

Régularisation de l'adoucissement par gradient de plasticité dans le potentiel de dissipation

G. Bacquaert¹, J. Bleyer², C. Maurini³

¹ EDF Lab Paris-Saclay, goustan.bacquaert@edf.fr

² Laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech, Université Gustave Eiffel

³ Institut Jean Le Rond d'Alembert, Sorbonne Université

Résumé — On propose une régularisation de la plasticité avec adoucissement, basée sur le cadre des Matériaux Standard Généralisés à gradients de variables internes. Pour cela, le gradient de la déformation plastique cumulée est introduit dans le potentiel de dissipation, et non pas dans le potentiel d'énergie. Cette stratégie est formulée par une approche variationnelle incrémentale, puis appliquée à un modèle unidimensionnel, et enfin sur la plasticité de von Mises. Des solutions analytiques et numériques démontrent l'indépendance au maillage et le contrôle des bandes de localisation plastiques.

Mots clés — Régularisation, Adoucissement, Gradient de plasticité.

1 Introduction

Les modèles de comportement constitutifs de réponses avec adoucissement nécessitent un cadre de régularisation pour décrire la localisation des déformations de manière objective, tels que le proposent les modèles à gradients de plasticité [1, 2]. Pour introduire cette stratégie de régularisation, les équations constitutives d'un modèle-prototype unidimensionnel sont présentées. La relation contrainte-déformation, le critère de plasticité, la loi d'écoulement et les conditions de cohérence du modèle local se lisent comme suit :

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad f(\sigma; p) = |\sigma| - \rho(p) \leq 0, \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{p} \frac{\sigma}{|\sigma|}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}f = 0 \quad (1)$$

où σ représente la contrainte, ε est la déformation, ε^p désigne la déformation plastique, \dot{p} est le taux de déformation plastique cumulée et E est le module d'élasticité. L'adoucissement est alors simulé par une diminution de $\rho(p)$, jouant le rôle de limite d'élasticité actuelle, avec la déformation plastique cumulée p . Son expression est choisie être la suivante dans toute la présentation :

$$\rho(p) = \frac{\sigma_0}{(1 + bp)^2} \quad (2)$$

avec σ_0 la limite d'élasticité initiale, et b l'indice d'écrouissage négatif. Dans ce travail, on propose de régulariser le modèle-prototype exprimé par les relations éq. (1) et (2) à l'aide du cadre des Matériaux Standard Généralisés à gradients de variables internes [2]. Contrairement à une stratégie qui consiste à ajouter le gradient de la déformation plastique (cumulée) dans le potentiel d'énergie [3, 4], le plus souvent par un terme quadratique, nous étudions la possibilité d'ajouter ce gradient dans le potentiel de dissipation. Ce faisant, nous visons à simuler un meilleur contrôle des bandes de localisation plastiques, sans étalement significatif, que celles obtenues par la régularisation par le potentiel d'énergie [4, 5]. Pour cela, les paragraphes 2 et 3 se concentrent sur le cas unidimensionnel, en établissant la construction régularisée du modèle décrit éq. (1) et (2), pour faire confronter solutions analytiques et résultats numériques sur le chargement d'un barreau en traction. Dans le paragraphe 4, cette stratégie de régularisation, via le potentiel de dissipation, est appliquée à la plasticité de von Mises, pour être finalement illustrée par une simulation numérique bidimensionnelle en déformations planes.

2 Régularisation par le potentiel de dissipation

2.1 Choix des potentiels d'énergie et de dissipation

Le modèle de comportement, présenté éq. (1) et (2), est régularisé par le biais de son potentiel de dissipation noté ϕ , en y ajoutant le taux du gradient de la déformation plastique cumulée noté \dot{p}' . Celui-ci, ainsi que le potentiel d'énergie ψ , sont définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\varepsilon, \varepsilon^p) = \frac{E}{2} (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 \\ \phi(\dot{\varepsilon}^p, \dot{p}, \dot{p}'; p) = \rho(p)\dot{p} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{p} - |\dot{\varepsilon}^p|) + \pi(\dot{p}', \dot{p}) \end{array} \right. \quad (3a)$$

