

# La modélisation du transfert de chaleur dans les écoulements granulaires immergés par une approche multi-échelle

M.Henry<sup>1</sup>,  
S.Dorbolo<sup>2</sup>, F.Dubois<sup>3</sup>, J.Lambrechts<sup>1</sup>, V. Legat<sup>1</sup>

<sup>1</sup> UCLouvain, Université Catholique de Louvain, {michel.henry; jonathan.lambrechts, vincent.legat,}@uclouvain.be

<sup>2</sup> FNRS-CESAM-Soft Matter-PryX, Université de Liège, s.dorbolo@uliege.be

<sup>3</sup> LMGC, Université de Montpellier, CNRS, frederic.dubois@umontpellier.fr

**Résumé** — La modélisation des transferts de chaleur au sein d'un écoulement granulaire immergé est un enjeu majeur afin d'optimiser les procédés industriels et comprendre les phénomènes naturels. Dans cette perspective, notre recherche vise à présenter une approche multi-échelle permettant de modéliser la dynamique ainsi que le transfert de chaleur dans une suspension. Un modèle de transfert de chaleur est proposé tirant profit des similitudes entre le transfert de quantité de mouvement et de chaleur. La fluidification d'un lit granulaire chaud par injection d'air est étudiée afin de valider le modèle proposé.

**Mots clés** — Transfert de chaleur, multi-échelles, suspension, analogie de Reynolds, simulation.

## 1 Introduction

L'étude des transferts de chaleur dans les écoulements granulaires immergés est d'une importance capitale dans de nombreux domaines, allant de la géologie au génie civil, en passant par la pharmacie ou la conception de réaction chimique. Notre objectif est de proposer une approche multi-échelle permettant de modéliser efficacement la dynamique ainsi que le transfert de chaleur entre une phase granulaire et une phase fluide. Un modèle de transfert de chaleur est proposé afin de représenter le transfert de chaleur entre les particules et le fluide, tirant profit des similitudes entre le transfert de quantité de mouvement et de chaleur. Le modèle proposé est validé en étudiant la fluidification d'un lit granulaire chaud par une injection d'air froid.

Les écoulements granulaires se produisent lorsque un ensemble de particules se mettent en mouvement sous l'effet d'une force extérieure. Lorsque ceux-ci sont immergés dans un solvant, on parle d'écoulement granulaire immergé. Différentes catégories d'écoulements granulaires immergés peuvent être distinguées en fonction de la fraction volumique de particules [1] [2]. Si ceux-ci sont suffisamment dilués, les particules se déplacent indépendamment les unes des autres. La dynamique de ces particules est alors régie par les forces de frottement et de pression exercées par le fluide. A l'inverse, lorsque la fraction volumique est suffisamment élevée, les contacts entre particules dominent la dynamique de l'écoulement.

Afin d'étudier la dynamique de ces écoulements, les méthodes numériques sont communément utilisées. Les différentes échelles de temps et de longueur rendent cependant la modélisation de ces écoulements difficile. En effet, les échelles de temps associées à la dynamique des particules sont généralement bien plus petites que celles associées à la dynamique du fluide. Les modèles numériques tirent alors profit de ces propriétés afin de réduire le coût de calcul. Lorsque le milieu granulaire est fortement dilué dans l'écoulement, il est possible de résoudre précisément la dynamique du fluide par méthode directe. Toutefois, lorsque le nombre de particules augmente, il est nécessaire de modéliser l'impact des particules du l'écoulement par des paramétrisations. Cela a été fait avec succès par la méthode de frontières fictives [3] ou la méthode de Lattice-Boltzmann (LBM) [4]. La méthode des éléments finis permet également de modéliser la dynamique de l'écoulement moyen par des approches sous-résolues [5] [6]. Dans ce contexte, l'impact des particules est modélisé de manière double. D'une part, les équations de conservations sont moyennées afin de décrire l'écoulement moyen. D'autre part, le transfert de quantité de mouvement et de chaleur entre les particules et le fluide est modélisé par des corrélations adaptées pour la suspension [7] [8]. Ces corrélations sont généralement établies en supposant les particules sphériques.

