

Modèle réduit pour la simulation numérique d'enceinte de confinement de centrale à double paroi

E. Agouzal^{1,2,3}, J-P. Argaud¹, M. Bergmann^{2,3},
G. Ferté¹, S. Michel-Ponnelle¹, T. Taddei^{2,3}

¹ Electricité de France (EDF) R&D, Saclay, France, {eki.agouzal, jean-philippe.argaud, guilhem.ferte, sylvie.michel-ponnelle}@edf.fr

² IMB, UMR 5251, Univ. Bordeaux, 33400 Talence, France

³ INRIA, Inria Bordeaux Sud-Ouest, Team MEMPHIS, Univ. Bordeaux, 33400 Talence, France, {michel.bergmann, tommaso.taddei}@inria.fr

Résumé — Notre étude propose une méthode de réduction de modèle par projection pour modéliser le vieillissement des structures en béton précontraint. Nous développons un algorithme adaptatif basé sur la Proper Orthogonal Decomposition (POD) et une stratégie de recherche gloutonne pour construire un modèle d'ordre réduit. Pour atténuer les coûts de calcul liés à la non-linéarité de l'opérateur, nous introduisons une stratégie d'hyper-réduction basée sur la quadrature empirique (EQ) en utilisant un maillage réduit. Des résultats numériques sont présentés pour une section d'une enceinte de confinement à double paroi modélisée avec le logiciel de mécanique des structures `code_aster`.

Mots clés — ROM, hyper-réduction, mécanique non-linéaire, béton précontraint

1 Introduction

Dans le contexte de la gestion du parc nucléaire, Electricité de France (EDF) cherche à garantir la meilleure compréhension possible de l'état mécanique des enceintes de confinement de ses centrales. Une attention particulière se porte sur l'évaluation des taux de fuite à travers les enceintes de confinement à double paroi. Afin d'atteindre cet objectif, des travaux de recherche ont été réalisés avec pour dessein le développement de modèles thermo-hydro-mécaniques (THM) robustes, spécialement conçus pour la modélisation du vieillissement de ces imposantes structures en béton précontraint. Une seconde étape consiste à coupler ces modèles des méthodologies d'optimisation sophistiquées, comprenant notamment l'assimilation de données et l'inférence bayésienne[8]. En effet, l'objectif des ingénieurs est d'intégrer les données existantes provenant du parc nucléaire dans ces modèles numériques, dans le but d'obtenir des paramètres physiques optimaux. Une telle approche permet de générer des simulations numériques qui correspondent au mieux à la réalité observée. Cependant, ces processus d'optimisation peuvent nécessiter un grand nombre d'exécutions de codes de calcul aux éléments finis (EF) désignés comme des calculs haute-fidélité (HF). Cette exigence peut potentiellement entraîner des coûts de calcul considérables, ce qui constitue un défi non négligeable à prendre en compte dans cette démarche de recherche.

Afin de pallier ces problèmes, nous proposons une procédure de réduction de modèles (ROM) par projection pour la modélisation du vieillissement des grandes structures en béton précontraint. Les modèles mécaniques utilisés dans ces simulations impliquent une approche multi-modèle : un modèle tridimensionnel non-linéaire thermo-hydro-activé pour le béton et un modèle unidimensionnel pour les câbles de précontrainte. Une liaison cinématique est effectuée afin de relier les noeuds associé au béton et les noeuds associé à l'acier : les points coïncidents dans chaque matériau sont supposés avoir le même déplacement.

Nous développons un algorithme adaptatif basé sur une *Proper Orthogonal Decomposition* (POD[3]) et une stratégie de recherche gloutonne[6] pour construire un modèle d'ordre réduit. La non-linéarité de l'opérateur implique que le coût de calcul de l'assemblage de la ROM augmente avec la taille du modèle HF. Nous nous fondons sur une stratégie d'hyper-réduction basée sur la quadrature empirique (EQ) pour contourner ce goulet d'étranglement en termes de coûts de calcul : notre approche repose sur la construction d'un maillage réduit pour accélérer les coûts d'assemblage de la ROM. Nous fournissons

des résultats numériques sur une section d'une enceinte de confinement à double paroi utilisant un code de simulation par éléments finis pour la mécanique des structures (code_ aster[2]).

