : définir l'ensemble initial des paires de nœuds en contact actif

        pour  $n = 1$  : vide, pour  $n > 1$  : à partir de la solution du contact à l'itération  $n - 1$

    Assembler les formes linéaires et bilinéaires

    Étape de restriction. Restreindre le problème sur maillage conforme et former le système linéaire

    Exécuter le processus de résolution du contact (voir Section 2.3)

    Étape de prolongation. Reconstruire la solution éléments finis pour tous les degrés de liberté

    Détecter les éléments à raffiner (estimate-mark)

    Mettre à jour  $stop_{AMR}$  avec le critère d'arrêt

**si**  $stop_{AMR} = faux$  **alors**

        Raffiner les éléments détectés (refine) : création d'un nouveau maillage non-conforme

        Rééquilibrer la décomposition du maillage (voir Section 4.2)

**fin si**

$n \leftarrow n + 1$

**fin tant que**

---

## 4 Stratégie parallèle

### 4.1 Partitionnement du maillage

Pour combiner efficacement la stratégie de résolution du contact combinée à du raffinement h-adaptatif non conforme dans un paradigme de traitement parallèle à mémoire distribuée, l'ensemble des éléments (finis) du maillage est divisé en  $K$  régions disjointes, où  $K$  est le nombre de tâches MPI. L'algorithme que nous avons développé construit un partitionnement tel que les nœuds de contact appariés se trouvent sur les mêmes processus et ce même au cours des itérations d'AMR. Cet algorithme est divisé en deux parties. La première partie consiste à partitionner de manière équilibrée les éléments localisés sur les frontières de contact sur un sous-ensemble de processus MPI. Ces éléments sont répertoriés par paires de manière à ce que les nœuds de contact appariés soient bien sur les mêmes processus. La deuxième partie consiste à distribuer, de manière équilibrée, les éléments restants sur le sous-ensemble restant de tâches MPI. La formule

$$N_{MPI,C} = \lceil cN_{E,C}N_{MPI,tot}/N_{E,tot} \rceil \quad (11)$$

définit le nombre de tâches MPI traitant les éléments de contact. Dans celle-ci,  $N_{E,C}$  représente le nombre (pair) d'éléments de contact,  $N_{E,tot}$  le nombre total d'éléments de maillage,  $N_{MPI,tot}$  le nombre total de

processus MPI,  $c > 0$  un coefficient spécifié a priori et  $\lceil \cdot \rceil$  la partie entière supérieure. Dans cette formule, en choisissant  $c > 1$ , il y aura en moyenne moins d'éléments sur les tâches MPI traitant les éléments de contact que sur le reste des processus MPI, et inversement avec  $c < 1$ . De plus,  $N_{MPI,C}$  est réévalué à chaque fois que le maillage est raffiné et par conséquent lorsque  $N_{E,C}$  et  $N_{E,tot}$  changent.

Le résultat obtenu doit être corrigé dans les cas suivants :

$$\begin{cases} N_{MPI,C} = N_{E,C}/2 & \text{if } N_{MPI,C} > N_{E,C}/2 \\ N_{MPI,C} = N_{MPI,tot} - 1 & \text{if } N_{MPI,C} \geq N_{MPI,tot}. \end{cases} \quad (12)$$

Le premier critère permet de s'assurer qu'il n'y ait pas plus de tâches MPI traitant les éléments de contact que de paires d'éléments de contact. Le second permet de conserver au minimum un processus MPI pour le traitement des éléments qui ne sont pas des éléments de contact.

Avec cette stratégie de partitionnement, les matrices de raideur de contact  $\underline{\underline{K}}_C$  et les second membres de contact  $k_N \underline{\underline{\hat{B}}}^T \underline{\underline{\hat{d}}}$  sont assemblés localement sur chaque tâche MPI, comme si chaque région était traitée comme un maillage isolé par la partie séquentielle du code. Ceci réduit fortement la quantité de communications inter-processus durant les itérations de raffinement, assurant à la fois une meilleure simplicité du code et scalabilité. En outre, les nœuds situés le long des interfaces des  $K$  régions ne sont considérés qu'une unique fois. En effet, l'étape de restriction sur maillage conforme gère commodément à la fois l'interpolation conforme et la décomposition parallèle.