La dynamique des particules est modélisée par la méthode des éléments discrets (DEM). Cette approche Lagrangienne permet le suivi individuel des particules. La modélisation des contacts entre particules est un enjeu majeur de cette méthode. Deux approches sont généralement utilisées pour modéliser les contacts entre particules. La première approche consiste à modéliser les contacts entre particules par des ressorts et amortisseurs. Des interpénétrations entre particules sont alors autorisées. On parle alors de la dynamique régulière des contacts (*Smooth Contact Dynamics*). La seconde approche consiste à modéliser les contacts entre particules en prohibant la superposition entre particules dans le réseau de contacts. L'impulsion de contact est alors calculée de telle sorte à empêcher toute interpénétration à la fin du choc [9] [10]. On parle alors de la dynamique non-régulière des contacts (*Non-Smooth Contact Dynamics*). Il est nécessaire d'itérer sur le réseau de contact jusqu'à convergence.

La modélisation du transfert de chaleur au sein d'une suspension est d'une importance capitale afin de comprendre les mécanismes de refroidissement des particules. L'impact de la suspension sur le transfert de chaleur associé est peu connu [11], [12] tandis que l'impact sur le coefficient de traînée est bien documenté [13]. Nous proposons un modèle de transfert de chaleur basé sur l'analogie de Reynolds. Celui-ci est en accord avec les résultats expérimentaux issus de la littérature pour un écoulement dense. Nous investiguons également la validité de ce modèle dans le régime dilué en étudiant numériquement la fluidification d'un lit granulaire chaud par une injection d'air froid dans une cellule de Hele-Shaw. Les résultats de la simulation sont comparés aux données expérimentales de cet expérience dimensionné par Patil [14]. Nous montrons donc que l'analogie de Reynolds est également valable dans les écoulements granulaires immergés. La corrélation en décollant est alors utilisée dans notre modèle multi-échelle afin de modéliser le transfert de chaleur entre les particules et le fluide.

## 2 Une approche multi-échelle

Le fluide est résolu par la méthode des éléments finis et les particules par la méthode des éléments discrets. Afin de prendre en compte la présence des grains au sein de l'écoulement, les équations moyennées de Navier-Stokes (VANS) sont utilisées laissant apparaître la fonction de moyennisation utilisée, la porosité. Le couplage entre les deux phases est réalisé par l'intermédiaire de termes sources dans les équations de conservations. La description de la dynamique des contacts est essentiel à la modélisation de l'écoulement d'un milieu granulaire. Afin de résoudre ces chocs, la dynamique non-régulière des contacts (NSCD) est utilisée. L'ensemble des développements a été réalisé dans le code MigFlow.

### 2.1 Modélisation du fluide

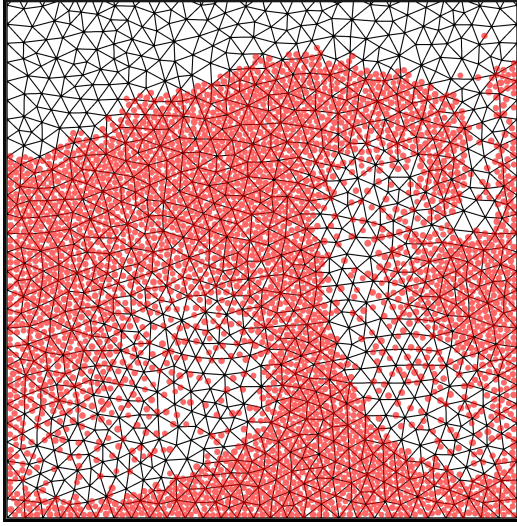
Les équations de Navier-Stokes sont moyennées sur un volume de contrôle plus grand que l'échelle caractéristique des particules [15]. Le processus de moyennisation conduit à des valeurs locales moyennes basées sur la fraction volumique  $\epsilon$  de fluide dans la suspension. L'écoulement est supposé incompressible. La capacité thermique du fluide  $c$  est supposée constante et équivalente à la capacité calorifique à volume constant. La viscosité est supposée constante et indépendante de la température. L'approximation de Boussinesq est utilisée afin de prendre en compte la variation de densité du fluide. La densité autour de la température de référence est notée  $\rho$  et le coefficient de dilatation thermique  $\beta$ . Les équations de Navier-Stokes moyennées sous forme adimensionnelles sont données par