2 Méthodologie de réduction de modèles pour une approche multi-modélisation en mécanique non-linéaire

2.1 Formulation d'un problème multi-modélisation quasi-statique en mécanique non-linéaire

Nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de l'espace supposé être suffisamment régulier. Comme indiqué plus haut, nous supposons que le domaine Ω peut être divisé en un domaine tridimensionnel Ω^c (le béton), et un domaine unidimensionnel Ω^s (les câbles de précontrainte). Nous considérons un vecteur μ de paramètres physiques du modèles appartenant à un compact $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$. Nous notons u_μ le vecteur des déplacements, que ce soit dans les câbles ou dans le béton, et nous notons \mathcal{X} l'espace de Hilbert auquel appartient le champ u_μ . Afin d'identifier les déplacements dans chaque sous-domaine, nous noterons u_μ^c le déplacement dans le béton, et u_μ^s déplacement dans l'acier. Ces deux champs peuvent être considérés comme des restrictions de u_μ sur le domaine correspondant. Le tenseur des contraintes mécaniques dans le béton est le gradient symétrique du déplacement et est noté $\varepsilon_\mu^c = \nabla_s u_\mu^c = \frac{1}{2} (\nabla u_\mu^c + (\nabla u_\mu^c)^T)$, et les déformations à l'intérieur des câbles (également appelées déformations uniaxiales) sont définies comme $\varepsilon_\mu^s = \partial_s u_\mu^s$, où $\partial_s(\cdot)$ est la dérivée le long du câble. Nous désignons le tenseur des contraintes dans le béton par σ_μ , les forces normales dans l'acier par N_μ , et les variables internes dans le béton par γ_μ^c et dans l'acier par γ_μ^s . Nous supposons que les équations constitutives utilisées dépendent de champs physiques auxiliaires. Ces derniers sont notés dans cette section par un vecteur H et correspondent aux champs calculés précédemment (typiquement un champ de température lors d'un couplage faible thermo-mécanique). De fait, ces champs constituent des solutions à des équations qui ne dépendent pas des paramètres définis dans le vecteur μ . Le vecteur est composé de champs qui peuvent apparaître et intervenir dans les équations constitutives ou d'évolution du problème. Dans le cas de l'application présenté, à savoir dans le cas d'un phénomène thermo-hydro-activé, ce vecteur est constitué de la paire formée par la température et la teneur en eau dans le béton. Ces notations nous permettent de reformuler le problème sous une forme compacte, ce qui aide à gérer la multi-modélisation (3d-1d) en utilisant trois opérateurs, $\mathcal{G}_\mu(\cdot)$ pour l'équation d'équilibre, $\mathcal{F}_\mu^\varepsilon(\cdot)$ pour l'équation constitutive et $\mathcal{F}_\mu^\gamma(\cdot)$ pour l'équation d'évolution des variables internes :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\mu(\mathfrak{S}_\mu) &= f \\ \mathfrak{S}_\mu &= \mathcal{F}_\mu^\varepsilon(\varepsilon_\mu, \gamma_\mu, H) \\ \dot{\gamma}_\mu &= \mathcal{F}_\mu^\gamma(\mathfrak{S}_\mu, \gamma_\mu, H) \end{cases} \quad (1)$$

où l'ensemble des notations est précisé dans le Tableau 1. Bien plus, nous ne précisons pas les conditions aux limites et conditions initiales du problème à ce stade.

Notation sur Ω	Notation sur Ω^s	Notation sur Ω^c	Définition
\mathfrak{S}_μ	N_μ	σ_μ	Effort généralisé
u_μ	u_μ^s	u_μ^c	Déplacement
ε_μ	ε_μ^s	ε_μ^c	Déformation
γ_μ	γ_μ^s	γ_μ^c	Variables internes

TABLE 1 – Notations des champs définis sur l'ensemble du domaine Ω , dont la définition dépend du sous-domaine (Ω^c ou Ω^s)

Le terme $\{\mathbf{u}_\mu^{\text{hf},(k)}\}_{k=1}^K$ désigne l'approximation EF du déplacement donnée par le modèle HF à chaque instant de calcul, tandis que $\{\mathfrak{S}_\mu^{\text{hf},(k)}\}_{k=1}^K$ correspond aux champs d'efforts généralisés (contrainte ou efforts normaux). Nous présentons la discrétisation EF de la forme variationnelle du problème, $\forall k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_\mu^{\text{hf},(k)} \in \mathcal{X}_{\text{bc}}^{\text{hf}} \text{ s.t. , } \begin{cases} \mathcal{R}_\mu^{\text{hf}} \left(\mathbf{u}_\mu^{\text{hf},(k)}, \mathbf{u}_\mu^{\text{hf},(k-1)}, \underline{\mathcal{S}}_\mu^{\text{hf},(k-1)}, \mathbf{v} \right) = 0 \\ \underline{\mathcal{S}}_\mu^{\text{hf},(k)} = \mathcal{F}_\mu^{\text{hf}} \left(\mathbf{u}_\mu^{\text{hf},(k)}, \mathbf{u}_\mu^{\text{hf},(k-1)}, \underline{\mathcal{S}}_\mu^{\text{hf},(k-1)} \right) \end{cases} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}_{\text{bc}}^{\text{hf}} \quad (2)$$