$$\quad (3b)$$

avec, classiquement, $I_{\mathbb{R}^+}$ la fonction indicatrice définie par $I_{\mathbb{R}^+}(x) = +\infty$ si $x < 0$ et $I_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$ sinon. π , apparaissant dans le potentiel de dissipation ϕ éq. (3b), est la contribution qui régularise le modèle unidimensionnel. Il s'agit d'une fonction convexe, semi-continue inférieure, minimale en zéro, positivement homogène de degré un qui s'annule dès que $\dot{p}' = 0$. Ces deux dernières propriétés s'écrivent plus explicitement :

$$\forall c \geq 0, \quad \pi(c\dot{p}', c\dot{p}) = c\pi(\dot{p}', \dot{p}) \quad \text{et} \quad \pi(0, \dot{p}) = 0 \quad (4)$$

En particulier, satisfaire $\pi(0, \dot{p}) = 0$ assure que les réponses homogènes du modèle défini éq. (3) coïncident avec celles du modèle défini éq. (1) et (2). Deux exemples pour π seront quant à eux précisés, respectivement dans les paragraphes 3 et 4.

2.2 Formulation variationnelle incrémentale

Pour résoudre les équations de comportement du modèle régularisé éq. (3), on met en place une approche variationnelle incrémentale. Un schéma d'Euler implicite discrétise le processus d'évolution des variables d'état : $a(\tau) = a_n + (\tau - t_n)\Delta a/\Delta t$, où $a \in \{\varepsilon, \varepsilon^p, p\}$, sur chaque intervalle $[t_n; t_{n+1}]$ avec $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. La solution du problème évolutif à l'instant t_{n+1} minimise l'énergie totale incrémentale J comme tel [2, 6, 7] :

$$(u_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, p_{n+1}) \underset{u, \varepsilon^p, p}{\text{minimise}} J(u, \varepsilon^p, p) = \int_{\Omega} \left(\psi(u', \varepsilon^p) + \phi(\varepsilon^p - \varepsilon_n^p, p - p_n, p' - p'_n; p) \right) dx - W_{ext}(u), \quad \text{tel que } u \in \text{C.A.} \quad (5)$$

où $W_{ext}(u)$ désigne le travail des efforts extérieurs donnés sur la structure Ω dans le champ de déplacement u , et C.A. désigne l'ensemble des champs Cinématiquement Admissibles. Pour résoudre ce problème de minimisation éq. (5), on recourt à la programmation conique, aux solveurs d'optimisation convexe, et à la méthode des éléments finis, pour lesquels chaque éléments trouvent détaillés dans [7].

3 Traction d'un barreau homogène

3.1 Présentation du problème

Dans ce premier exemple, on simule la réponse du modèle éq. (3) sur un barreau homogène en traction tel que représenté sur la fig. 1. L'extrémité gauche est encastrée et le déplacement est commandé par \bar{U} à l'extrémité droite. On cherche à établir une solution localisée, symétrique autour du centre du barreau situé en $x = 0$.

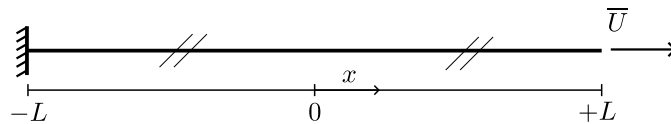


FIGURE 1 – Barreau en traction avec les conditions aux limites.

Pour cela, nous devons encore compléter la définition de la loi de comportement régularisée via la fonction π introduite éq. (3b). Celle-ci est précisée dans ce paragraphe sous l'expression suivante :

$$\pi(\dot{p}', \dot{p}) = \sigma_0 \max\{|\ell\dot{p}'| - \dot{p}, 0\} \quad (6)$$

où ℓ joue le rôle de longueur de régularisation. On notera que $\pi(0, \dot{p}) = \sigma_0 \max\{-\dot{p}, 0\} = 0$, ainsi est correctement vérifiée la propriété énoncée éq. (4). À partir de cette définition éq. (6), on est en mesure de résoudre analytiquement ce problème unidimensionnel. On donne ci-dessous les propriétés majeures des solutions analytiques établies.