## 4.2 Équilibrage de charge

Lorsque le maillage est raffiné, un nouveau partitionnement est proposé localement dans chaque région parallèle, c'est-à-dire sans se préoccuper de celui proposé dans les autres  $K-1$  régions. Après application de l'approche h-adaptative non conforme, cette région  $K$  possède  $C_K$  éléments sur les frontières de contact et  $N_K - C_K$  autres éléments. En utilisant les formule (11) et critères (12), nous savons que les  $C_K$  premiers éléments doivent être attribués aux  $N_{MPI,C}$  processus MPI traitant les éléments de contact tandis que les  $N_K - C_K$  autres éléments doivent, quant à eux, être affectés aux  $N_{MPI,tot} - N_{MPI,C}$  autres tâches MPI.

L'algorithme implémenté dans la partie séquentielle du code, sans communication entre les tâches MPI donc, permet désigner pour chaque élément la région à laquelle il va appartenir une fois le rééquilibrage effectué. De plus, l'algorithme est conçu de manière à faire en sorte que, une fois le maillage redistribué, la redistribution soit la plus égale possible entre les  $N_{MPI,C}$  processus traitant les éléments de contact d'une part et les  $N_{MPI,tot} - N_{MPI,C}$  autres tâches d'autre part (avec une variation d'éléments entre les processus négligeable devant le nombre d'éléments que possède chaque région). Par ailleurs, le partitionnement proposé par l'algorithme peut induire des régions composées d'éléments éparpillés dans le maillage. Enfin, la fonction MFEM dédiée au rééquilibrage du maillage récupère ces nouveaux partitionnements réalisés localement et redistribue le maillage.

## 5 Application au contact Hertzien

### 5.1 Comparaison avec la solution de Hertz

Pour évaluer la performance de la stratégie proposée, il est pertinent de comparer les résultats obtenus avec ceux dérivés de la théorie de Hertz dont une solution analytique est disponible dans la zone de contact [6]. Nous nous plaçons dans le cadre de cette théorie, et pour cette analyse et dans ce qui suit, les deux solides en contact sont supposés isotropes et élastiques avec le même module d'Young  $E = 210$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Le cas-test considéré est donc celui d'un contact élastique entre deux demi-disques ou demi-sphères. Le coefficient de pénalisation est choisi constant et vaut  $k_N = 10^4 E$  dans le but d'atteindre un compromis satisfaisant entre l'interpénétration des surfaces et la convergence de la simulation, même pour des éléments de petites dimensions. Des conditions aux limites de Dirichlet (de valeur  $u_D$  telle que  $u_D/R = 0,015$ ,  $R = 2$  le rayon des solides) sont imposées sur les bords non-courbes.

Pour cette étude, nous considérons les critères de détection ZZ équation (4) et d'arrêt global équation (9) pour le processus AMR et le cas 2D. La distribution de pression de contact est définie par

$$p(r) = p_0 \sqrt{a^2 - r^2} / a ; r \leq a \quad (13)$$

où  $a$  est la distance caractéristique de contact,  $r$  la distance (positive) depuis le centre de la zone de contact, notée  $O$ , et  $p_0 = p(0)$  la pression de contact maximum au centre  $O$ . Pour calibrer la solution de Hertz, la largeur de contact vaut  $a = 0,199$  et la pression de contact maximale est  $p_0 = 11,5$  GPa, en utilisant un modèle de référence fortement raffiné. Ces valeurs sont ensuite utilisées pour définir la distribution de contraintes de Hertz, qui est comparée en Figure 1 avec les contraintes de contact obtenues via la solution éléments finis  $\underline{\underline{\sigma}}_C = p = (\underline{\underline{\sigma}}^h \underline{n}) \cdot \underline{n}$ . Les résultats obtenus permettent d'observer qu'en diminuant la précision prescrite par l'utilisateur  $e_\Omega$  pour l'application de l'AMR, la solution éléments finis tend vers celle issue de la théorie de Hertz.