où $\mathcal{X}_{\text{bc}}^{\text{hf}} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{X}^{\text{hf}} : \mathbf{B}\mathbf{v} = 0 \}$ représente l'espace test pour les déplacements, et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_d \times \mathcal{N}}$ est la matrice des relations cinématiques. \mathcal{N}_d représente le nombre de relations linéaires entre les degrés de liberté que nous entendons appliquer. En pratique, un code EF procède à l'assemblage en sommant les contributions élémentaires, ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\mu^{\text{hf}} \left(\mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \underline{\mathcal{S}}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{v} \right) &= \sum_{q=1}^{N_e} \mathcal{R}_{\mu,q}^{\text{hf}} \left(\mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{qd}} \underline{\mathcal{S}}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{v} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{q=1}^{N_e^{\text{3d}}} \mathcal{R}_{\mu,q}^{\text{hf}} \left(\mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{qd,3d}} \sigma_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{v} \right)}_{=\mathcal{R}_\mu^{\text{hf,3d}} \left(\mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \sigma_\mu^{(k-1)}, \mathbf{v} \right)} + \underbrace{\sum_{q=1}^{N_e^{\text{1d}}} \mathcal{R}_{\mu,q}^{\text{hf}} \left(\mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{qd,1d}} \mathbf{N}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{v} \right)}_{=\mathcal{R}_\mu^{\text{hf,1d}} \left(\mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{N}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{v} \right)} \end{aligned}$$

où \mathbf{E}_q^{no} (resp. \mathbf{E}_q^{qd}) est un opérateur de restriction élémentaire sur les vecteurs aux nœuds (resp. points de quadrature). Pour les opérateurs sur les vecteurs aux points de quadrature, nous adoptons la notation spécifique $\mathbf{E}_q^{\text{qd,3d}}$ (resp. $\mathbf{E}_q^{\text{qd,1d}}$) pour le cas où les éléments sont tridimensionnels (resp. unidimensionnels). Nous précisons que la procédure d'assemblage peut être divisée en deux termes, une boucle pour les éléments de béton et une seconde boucle pour les éléments d'acier.

2.2 Construction du modèle réduit

Dans cette section, nous décrivons la méthodologie adoptée pour concevoir notre ROM. Il s'agit d'une extension de la procédure gloutonne déjà appliquée à des problèmes de mécanique quasi-statiques avec variables internes [1], étendue à un problème mécanique plus complexe, à savoir la modélisation du béton précontraint. Nous décrivons brièvement les principales étapes de la méthodologie. Plus de détails sur l'approche globale sont disponibles dans des travaux précédents [1]. Nous commençons par expliquer l'approche pour un cas non-paramétrique. L'objectif est de reproduire un calcul HF à l'aide d'une ROM pour un jeu de paramètres donné. Le processus de construction de la ROM comprend deux étapes principales : l'étape *offline*, au cours de laquelle les ingrédients de construction du modèle réduit sont déterminés, qui consistent ici en une base réduite, une loi de quadrature empirique et le maillage réduit qu'elle engendre ; l'étape *online*, au cours de laquelle le modèle de substitution (modèle réduit) que nous avons construit est utilisé pour représenter de manière approchée la solution HF. Dans un deuxième temps, nous décrivons les modifications apportées pour le cas paramétrique.