3.2 Propriétés des solutions analytiques

La solution, construite à partir du modèle présenté éq. (3) et (6), exhibe les propriétés suivantes :

1. Le profil de localisation de la déformation plastique $p = \varepsilon^p$ est exponentiel décroissant depuis le centre du barreau, ayant pour longueur caractéristique ℓ . Il s'écrit :

$$\forall |x| \leq L, \quad p(x) = p_0 e^{-|x|/\ell} \quad \text{avec} \quad p_0 = p(0) \quad (7)$$

2. L'énergie dissipée $\mathcal{D}(p_0)$, pour atteindre la déformation plastique maximale p_0 située au centre du barreau, décroît avec la longueur de régularisation ℓ . $\mathcal{D}(p_0)$ est toujours plus faible que l'énergie dissipée par la réponse homogène. Elle s'écrit :

$$\mathcal{D}(p_0) = \frac{2\ell\sigma_0}{b} \ln \left(\frac{1 + bp_0}{1 + bp_0 e^{-L/\ell}} \right) \quad (8)$$

3. La solution devient discontinue en temps, marquée par un snap-back à la fin du régime élastique linéaire, en dessous d'une valeur critique du rapport des longueurs ℓ/L , fonction du rapport $b\sigma_0/E$. Cette discontinuité survient lorsque l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\tanh \left(\frac{1}{2} \frac{L}{\ell} \right) \frac{\ell}{L} \leq \frac{b\sigma_0}{E} \quad (9)$$

4. Lorsque le rapport des longueurs ℓ/L s'approche de l'infini, la solution localisée tend vers la réponse homogène, et conformément aux deux relations éq. (7) et (8) nous disposons des équivalents suivants :

$$p(x) \underset{\ell/L \rightarrow +\infty}{\sim} p_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(p_0) \underset{\ell/L \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2L\sigma_0 p_0}{1 + bp_0} \quad (10)$$

3.3 Comparaison entre solutions analytiques et résultats numériques

Les solutions analytiques, précédemment résumées par quatre de leurs propriétés majeures, sont comparées aux résultats numériques, pour qu'ils soient validés. Les paramètres matériau du modèle de comportement local sont définis par le rapport $E/\sigma_0 = 10$ et $b = 15$. On évalue les rapports des longueurs $\ell/L \in \{0.05, 0.2, 10\}$.

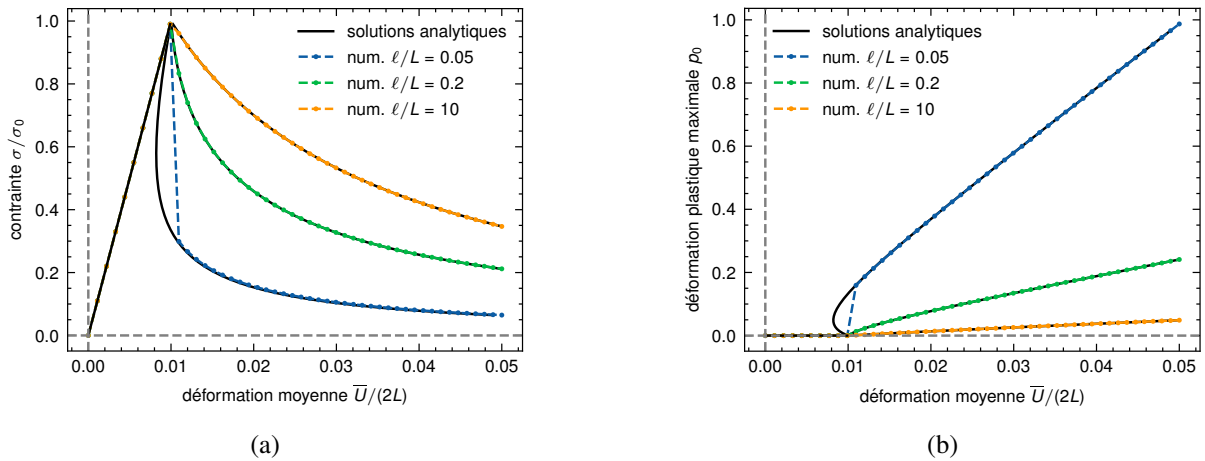


FIGURE 2 – Solutions analytiques et résultats numériques sur la réponse d'un barreau chargé en traction pour selon le rapport ℓ/L : (a) réponses de la force ; (b) réponses de la déformation plastique maximale.