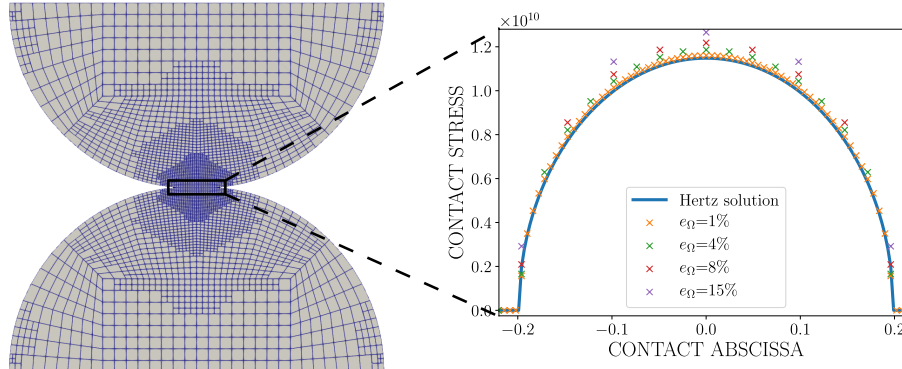


FIGURE 1 – Distribution des contraintes normales dans la zone de contact (demi-disques de Hertz)

## 5.2 Comparaison avec une solution de référence volumique

Nous considérons comme solution de référence, celle obtenue avec un maillage discrétisé très fin avec un pas de maillage valant environ  $R/2^{10}$ , soit 3,2 millions de nœuds. Afin de pouvoir évaluer l'erreur d'approximation sur le domaine de calcul, des éléments finis d'ordres 1 et 2 sont utilisés sur des maillages uniformément raffinés. La méthode AMR est appliquée avec des éléments finis linéaires. De plus, comme les solutions ne sont pas comparées localement ici, l'AMR est considéré avec les critères de détection ZZ équation (4) et d'arrêt global équation (9).

Les maillages utilisés sont des maillages quadrangulaires droits respectant la courbure globale de la géométrie. La Figure 2 représente les convergences en maillage des solutions AMR et uniformément raffinées. D'une part, il est observé que les solutions avec raffinement uniforme respectent les taux de convergence prédits par la théorie des éléments finis. En effet, comme attendu pour des maillages d'ordre élevé, approximer le domaine avec des quadrangles à bords droits résulte en des taux de convergence sous-optimaux. D'autre part, les courbes de convergence montrent que, pour les solutions avec AMR, les pentes de convergence sont identiques à celle des solutions avec raffinement uniforme à éléments finis de même ordre. Mais les erreurs sont plus faibles et le nombre de degrés de liberté est divisé par 10 entre la solution AMR et celles uniformément raffinées pour une même erreur, justifiant ainsi l'intérêt d'implémenter une stratégie AMR.