2.2.1 Solution Reproduction Problem

Nous cherchons la solution réduite au pas de temps k (notée $\widehat{\mathbf{u}}_\mu^{(k)}$) comme une combinaison linéaire des modes :

$$\widehat{\mathbf{u}}_\mu^{(k)} = \sum_{n=1}^{N_u} \left(\widehat{\alpha}_{u,\mu}^{(k)} \right)_n \zeta_{u,n} = \mathbf{Z}_u \widehat{\alpha}_{u,\mu}^{(k)} \quad (3)$$

où $\widehat{\alpha}_{u,\mu}^{(k)} \in \mathbb{R}^{N_u}$ est le vecteur des coordonnées réduites et $[\mathbf{Z}_u]_{\cdot,n} = \zeta_{u,n}$ sont les vecteurs de la base réduite en déplacement, construit à l'aide d'une approche POD. L'objectif principal de cette méthode est de trouver des approximations des données de faible dimension, qui préservent les informations essentielles d'un ensemble de données de grande dimension. Plus précisément, nous recourons à la méthode des *snapshots* [9] pour construire la base réduite. Etant donné un ensemble discret de *snapshots* EF $\{ \mathbf{v}_k \}_{k=1}^K$, un produit scalaire sur les vecteurs EF (\cdot, \cdot) , et une tolérance ε , nous définissons une matrice de Gram $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{K \times K}$ comme suit : $\mathbf{C}_{i,j} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. Nous résolvons ensuite un problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{C}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_K$$

dans le but d'obtenir les couples de valeurs propres et de vecteurs propres (λ_n, φ_n) . Nous pouvons alors calculer les modes :

$$\zeta_{u,n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{k=1}^K (\varphi_n)_k \mathbf{v}_k$$

Le nombre de modes est sélectionné par le biais d'un critère en énergie sur le spectre, à l'aide d'une tolérance donnée par l'utilisateur ε :

$$N_u = \min \left\{ Q \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^Q \lambda_k \geq (1 - \varepsilon^2) \sum_{q=1}^K \lambda_q \right\} \quad (4)$$

L'appel au processus de construction de la base par POD est noté dans nos travaux comme suit :

$$\mathbf{Z} = \text{POD} \left\{ \{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^K, (\cdot, \cdot), \varepsilon \right\} \quad (5)$$

Le modèle réduit est enfin obtenu par projection du résidu HF discret sur la base réduite (voire Eq(2)), ce qui revient à considérer :

$$\mathbf{Z}_u^T \mathbf{R}_\mu^{\text{hf}} \left(\hat{\mathbf{u}}_\mu^{(k)}, \hat{\mathbf{u}}_\mu^{(k-1)}, \hat{\underline{\mathbf{S}}}_\mu^{(k-1)} \right) = 0 \quad (6)$$

La non-linéarité de l'opérateur entraîne un goulet d'étranglement du coût CPU, puisque la procédure d'assemblage évolue avec le coût d'un calcul HF. Afin de contourner ce problème, nous recourons à une approche d'hyper-réduction de type ECSW[5], à savoir par repondération des contributions élémentaires [7] [10]. La méthode échantillonne un sous-ensemble d'éléments de maillage sur l'ensemble du domaine de calcul afin de réduire les coûts d'assemblage lors de l'appel au modèle réduit. Avec cette approche, un résidu empirique $\mathcal{R}_\mu^{\text{eq}}$ est généré et utilisé lors de la procédure d'assemblage lorsque le solveur ROM est appelé. Dans le cadre de notre problème de multi-modélisation, nous choisissons d'appliquer la procédure d'hyper-réduction uniquement aux termes tridimensionnels, car ceux-ci sont non-linéaires.

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{eq}} \left(\mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \underline{\mathbf{S}}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{v} \right) = \underbrace{\mathcal{R}_\mu^{\text{eq},3\text{d}} \left(\mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \boldsymbol{\sigma}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{v} \right)}_{\text{hyper-réduit}} + \underbrace{\mathcal{R}_\mu^{\text{hf},1\text{d}} \left(\mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{N}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{v} \right)}_{\text{non hyper-réduit}} \quad (7)$$

Comme précisé plus haut, la construction de la loi de quadrature empirique repose sur l'approche *Energy-Conserving Sampling and Weighting method* (ECSW) [5], dont la qualité a déjà été démontrée pour des problèmes en mécanique des structures. L'approche ECSW consiste à résoudre un problème des moindres carrés inexacts. La résolution du problème d'optimisation fournit une nouvelle loi de quadrature élémentaire $\rho^{eq} \in \mathbb{R}^{N_e^{3\text{d}}}$, qui définit l'opérateur $\mathcal{R}_\mu^{\text{eq}}$ à partir de l'opérateur HF comme suit :