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot [\epsilon \mathbf{u}] = 0 \quad (1)$$

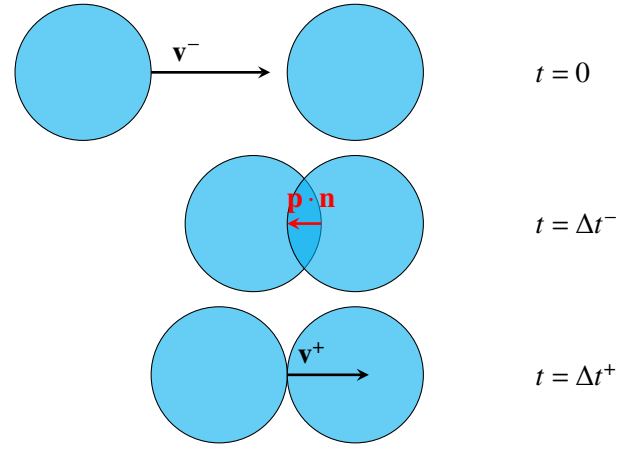
$$\epsilon \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\epsilon \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot [2\epsilon \mathbf{d}(\mathbf{u})] + \epsilon \left( \frac{1}{\text{Fr}^2} + \text{Ri} \right) \mathbf{e}_g + \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\epsilon \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \nabla \cdot [\epsilon \nabla T] + q. \quad (3)$$

Les variables adimensionnelles sont la vitesse du fluide  $\mathbf{u}$ , la température  $T$  et la pression  $p$ . Le tenseur des taux de déformation est défini par  $\mathbf{d}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ . Le vecteur unitaire aligné avec la gravité est dénoté par  $\mathbf{e}_g$ . Les transferts de quantité de mouvement et de chaleur entre le fluide et les particules sont, respectivement, dénotés par  $\mathbf{f}$  et  $q$ , leurs expressions sont détaillées dans la section suivantes. Les quantités adimensionnelles sont définies comme suit,



(a) Représentation sous-résolue de l'écoulement autour des particules. Les mailles du domaine se doivent d'inclure plusieurs particules. L'écoulement moyen dans la suspension est capturé.



(b) La dynamique non-régulière des contacts résout les chocs entre particules en prohibant toute inter-pénétration à la fin du choc  $\Delta t^+$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}^*}{U_R}, & \mathbf{f} &= \frac{\mathbf{f}^*}{\rho U_R^2/d}, \\
 T &= \frac{T^*}{T_R}, & q &= \frac{q^*}{\rho c T_R U_R/d}, \\
 p &= \frac{p^*}{\rho U_R^2}, & t &= \frac{t^*}{d/U_R},
 \end{aligned} \tag{4}$$

dans lesquelles les quantités dimensionnelles sont dénotées par \*. La vitesse caractéristique choisie est la vitesse relative entre la particule et le fluide, notée  $U_R$ . La température de référence  $T_R$  est définie comme la différence de température locale entre la particule et le fluide. Ce choix conduit à un temps adimensionnel relatif au temps nécessaire pour qu'une particule se déplace de son diamètre.

L'écoulement est décrit par les nombres adimensionnels suivant : le nombre de Reynolds  $Re$ , le nombre de Froude  $Fr$ , le nombre de Richardson  $Ri$  et le nombre de Prandtl  $Pr$

$$Re = \frac{\rho U_R d}{\eta}, \quad Fr = \frac{U_R}{\sqrt{gd}}, \quad Ri = \frac{g\beta T_R d}{U_R^2}, \quad Pr = \frac{\eta c}{k} \tag{5}$$

## 2.2 Description des particules

Les grains sont décrits au moyen de la méthode des éléments discrets (DEM). Cette méthode permet de décrire la dynamique des particules en prenant en compte les interactions locales entre les grains. La dynamique non-régulière des contacts (NSCD) est utilisée pour résoudre les chocs entre particules. La dynamique de la particule  $i$  et l'évolution de température est décrite par les équations suivantes,