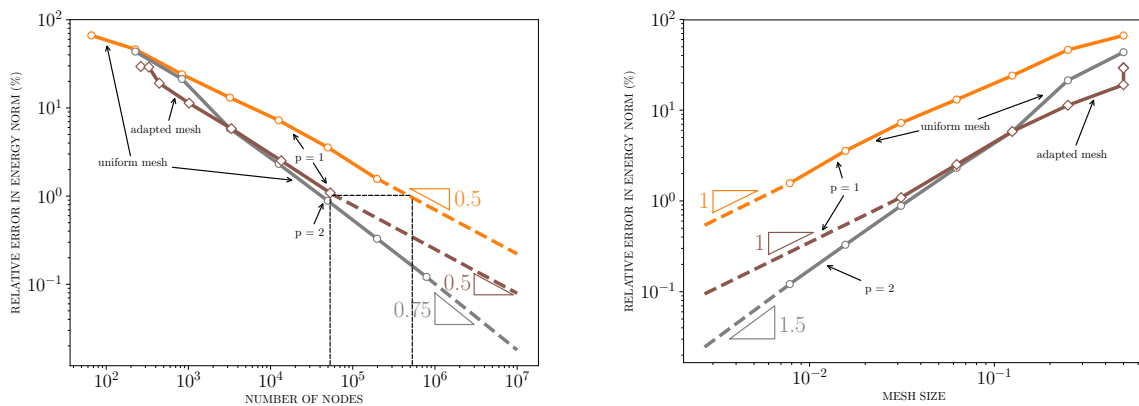


FIGURE 2 – Erreurs de discrétisation (demi-disques de Hertz) en fonction du maillage

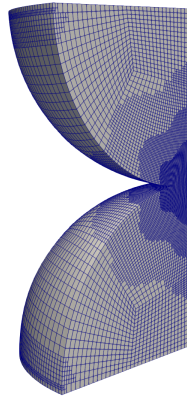
## 5.3 Scalabilité parallèle

Pour démontrer la scalabilité parallèle de notre stratégie, nous avons réalisé des études de temps de calcul en fonction du nombre de cœurs utilisés pour une simulation représentative du problème du

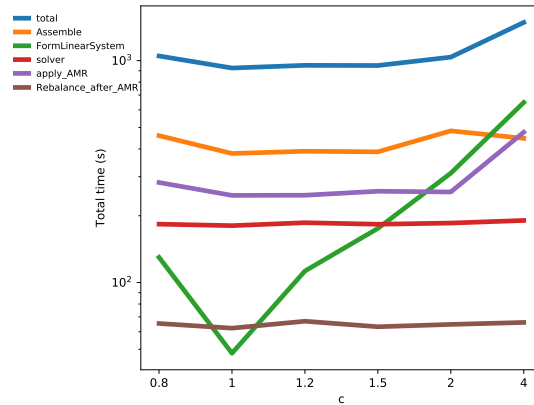
contact Hertzien 3D. Pour ce cas d'étude,  $e_\Omega$  et  $\delta$  ont été fixés de manière à ce que le maillage soit le plus volumineux possible, dans les limites des capacités en mémoire de la machine de calcul choisie.

En plus du temps total de calcul, les temps des principales fonctions du programme que sont l'assemblage de la matrice de raideur élément fini, la formation du système linéaire, la résolution du système matriciel, le raffinement des éléments (approche AMR estimate-mark-refine) ainsi que l'équilibrage de charges du maillage global après raffinement sont analysés.

Tout d'abord, de l'AMR avec les critères de détection ZZ équation (4) et d'arrêt global équation (9) est appliqué au cas-test. La tolérance  $e_\Omega$  est fixée à 2% et le maillage résultant est montré en Figure 3a. Ce maillage est obtenu après 6 étapes de raffinement de maillage et contient 2,7 millions de degrés de liberté.



(a) Maillage après 6 boucles AMR



(b) Temps de calcul pour différents choix de  $c$

FIGURE 3 – Contact Hertzien 3D ( $e_\Omega = 2\%$ )

Pour fixer le coefficient  $c$  dans la formule d'équilibrage de charges (11) considérée, des calculs sont effectués en faisant varier ce coefficient pour un nombre de tâches MPI constant. Les résultats obtenus sont présentés Figure 3b et montrent que fixer ce paramètre à 1 est un choix optimal. De plus, MFEM distribuant convenablement les calculs en fonction de la partition d'éléments spécifiée, ces résultats attestent qu'un partitionnement équilibré du maillage est primordial dans l'optimisation des performances de l'algorithme. Le nombre de tâches MPI est ici de 512, mais des calculs non présentés ici ont montré que choisir un nombre de processus MPI différent produit des résultats aboutissant à la même conclusion.