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{eq},3\text{d}} \left(\mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \boldsymbol{\sigma}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{v} \right) = \sum_{q=1}^{N_e^{3\text{d}}} (\rho^{eq})_q \mathcal{R}_{\mu,q}^{\text{hf}} \left(\mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{u}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{qd},3\text{d}} \boldsymbol{\sigma}_\mu^{(k-1)}, \mathbf{E}_q^{\text{no}} \mathbf{v} \right) \quad (8)$$

La connaissance de l'état mécanique du matériau nécessite de connaître le champ de contraintes sur le maillage HF. Ce champ est déterminé en intégrant les équations constitutives aux points de quadrature. Cependant, les variables internes ne sont connues qu'au niveau des éléments échantillonnés dans le maillage. Le champ de contraintes n'est donc connu qu'au niveau du maillage réduit. Pour résoudre ce problème, nous construisons une base d'ordre réduit (ROB) pour l'effort généralisé $\underline{\mathbf{S}} = [\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{N}]^T$. La reconstruction du champ d'effort généralisé sur l'ensemble du maillage HF est ensuite effectuée à l'aide d'une procédure Gappy-POD [4]. Contrairement aux vecteurs de déplacement, les composantes des vecteurs d'efforts généralisés sur des points discrets unidimensionnels et tridimensionnels n'ont pas la même dimension physique. On définit donc le produit scalaire sur les vecteurs d'efforts généralisés :

$$(\underline{\mathcal{G}}_1, \underline{\mathcal{G}}_2) = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \mathbf{N}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_2 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} \right)_{[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{N}]} = \frac{1}{\lambda_1^\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)_2 + \frac{1}{\lambda_1^\mathbf{N}} (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)_2 \quad (9)$$

où $\lambda_1^\boldsymbol{\sigma}$ (resp. $\lambda_1^\mathbf{N}$) est la plus grande valeur propre au sens du produit scalaire ℓ_2 pour les vecteurs contraintes (forces normales). En résumé, en plus de la règle EQ $\boldsymbol{\rho}^{\text{eq}}$ (et du maillage réduit associé), la ROM est constituée de deux bases réduites, définies grâce à l'opérateur POD détaillé dans Eq (5) comme suit :

$$\mathbf{Z}_u = \text{POD} \left\{ \{ \mathbf{u}_\mu^{\text{hf},(k)} \}_{k=1}^K, (\cdot, \cdot)_2, \boldsymbol{\varepsilon}_u \right\}, \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_\mathcal{G} = \text{POD} \left\{ \{ \underline{\mathcal{G}}_\mu^{\text{hf},(k)} \}_{k=1}^K, (\cdot, \cdot)_{[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{N}]}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathcal{G} \right\} \quad (10)$$

2.2.2 Problème paramétrique

Afin de fournir une ROM fiable sur un ensemble de paramètres, nous construisons le modèle de substitution en utilisant une approche POD-Greedy. Cette procédure itérative a pour but d'enrichir le modèle réduit (c'est-à-dire la base et le maillage réduit) en identifiant à chaque itération la solution HF la moins bien approximée par la ROM. La solution la plus mauvaise approximée est estimée en explorant un ensemble de tests Θ_{train} , défini comme une approximation discrète de \mathcal{P} . Nous comparons les erreurs d'approximation (erreur entre solution HF et solution réduite) sur la totalité de l'ensemble de tests, afin d'identifier le paramètre pour lequel cette erreur est maximale. Ce paramètre est ensuite utilisé pour améliorer la qualité d'approximation de la ROM. Le passage de la méthodologie au cas paramétrique nécessite l'adaptation de deux parties de l'algorithme : la construction de la base (ROB) et le calcul de l'EQ. Deux constructions des ROB sont explorées dans cet article. Une première approche consiste à effectuer une nouvelle POD sur l'ensemble des *snapshots* HF calculés. Une deuxième approche implique une approche incrémentale, connue dans la littérature sous le nom de H-POD [6]. Cette dernière a l'avantage de fournir une base hiérarchique obtenue en concaténant la base précédente avec celle obtenue avec de nouveaux *snapshots* :

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_{\text{proj}}], \quad \mathbf{Z}_{\text{proj}} = \text{POD} \left\{ \{ \Pi_{\mathbf{Z}^\perp} \mathbf{v}_k \}_{k=1}^K, (\cdot, \cdot), \boldsymbol{\varepsilon} \right\} \quad (11)$$

où $\Pi_{\mathbf{Z}^\perp} : \mathcal{X}^{\text{hf}} \rightarrow \mathcal{Z}$ est l'opérateur de projection orthogonal $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}^{\text{hf}}$ utilisant le produit scalaire (\cdot, \cdot) . Nous nous reposons sur les approches de régularisation données dans la Référence [7] pour calculer le nouveau nombre de modes. Avant la concaténation des deux bases, un critère est ajouté afin que seuls les modes qui réduisent effectivement l'erreur de projection soient ajoutés à la base. Les étapes successives de l'algorithme sont résumées dans l'Algorithme 1.