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c \tag{6}$$

$$m_i c_{p,i} \frac{dT_i}{dt} = Q_e + Q_c \tag{7}$$

dans lesquelles  $\mathbf{F}_e$  représentent les forces extérieures appliquées aux particules,  $\mathbf{F}_c$  les forces dues aux contacts entre particules,  $c_{p,i}$  la capacité calorifique de la particule  $i$ ,  $Q_e$  la chaleur provenant du fluide et  $Q_c$  la contribution de la chaleur provenant des contacts.

$$\mathbf{F}_e = V_i (\rho_i \mathbf{g} - \nabla p|_{x_i} - \mathbf{f}_i) \quad (8)$$

$$Q_e = -V_i q_i \quad (9)$$

où  $V_i$  et  $\rho_i$  sont respectivement le volume et la densité de la particule. La densité de force entre le grain et le fluide est noté  $\mathbf{f}_i$ .

### 2.2.1 Dynamique non-régulière des contacts

La résolution d'un choc est réalisée en cherchant l'impulsion nécessaire au contact afin d'éviter toute superposition entre les particules à la fin du choc. Cette condition est résumée par la condition de Signorini [16]. Le frottement tangential est quant à lui modélisé par la loi de Coulomb. Afin d'obtenir la convergence du réseau de contact, une procédure de Gauss-Seidel est utilisée [10]. Chaque contact satisfait localement les équations suivantes,

$$M(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) = \mathbf{p}, \quad \text{Dynamique du choc} \quad (10)$$

$$(\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \text{Condition de Signorini} \quad (11)$$

$$\|\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\| \leq \mu |\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}|, \quad \text{Loi de frottement de Coulomb} \quad (12)$$

La dynamique du choc lie la vitesse relative après le choc  $\mathbf{v}^+$  à la vitesse relative  $\mathbf{v}^-$  précédent celui-ci. Cette dernière est communément appelée la vitesse libre car obtenu précédant l'application de la contrainte de Signorini. Cette contrainte stipule que les deux corps rigides liées au contact ne peuvent être superposer à la fin du choc. Enfin, la troisième équation décrit la frottement de Coulomb. L'impulsion tangentielle est bornée proportionnellement à l'impulsion normale.

## 2.3 Couplage multi-phase

Le rapport d'échelles entre la résolution du fluide et des particules conduit à introduire des corrélations afin de décrire les transferts de quantité de mouvement et de chaleur entre les deux phases. Par le principe d'action-réaction, le transfert de quantité de mouvement, respectivement de chaleur, exercé depuis le fluide sur les particules est liée au transfert local [17] par

$$\mathbf{f} = \sum_{i \in \mathcal{P}} \mathbf{f}_i \delta|_{\mathbf{x}_i}, \quad (13)$$

$$q = \sum_{i \in \mathcal{P}} q_i \delta|_{\mathbf{x}_i}, \quad (14)$$

dans lesquels l'ensemble des particules dans l'écoulement est décrit par l'ensemble  $\mathcal{P}$ . La fonction de Dirac estimée sur la particule est indiquée par  $\delta|_{\mathbf{x}_i}$ .

Afin de décrire la paramétrisation de la force de traînée et de la convection forcée, il est utile de rappeler leur description par les nombres adimensionnels associés. En se basant sur l'analogie de Reynolds une corrélation du nombre de Nusselt associé à une particule au sein d'une suspension est proposée. Cette corrélation est comparée avec des mesures expérimentales issues de la littérature.

Le coefficient de traînée  $C_D$  quantifie l'impact de la force de traînée dans l'écoulement. Il mesure le rapport entre la force  $F_d$  et de la pression dynamique  $\frac{1}{2}\rho U_R^2$ .

$$C_D = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho U_R^2 \mathcal{A}}, \quad (15)$$

où  $\mathcal{A}$  est l'aire projeté de la particule,  $\mathcal{A} = \pi d^2/4$ .