La fig. 2a présente les réponses de la force avec le déplacement imposé. Plus ℓ/L est faible, plus le régime avec adoucissement est prononcé. L'évolution de la déformation plastique maximale p_0 est représentée sur la fig. 2b. Sa valeur augmente lorsque le rapport des longueurs diminue. On notera que pour le plus petit, $\ell/L = 0.05$, la solution analytique prédit une première branche d'évolution irréversible, après la réponse élastique, durant laquelle la déformation diminue avec la contrainte. Cette prédiction résulte du fait que la condition de snap-back éq. (9) est alors vérifiée. La réponse numérique, simulée avec un déplacement imposé croissant, présente donc un saut en fin de réponse élastique, pour rejoindre la solution analytique dès lors que $\bar{U}/(2L) \geq \sigma_0/E = 0.01$. La fig. 3 trace quant à elle l'évolution du profil de déformation plastique le long du chargement. Le résultat numérique se superpose à la solution analytique, de forme exponentielle décroissante, en accord avec le profil présenté éq. (7).

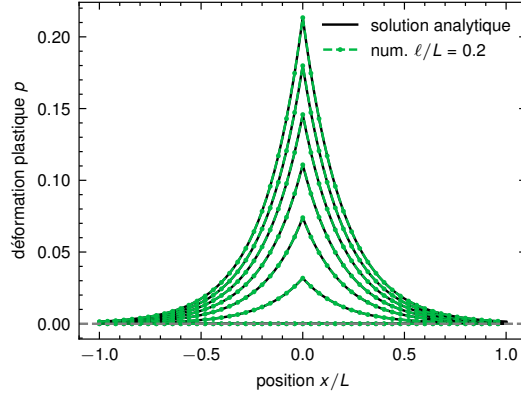


FIGURE 3 – Profils de déformation plastique analytique et numérique pour le rapport $\ell/L = 0.2$.

4 Application à la plasticité de von Mises

4.1 Régularisation du modèle de von Mises avec adoucissement

La structure de régularisation unidimensionnelle, présentée via les deux potentiels éq. (3), est ici généralisée au cas de la plasticité de von Mises avec adoucissement, via la diminution de la limite d'élasticité avec la déformation plastique cumulée. Pour cela, ses potentiels d'énergie et de dissipation sont écrits comme tels :

$$\begin{cases} \Psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) : \mathbb{E} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) & (11a) \\ \Phi(\underline{\dot{\varepsilon}}^p, \dot{p}, \dot{p}'; p) = \rho(p)\dot{p} + I_{\mathbb{R}^+}(\dot{p} - \dot{\varepsilon}_{eq}^p) + I_{\{0\}}(\dot{\varepsilon}_v^p) + \pi(\dot{p}', \dot{p}) & (11b) \end{cases}$$

avec \mathbb{E} le tenseur d'élasticité linéaire isotrope. $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ et $\dot{\varepsilon}_v^p$ désignent respectivement les taux de déformation plastique déviatorique équivalent et volumique, déduits classiquement de la décomposition orthogonale du taux de la déformation plastique. En particulier, la présence de la seconde fonction indicatrice dans le potentiel de dissipation éq. (11b), $I_{\{0\}}(x) = 0$ si $x = 0$, et $I_{\{0\}}(x) = +\infty$ sinon, contraint classiquement la déformation plastique à être isochore. L'expression de la contribution régularisant le modèle de von Mises, la fonction π présente éq. (11b), est quant à elle précisée dans ce paragraphe sous la forme suivante :

$$\pi(\dot{p}', \dot{p}) = \begin{cases} \sigma_0 \frac{|\ell \dot{p}'|^2}{2\dot{p}} & \text{si } \dot{p} > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{p} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

avec ℓ une longueur de régularisation. Conformément à l'exigence éq. (4), on vérifie que $\pi(0, \dot{p}) = 0$.

4.2 Traction d'une plaque rectangulaire en déformations planes

Dans ce second exemple, on simule la réponse du modèle de von Mises, défini éq. (11) et (12), sur la traction en déformations planes d'une plaque rectangulaire, de hauteur $H = 30$ mm et largeur $D = 20$

mm, présentée sur la fig. 4. Le chargement est imposé par le déplacement vertical \bar{U} sur le bord supérieur de la plaque. Les déplacements horizontaux sont bloqués à zéro sur les deux bords supérieur et inférieur.