Algorithm 1 Algorithme POD-Greedy

Require: $\Theta_{\text{train}} = \{ \mu_i \}_i^{N_{\text{train}}}, \boldsymbol{\varepsilon}_u, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathcal{G}$

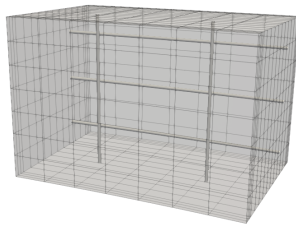
- 1: $\mathcal{Z}_{N_u} = \mathcal{Z}_{N_\sigma} = \emptyset, \mu_* = \bar{\mu}, \Theta_* = \{ \mu_* \}$. ▷ $\bar{\mu}$ désigne le centroïde de Θ_{train}
 - 2: **while** Critère d'arrêt **do**
 - 3: Calculer $\{ \mathbf{u}_{\mu_*}^{\text{hf},(k)} \}_{k=1}^K, \{ \underline{\mathcal{G}}_{\mu_*}^{\text{hf},(k)} \}_{k=1}^K$ ▷ Appel à code_aster
 - 4: Construire la base des déplacements \mathbf{Z}_u
 - 5: Calculer $\boldsymbol{\rho}^{\text{eq}}$ étant donné $\{ \zeta_{u,n} \}_{n=1}^{N_u}$ et $\{ \underline{\mathcal{G}}_\mu^{\text{hf},(k)} \}_{k \in \{1, \dots, K\}, \mu \in \Theta_*}$
 - 6: Construire le maillage réduit \mathcal{T}^{red}
 - 7: Construire la base des efforts $\mathbf{Z}_\mathcal{G}$
 - 8: **for** $\mu \in \Theta_{\text{train}}$ **do**
 - 9: Résoudre en utilisant la ROM pour μ et calculer $E_\mu^{\text{app,avg}}$
 - 10: **end for**
 - 11: $\mu_* = \arg \max_{\mu \in \Theta_{\text{train}}} E_\mu^{\text{app,avg}}$
 - 12: $\Theta_* = \Theta_* \cup \{ \mu_* \}$
 - 13: **end while**
-

3 Application à une section courante d’enceinte de confinement de centrale

Dans cette section, nous décrivons notre modèle numérique et présentons les résultats obtenus. Dans la pratique industrielle, le coût prohibitif de processus d’optimisation pour la simulation du fluage sur de longues périodes contraint souvent les ingénieurs à se limiter à la simulation d’un volume représentatif. Par conséquent, nous nous focalisons sur la construction d’une ROM pour un tel modèle. Pour démontrer l’efficacité de notre approche, nous nous concentrons sur cette configuration, comme décrit dans la section suivante. Nous examinons spécifiquement la simulation d’une section courante d’enceinte, en utilisant un maillage relativement grossier. Notre objectif est de reproduire le processus de fluage mécanique sur une période prolongée, en tenant compte des champs thermiques et hydriques précalculés (couplage faible THM). Nous n’entrons pas dans les détails de la loi de comportement utilisé. Néanmoins, nous précisons que la simulation vise à reproduire un comportement de fluage utilisant la loi `BETON_BURGER` du catalogue de `code_aster`[2]. Dans cette section, nous nous limitons à présenter des résultats non paramétriques.

3.1 Problème EF de référence

Deux types de maillage sont adoptés en pratique : l’un pour les calculs thermo-hydriques et l’autre pour les calculs mécaniques. Le maillage thermique est raffiné à proximité de l’intradros et de l’extrados afin de disposer d’une meilleure reconstruction des gradients thermo-hydriques. Les champs issus de cette procédure sont alors projetés sur le maillage mécanique. Le maillage thermique ne contient pas les câbles de précontrainte : il est composé de cellules hexaédriques linéaires (HEXA8). Pour le maillage mécanique (voire Figure 1), des éléments quadratiques hexaédriques (HEXA20) sont utilisés pour le béton, et les câbles de précontrainte sont représentés à l’aide d’éléments finis linéaires SEG2 (barres à 2 noeuds).