L'analogie de Reynolds étendue à un nombre de Prandtl non-unitaire permet d'établir le lien entre le coefficient de traînée  $C_D$  et le nombre de Nusselt associé à une particule. Duan & Duan [18] propose de décrire le lien entre ces deux nombres par la relation suivante,

$$\text{Nu} \triangleq \frac{q_w d}{kT_R} \approx \frac{1}{f(\text{Re})} \frac{C_D}{12} \text{RePr}^{0.4} \quad (16)$$

où la fonction  $f(\text{Re})$  est une correction afin de rendre l'analogie valable à une large plage de nombre de Reynolds. Cette fonction est donnée par

$$f(\text{Re}) = 1 + \frac{0.11 \text{Re}^{1.4}}{\text{Re} + 500}, \quad (17)$$

Afin d'étendre la corrélation aux suspensions, il est nécessaire de prendre en compte l'effet de la présence des particules sur le transfert de chaleur. Pour ce faire, deux modifications sont nécessaires. En premier lieu, le Reynolds effectif dans la suspension est altéré par la fraction volumique de fluide la porosité  $\epsilon$ . Il s'en suit donc que les corrélations sont définies en fonction du nombre de Reynolds effectif  $\text{Re}_\epsilon$ . Dans un second lieu, la présence de particules avoisinantes augmente le transfert de quantité de mouvement, respectivement de chaleur, au sein de la suspension. La modélisation de ce phénomène se fait par l'introduction d'une fonction de pore [13] développé initialement pour le transfert de quantité de mouvement. La fonction de pore proposée par Wen-Yu [19], couvrant un large régime pour des écoulements granulaires denses et fluidisés, suit une loi de puissance,

$$g(\epsilon) = \epsilon^{-1.8+0.65 \exp(-\frac{1}{2}(1.5-\log(\text{Re}_\epsilon))^2)} \quad (18)$$

Il est important de rappeler que le choix de la fonction de pore n'est pas unique, de nombreux raffinements existe dans la littérature. En utilisant la corrélation de Dallavalle [7] afin d'estimer le coefficient de traînée  $C_D$ , le nombre de Nusselt associé est le suivant,

$$C_D = g(\epsilon) \left( 0.63 + \frac{4.8}{\text{Re}_\epsilon^{0.5}} \right)^2, \quad (19)$$

$$\text{Nu} = \frac{g(\epsilon)}{f(\text{Re}_\epsilon)} \frac{(0.63 \text{Re}_\epsilon^{0.5} + 4.8)^2}{12} \text{Pr}^{0.4} \quad (20)$$

La corrélation proposée est comparée aux données expérimentales recueillies par Wakao [20] à la figure 2. Les expériences considérées consistent à mesurer le nombre de Nusselt d'une particule dans un lit granulaire chauffé. Dans ce régime dense, la corrélation est en accord avec les mesures expérimentales. Afin de vérifier sa validité dans un régime dilué, le modèle sera étudié dans une expérience de référence proposée par Patil [14].

### 3 Transfert de chaleur sous injection d'air

Cette section est dédiée à la validation du modèle proposée sur une expérience de fluidisation d'un milieu granulaire. L'expérience de Patil [14] est étudiée. Une cellule de Hele-Shaw est considérée dans laquelle un lit granulaire chaud repose. Suite à l'injection d'air froid par la paroi inférieure, une fluidification du milieu granulaire a lieu menant à un refroidissement des particules. Les bulles d'air formées se propagent dans le milieu favorisant le transfert de chaleur. Afin de représenter cette expérience, une simulation bidimensionnelle est réalisée. La dynamique bidimensionnelle est validé par une comparaison entre une simulation tridimensionnelle et les données expérimentales. Le transfert de chaleur est quant à lui validée par la température moyenne des grains au cours de l'expérience, et ce pour les différents régimes d'injection.

La cellule de Hele-Shaw est rectangulaire. La paroi inférieure est poreuse et un flux d'air froid y est imposée. Au centre de la paroi inférieure se situe un bouchon bloquant le flux d'air en ce lieu. Ce flux est supposée uniforme et correspond à imposer une vitesse de  $\bar{v}$  à l'air entrant. Les particules en verre sont initialement au repos et leur température est fixée à  $\bar{T}^s$ . Afin d'éviter une cristallisation, la polydispersité des grains est de  $\Lambda = 1.25$ . La figure 3 illustre la géométrie du problème.