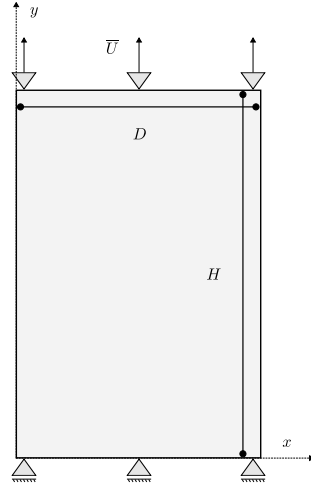


FIGURE 4 – Traction d’une plaque rectangulaire avec ses conditions aux limites.

Les paramètres du modèle sont résumés dans le tableau 1, où K et G désignent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement définissant le tenseur d’élasticité isotrope \mathbb{E} éq. (11a).

TABLE 1 – Paramètres matériau du modèle de von Mises régularisé.

K	G	σ_0	b	ℓ
150 GPa	70 GPa	200 MPa	12.5	0.5 mm

4.3 Résultats numériques

La fig. 3 présentent les résultats selon trois finesses $h_c \in \{0.25 \text{ mm}, 0.5 \text{ mm}, 1 \text{ mm}, 2 \text{ mm}\}$, d’une part sur les réponses de la force résultante (fig. 5a), et d’autre part sur l’évolution de l’énergie dissipée avec la déformation plastique cumulée maximale (fig. 5b). Ils confirment une indépendance très satisfaisante à la taille de discrétisation dès $h_c \leq 1 \text{ mm}$.

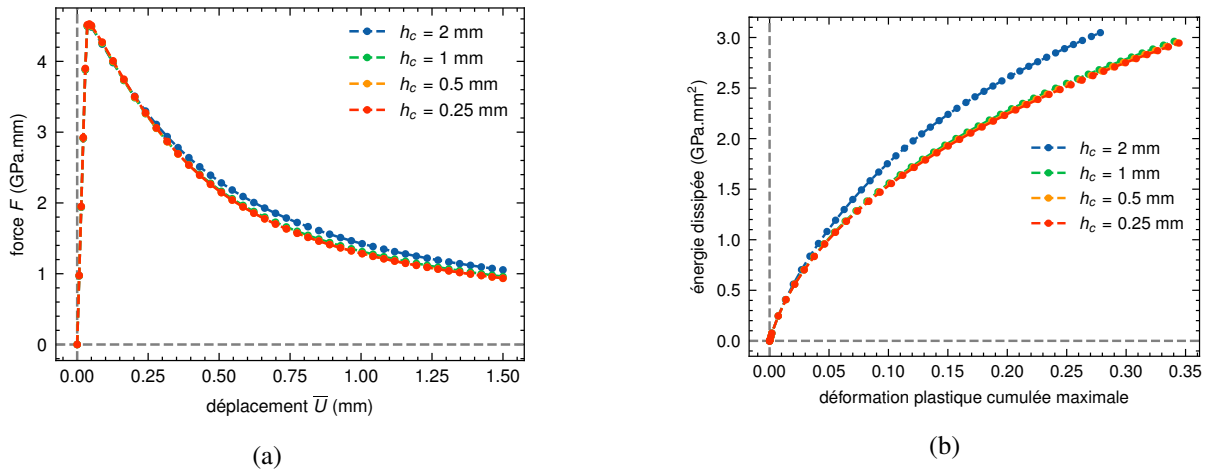


FIGURE 5 – Résultats selon la taille de discrétisation employée h_c : (a) réponses de la force résultante avec le déplacement ; (b) évolutions de l’énergie dissipée avec la déformation plastique cumulée maximale.

En fin de chargement, à $\bar{U} = 1.5 \text{ mm}$, la fig. 6 reproduit le champ de déformation plastique cumulée. Le faciès de localisation est présenté sous la forme d’une croix à quatre branches, sans que la déformation plastique ne soit localisée sur un élément du maillage, ce quelque soit la valeur de h_c ¹. Ainsi,

1. On notera que, par lisibilité, le maillage le plus fin avec $h_c = 0.25 \text{ mm}$ sur la fig. 6 n’est pas représenté.

régularisation du modèle de von Mises, via les relations éq. (11a) et (12), supprime toute localisation pathologique des solutions numériques au maillage éléments finis.