(a) Visualisation du maillage mécanique

N_e	N_e^{1d}	N_e^{2d}	N_e^{3d}	\mathcal{N}	\mathcal{N}_c	\mathcal{N}_s
1532	784	693	55	4076	3911	165

(b) Informations sur le maillage mécanique : N_e désigne le nombre d’éléments tandis que \mathcal{N} désigne le nombre de degrés de libertés (\mathcal{N}_c pour les mailles de béton et \mathcal{N}_s pour les mailles d’acier)

FIGURE 1 – Visualisation (voir Figure 1a) et information sur le maillage mécanique d’une section courante d’enceinte (nombre d’éléments et nombres de noeuds pour les maillages unidimensionnel et tridimensionnel, voir Figure 1b).

3.2 Solution reproduction problem

Nous commençons par effectuer une validation de la méthodologie sur un cas non paramétrique. Notre objectif est de reproduire la simulation haute fidélité avec notre ROM pour le même ensemble de paramètres (*solution reproduction problem*).

Afin d’évaluer la robustesse de l’approche de réduction proposée dans cette étude, nous avons élaboré plusieurs ROM en variant le nombre de modes de déplacement et en ajustant les tolérances d’hyper-réduction. L’augmentation du nombre de modes et la réduction de l’hyperparamètre δ améliorent la précision de la ROM, mais entraînent également une augmentation du temps de calcul. Il est donc nécessaire de trouver un compromis pour les applications en ingénierie, visant à fournir une ROM à la fois rapide et précise. Les résultats présentés dans la Figure 2 illustrent l’évolution des accélérations temporelles et des erreurs d’approximation du déplacement, moyennées dans le temps, en fonction du nombre de modes,

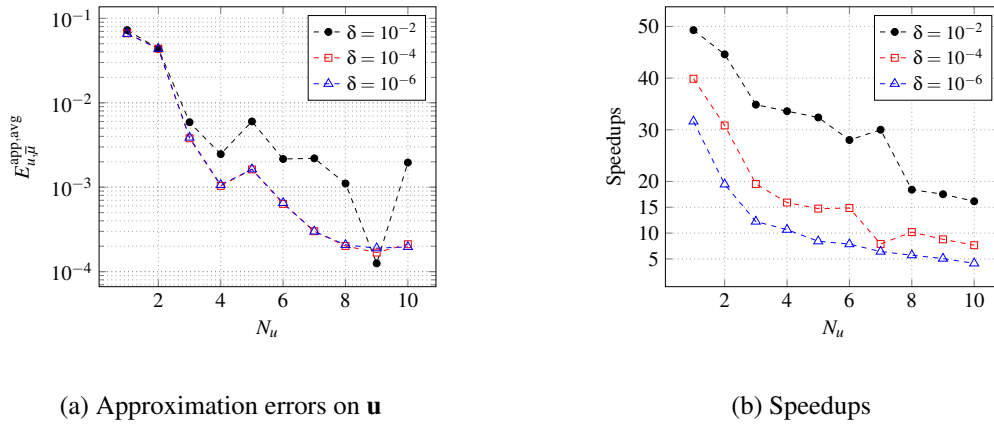


FIGURE 2 – Evolution de l’erreur d’approximation moyennée en temps sur les déplacements et speedups en fonction du nombre de modes utilisés (N_u , voir Figure2a) et pour plusieurs tolérances d’hyper-réduction (δ , voir Figure2b)

pour différentes tolérances. Nous pouvons constater qu’à partir de 5 modes, la qualité du modèle réduit est remarquable, avec des erreurs d’approximation de l’ordre de quelques pourcents, indépendamment de la tolérance choisie. Dans ce contexte, les gains en termes de vitesse de calcul sont significatifs, notamment avec une accélération d’environ 10 pour la tolérance la plus stricte (équivalente à la tolérance de Newton-Raphson utilisé pour la résolution du problème HF), d’environ 15 pour la tolérance intermédiaire examinée, et de plus de 30 pour la tolérance la moins contraignante. Ces améliorations de la vitesse de calcul sont d’autant plus remarquables que la résolution du maillage étudié dans cet article est relativement grossière, ne comportant que quelques centaines d’éléments, comme illustré dans la Figure 3. Ces résultats ouvrent la voie à des travaux futurs portant sur l’utilisation de maillages plus fins dans l’étude du vieillissement des enceintes de confinement.