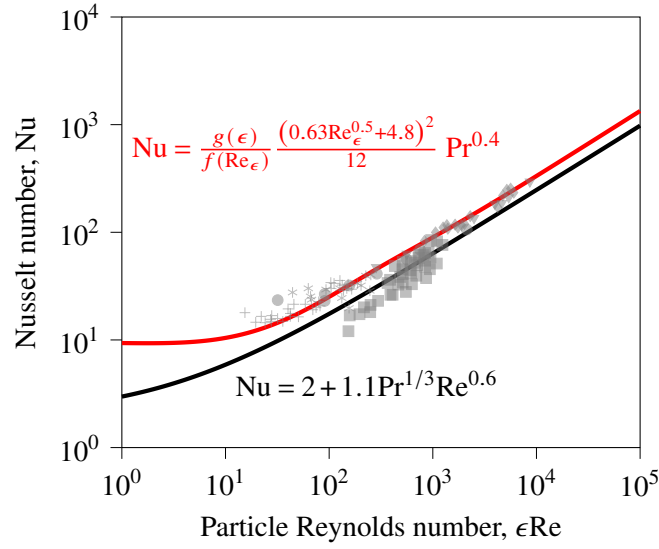
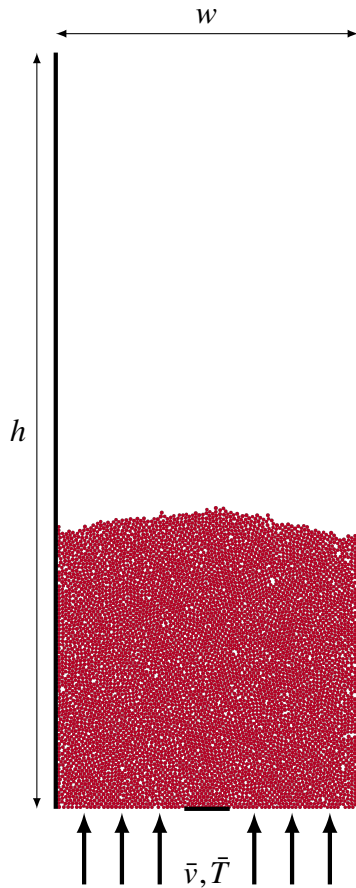


FIGURE 2 – Corrélation du nombre de Nusselt associé à une particule dans un lit granulaire chauffé. Le recueil de données expérimentales faites par Wakao [20] sont indiquées par les marqueurs. Une corrélation a été proposée par cet auteur sans tirer profit de l’analogie de Reynolds. Celle-ci est indiquée par la courbe noire. La corrélation proposée sur base de l’analogie de Reynolds est, quant à elle, indiquée par la courbe rouge.



Propriétés du fluide		
$\rho$	1.204	$\text{kg m}^{-3}$
$\eta$	$2 \cdot 10^{-5}$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
$c$	1.010	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	0.025	$\text{J s}^{-1} \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$

Propriétés des grains		
$\rho$	2500	$\text{kg m}^{-3}$
$c$	0.840	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	1.4	$\text{J s}^{-1} \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\mu$	0.3	/

Géométrie		
$h$	0.2500	m
$w$	0.0800	m
$d$	$10^{-3}$	m

Propriétés de la frontière		
$\bar{v}$	1.2, 1.54, 1.71	$\text{m s}^{-1}$
$\bar{T}$	290.15	K
$T_w$	290.15	K
$h_w$	350	$\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$

FIGURE 3 – Illustration de la cellule de Hele-Shaw bidimensionnelle. Les murs sont indiquées par le tracé gras. Un flux entrant d’air froid est imposée sur la paroi inférieure poreuse.

TABLE 1 – Tableau résumant les propriétés matérielles du fluide et des grains. La géométrie ainsi que les paramètres associés au frontière sont également indiqués.

Les résultats de la fluidification sont visibles à la figure 4. Le lit granulaire est fluidisé par l’injection

d'air par la paroi inférieure. Les bulles d'air se propageant dans les grains entraînent ceux-ci dans leurs sillages. Les grains sont principalement refroidi à proximité de la paroi inférieure d'où l'air frais est injectée. A proximité du bouchon, les particules ont moins de mobilités favorisant leur baisse de température. La symétrie du problème s'observe également dans la trajectoire des bulles d'air. Celles-ci ont tendance à se propager vers le centre du domaine créant des cellules de convection [21].