Des calculs ont été réalisés sur quatre nœuds de calcul du supercalculateur Topaze du CCRT/CEA composés de 128 cœurs et de 2 processeurs AMD Milan par nœud. Le maillage initial est conçu de manière à ce qu'il y ait toujours plus d'éléments que de tâches parallèles. La Figure 4 montre le speedup en strong scaling, le temps total et les temps d'étapes individuelles de l'algorithme. La comparaison des résultats obtenus au résultat idéal, où la parallélisation serait parfaite, permet d'observer que la scalabilité de l'algorithme obtenue est très satisfaisante, en particulier jusqu'à 256 cœurs. Par ailleurs, la fonction MFEM de formation du système linéaire présente des résultats meilleurs qu'idéalement; ce qui est certainement dû à la présence d'effets cache. D'autre part, le solveur, et en particulier le pré-conditionneur Hypr BoomerAMG utilisé, permet certes d'inverser le système matriciel en un temps plus faible qu'avec d'autres pré-conditionneurs mais présente des faiblesses en matière de scalabilité. Les communications entre les processeurs sont généralement le facteur limitant de ce type de pré-conditionneur et sont probablement la source de cette perte de performances.

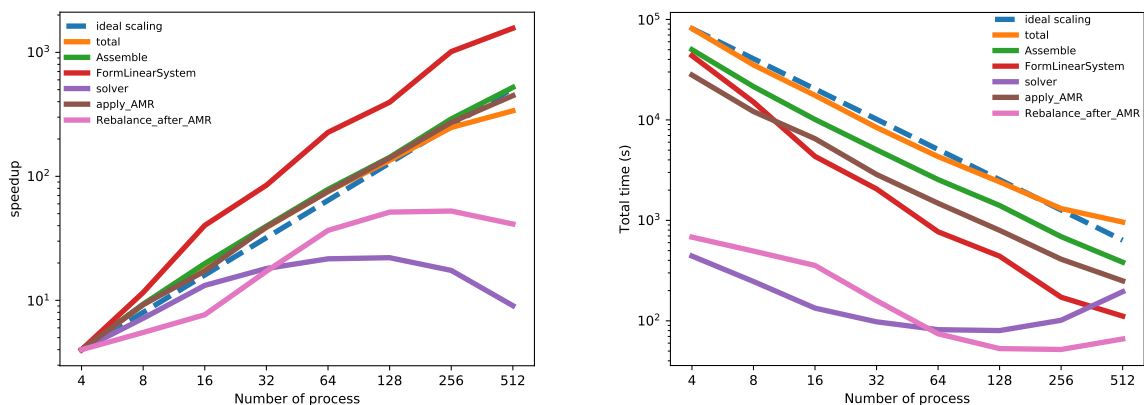
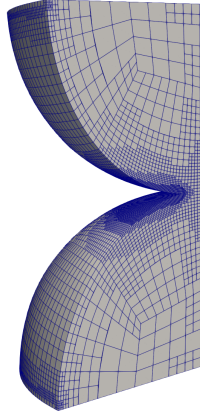
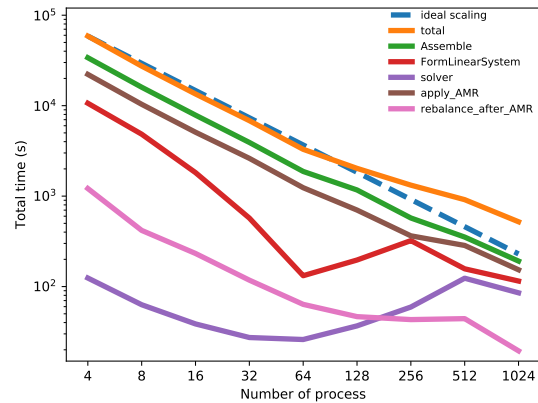