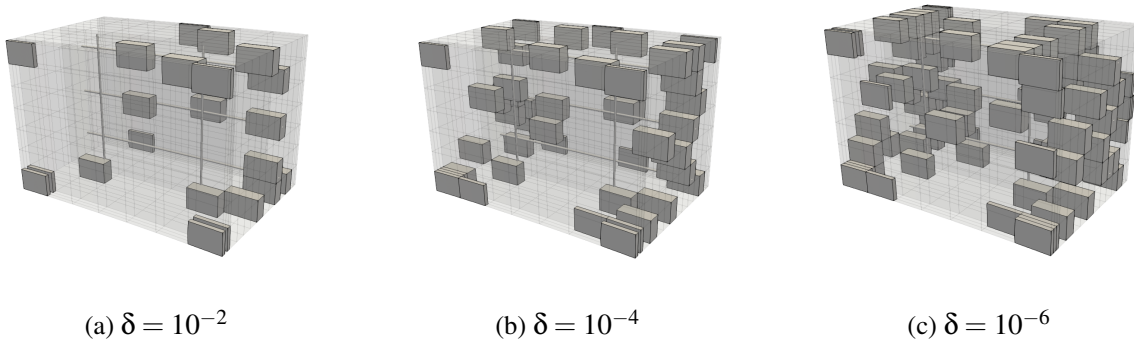


FIGURE 3 – Maillages réduits pour la section courante obtenus pour un *Solution Reproduction Problem* utilisant $N_u = 5$ modes en déplacement et plusieurs valeurs du paramètre de tolérance d’hyper-réduction δ

4 Conclusion et Perspectives

En conclusion, les modèles réduits développés dans cette étude offrent une solution efficace pour substituer un modèle complexe de section courante d’enceinte de confinement de centrale. Ils conservent une qualité d’approximation remarquable des champs de déplacements, essentiels pour le calcul des déformations et des quantités d’intérêt pratiques, tout en permettant une réduction significative des coûts de calcul. Ces résultats ouvrent la voie à une intégration prometteuse de ces modèles dans des procédures d’optimisation telles que l’assimilation de données. Par ailleurs, les économies substantielles en termes de calculs facilitent l’exploration de maillages plus fins et de zones de représentation plus complexes pour

les simulations numériques. Actuellement, nous poursuivons des travaux visant à valider la construction du modèle réduit dans une procédure gloutonne sur un espace paramétrique. Les résultats préliminaires sont encourageants, et une consolidation supplémentaire est en cours afin de valider la méthodologie.

Références

- [1] Agouzal, E., Argaud, J., Bergmann, M., Ferté, G. & Taddei, T. A projection-based reduced-order model for parametric quasi-static nonlinear mechanics using an open-source industrial code. *ArXiv Preprint ArXiv :2212.14825*. (2022)
- [2] Electricité de France. Finite element code_aster, Analysis of Structures and Thermomechanics for Studies and Research. Open source on www.code-aster.org ; 1989-2023
- [3] Berkooz, G., Holmes, P. & Lumley, J. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review Of Fluid Mechanics*. **25**, 539-575 (1993)
- [4] Everson, R. & Sirovich, L. Karhunen–Loeve procedure for gappy data. *JOSA A*. **12**, 1657-1664 (1995)
- [5] Farhat, C., Avery, P., Chapman, T. & Cortial, J. Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*. **98**, 625-662 (2014)
- [6] Haasdonk, B. & Ohlberger, M. Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized linear evolution equations. *ESAIM : Mathematical Modelling And Numerical Analysis*. **42**, 277-302 (2008)
- [7] Iollo, A., Sambataro, G. & Taddei, T. An adaptive projection-based model reduction method for nonlinear mechanics with internal variables : Application to thermo-hydro-mechanical systems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*. **123**, 2894-2918 (2022)
- [8] Rossat, D. Quantification d’incertitudes inverse par inférence Bayésienne pour des modèles multi-physiques de grands ouvrages de confinement. (Université Grenoble Alpes,2022)
- [9] Sirovich, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures. *Quarterly Of Applied Mathematics*. **45**, 561-571 (1987)
- [10] Yano, M. Discontinuous Galerkin reduced basis empirical quadrature procedure for model reduction of parametrized nonlinear conservation laws. *Advances In Computational Mathematics*. **45** pp. 2287-2320 (2019)