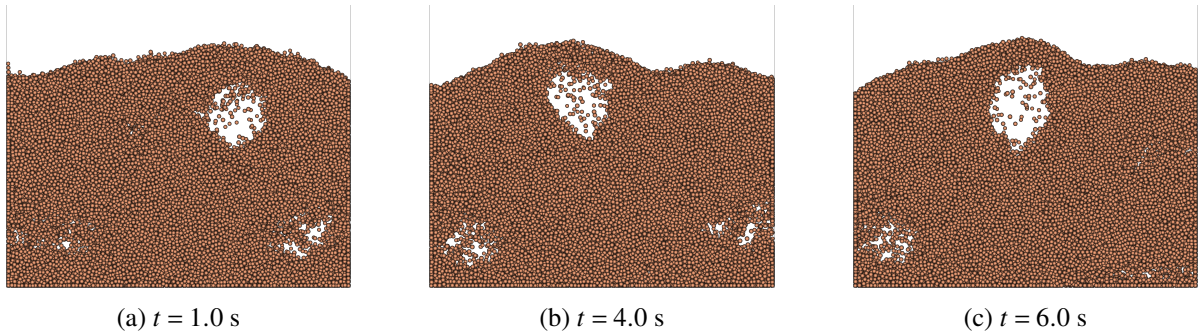


FIGURE 4 – Dynamique des particules pour une vitesse d'entrée de  $\bar{v} = 1.54$  [m/s] pour un lit granulaire de masse  $m = 0.075$  [g].

L'évolution de la température est ensuite étudiée. Les données numériques sont comparées aux données expérimentales provenant de Patil [14]. En particulier, la température moyenne des grains est comparée aux expériences à la figure 5.

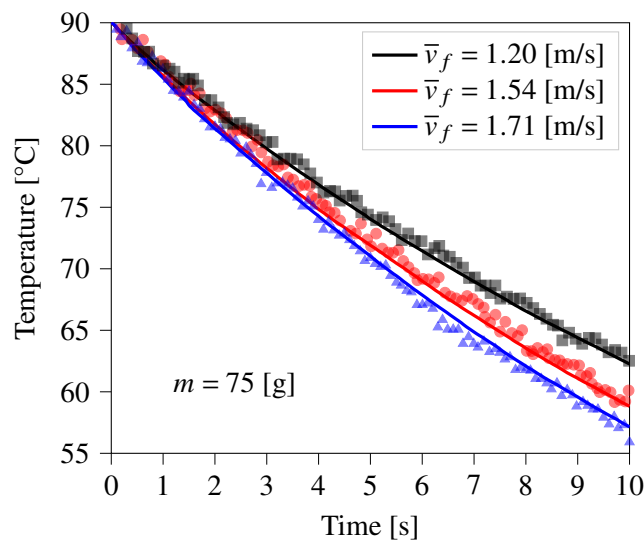


FIGURE 5 – Température moyenne des grains au cours du temps. Les valeurs expérimentales sont issues de Patil [14] et indiqués par les marqueurs. Les résultats de simulations sont indiqués par le trait continu. Les résultats sont en accord avec les données expérimentales pour les différentes vitesses d'entrée 1.20, 1.54, 1.71 [m/s].

## 4 Conclusion

Un modèle multi-échelle est proposé décrivant les transferts de chaleur et de quantité de mouvement entre une phase granulaire et une phase fluide. La modélisation de la phase fluide est faite au moyen de la méthode des éléments finis tandis que la description granulaire est faite par la méthode des éléments discrets. En utilisant l'analogie de Reynolds, une corrélation du nombre de Nusselt au sein des suspensions est proposée. En étudiant la fluidification d'un lit granulaire chaud, la validité du modèle et de la corrélation au régime fluidisé sont étudiées. Le modèle parvient à reproduire avec succès les mesures expérimentales.