FIGURE 4 – Performance de l'algorithme et de ses principales étapes

Des analyses de scalabilité analogues ont été réalisées en utilisant les critères de détection LOC équation (6) et d'arrêt local équation (10) (avec  $e_{\Omega,LOC} = 7\%$  et  $\delta = 0,1\%$ ) pour l'application de l'AMR et sont présentées Figure 5b. Ces valeurs ont été fixées de manière à mettre en avant la spécificité de ces critères pour un même nombre d'étapes de raffinements. Ici, le maillage obtenu Figure 5a après 6 étapes de raffinement comporte 1,3 millions de degrés de liberté. Les observations et conclusions en matière de scalabilité sont les mêmes que pour le précédent choix de critères AMR. Il est observé ici que le raffinement du maillage se localise bien mieux autour de la zone de contact, en particulier aux endroits où le statut du contact change.



(a) Maillage après 6 boucles AMR



(b) Performance de l'algorithme et de ses principales étapes

FIGURE 5 – Contact Hertzien 3D ( $e_{\Omega,LOC} = 7\%$ ,  $\delta = 0,1\%$ )

## 6 Conclusion et perspectives

Dans cette contribution, nous avons présenté une stratégie scalable d'AMR non conforme conçue pour des problèmes de mécanique du contact. Elle est basée sur l'implémentation d'un appariement nœud-à-nœud pour le traitement du contact résolu par pénalisation, d'un partitionnement efficace qui réunit les éléments de contact appairés dans une même région parallèle et sur l'enrichissement de l'algorithme parallélisé pour l'AMR h-local non conforme par notre propre approche. Cette stratégie s'est avérée efficace pour des problèmes avec frontières courbes et éléments finis quadrangulaires/hexaédriques à travers un exemple d'élastostaticité 2D et 3D académique représentatif.

Par ailleurs, notre intérêt se porte à présent sur l'amélioration de la scalabilité de notre stratégie pour un plus grand nombre de cœurs pour le passage à l'exascale.

De plus, cette stratégie est en train d'être étendue à des problèmes de contact quasi-statiques élastiques non-linéaires 3D, d'intérêt pour les problèmes de mécanique du contact industriels. Les problématiques du transfert des champs et du contrôle de l'erreur de discrétisation entre les pas de temps seront donc d'intérêt.

## Références

- [1] J. Cervený, V. Dobrev, T. Kolev. *Non-conforming mesh refinement for high-order finite elements*, SIAM J. Sci. Comput. 41 (4) (2019) C367-C392, <http://dx.doi.org/10.1137/18M1193992>.
- [2] R. Anderson, J. Andrej, A. Barker, J. Bramwell, J.-S. Camier, J. Cervený, V. Dobrev, Y. Dudouit, A. Fisher, T. Kolev, W. Pazner, M. Stowell, V. Tomov, J. Dahm, D. Medina, and S. Zampini. *MFEM : a modular finite element methods library*, Computers & Mathematics with Applications, (2020), <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.06.009>.
- [3] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu. *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24(2) :337-357, 1987.
- [4] D. Koliesnikova, I. Ramière, F. Lebon. *A unified framework for the computational comparison of adaptive mesh refinement strategies for all-quadrilateral and all-hexahedral meshes : Locally adaptive multigrid methods versus h-adaptive methods*, Journal of Computational Physics, 437 :110310, 2021.
- [5] I. Ramière, H. Liu, F. Lebon. *Original geometrical stopping criteria associated to multilevel adaptive mesh refinement for problems with local singularities*, Computational Mechanics, 2019.
- [6] H. Hertz. *On the Contact of Rigid Elastic Solids and on Hardness*, Macmillan and Co., New York, 1882. <https://archive.org/details/cu31924012500306>