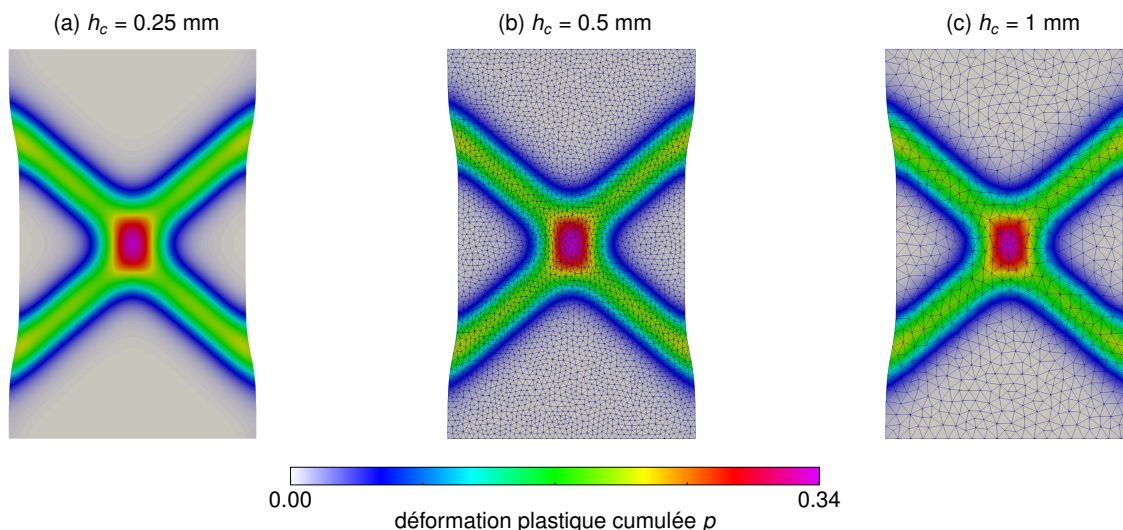


FIGURE 6 – Isovaleurs du champ de déformation plastique cumulée en fin de chargement $\bar{U} = 1.5$ mm selon la finesse du maillage dans la configuration déformée.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons mis en place une régularisation de la plasticité avec adoucissement, basée sur le cadre des Matériaux Standard Généralisés à gradients de variables internes [2]. Notre approche consiste à porter la régularisation non pas dans le potentiel d'énergie, mais dans le potentiel de dissipation. Celle-ci conduit à obtenir des résultats numériques indépendants du maillage, appuyés sur des solutions analytiques. En particulier, cette stratégie de régularisation évite l'élargissement significatif des bandes de localisation, défaut reconnu lors de la régularisation du potentiel d'énergie par un terme quadratique en gradient de déformation plastique [5, 4]. En perspective, ce cadre de régularisation par le potentiel de dissipation pourra s'appliquer à d'autres lois de comportement [8] que la plasticité de von Mises, ici illustrée dans ce travail.

Références

- [1] N.A. Fleck, J.R. Willis. *A mathematical basis for strain-gradient plasticity theory—Part I : Scalar plastic multiplier*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 57, 161–177, 2009.
- [2] Q.S. Nguyen. *On standard gradient plasticity and visco-plasticity*, International Journal of Solids and Structures, 225, 111038, 2021.
- [3] E.C. Aifantis. *The physics of plastic deformation*, International Journal of Plasticity, 3, 211–247, 1987.
- [4] J.M. Scherer, J. Besson, S. Forest, J. Hure, B. Tanguy. *Strain gradient crystal plasticity with evolving length scale : Application to voided irradiated materials*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 77, 103768, 2019.
- [5] M. Jirásek, S. Rolshoven. *Localization properties of strain-softening gradient plasticity models. Part II : Theories with gradients of internal variables*, International Journal of Solids and Structures, 46, 2239–2254, 2009.
- [6] M. Ortiz, L. Stainier. *The variational formulation of viscoplastic constitutive updates*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 171, 419–444, 1999.
- [7] J. Bleyer. *Applications of Conic Programming in Non-smooth Mechanics*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2022.
- [8] G. Bacquaert, S. Raude, V. Alves-Fernandes, F. Voldoire, D. Kondo. *A standard thermodynamic-based extension of the Modified Cam-Clay soil model and its applications*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 103, 105122, 2024.