## Références

- [1] Yoël Forterre and Olivier Pouliquen. Physics of particulate flows : From sand avalanche to active suspensions in plants. *Comptes Rendus Physique*, 19(5) :271–284, July 2018.
- [2] François Boyer, Élisabeth Guazzelli, and Olivier Pouliquen. Unifying Suspension and Granular Rheology. *Physical Review Letters*, 107(18) :188301, October 2011.
- [3] Stany Gallier, Elisabeth Lemaire, François Peters, and Laurent Lobry. Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 757 :514–549, October 2014.
- [4] Thanh-Trung Vo, Patrick Mutabaruka, Saeid Nezamabadi, Jean-Yves Delenne, and Farhang Radjai. Evolution of wet agglomerates inside inertial shear flow of dry granular materials. *Physical Review E*, 101(3) :032906, March 2020.
- [5] Toni El Geitani, Shahab Golshan, and Bruno Blais. A high-order stabilized solver for the volume averaged Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 95(6) :1011–1033, 2023.
- [6] M. Constant, N. Coppin, F. Dubois, V. Vidal, V. Legat, and J. Lambrechts. Simulation of air invasion in immersed granular beds with an unresolved FEM–DEM model. *Computational Particle Mechanics*, September 2020.
- [7] J. M. DallaValle and Alexander Klemin. *Micromeritics : The Technology of the Particles*. Pitman Publishing Corporation, New York ; Chicago, 1943.
- [8] Shuai Wang, Kun Luo, Chenshu Hu, Junjie Lin, and Jianren Fan. CFD-DEM simulation of heat transfer in fluidized beds : Model verification, validation, and application. *Chemical Engineering Science*, 197 :280–295, April 2019.
- [9] Frédéric Dubois, Vincent Acary, and Michel Jean. The Contact Dynamics method : A nonsmooth story. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(3) :247–262, March 2018.
- [10] Nathan Coppin, Matthieu Constant, Jonathan Lambrechts, Frédéric Dubois, and Vincent Legat. Numerical analysis of the drag on a rigid body in an immersed granular flow. *Computational Particle Mechanics*, pages 1–14, June 2021.
- [11] J Li and D.J Mason. A computational investigation of transient heat transfer in pneumatic transport of granular particles. *Powder Technology*, 112(3) :273–282, October 2000.
- [12] J. Bandrowski and G. Kaczmarzyk. Gas-to-particle heat transfer in vertical pneumatic conveying of granular materials. *Chemical Engineering Science*, 33(10) :1303–1310, January 1978.
- [13] R. Di Felice. The voidage function for fluid-particle interaction systems. *International Journal of Multiphase Flow*, 20(1) :153–159, February 1994.
- [14] A. V. Patil, E. A. J. F. Peters, and J. A. M. Kuipers. Comparison of CFD–DEM heat transfer simulations with infrared/visual measurements. *Chemical Engineering Journal*, 277 :388–401, October 2015.
- [15] T. B. Anderson and Roy Jackson. Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds. Equations of Motion. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 6(4) :527–539, November 1967.
- [16] Michel Jean, Vincent Acary, and Yann Monerie. Non-smooth Contact Dynamics approach of cohesive materials. *Philosophical Transactions of The Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359 :2497–2518, December 2001.
- [17] Matthieu Constant, Frédéric Dubois, Jonathan Lambrechts, and Vincent Legat. Implementation of an unresolved stabilised FEM–DEM model to solve immersed granular flows. *Computational Particle Mechanics*, September 2018.
- [18] Zhipeng Duan and Yuanyuan Duan. Sphere Drag and Heat Transfer. *Scientific Reports*, 5, July 2015.
- [19] C.Y. Wen and H.Y. Yu. Mechanics of fluidization. *Chemical Engineering Progress Symposium Series*, 62 :100–111, 1966.
- [20] N. Wakao and T. Funazkri. Effect of fluid dispersion coefficients on particle-to-fluid mass transfer coefficients in packed beds : Correlation of sherwood numbers. *Chemical Engineering Science*, 33(10) :1375–1384, January 1978.
- [21] Jian Yang, Jing Wang, Shanshan Bu, Min Zeng, Qiuwang Wang, and Akira Nakayama. Experimental analysis of forced convective heat transfer in novel structured packed beds of particles. *Chemical Engineering Science*, 71 :126–137, March 2012.