

Une méthode de réduction de modèle combinatoire pour l'analyse éléments finis des instruments à vent.

M. Jeanneteau^{1,2}, P. Oumaziz¹, J.C. Passieux¹, V. Gibiat^{1,2}, J. Cottier²

¹ Institut Clement Ader (ICA), Université de Toulouse, CNRS-INSA-UPS-ISAE-Mines Albi, Toulouse,

² Henri Selmer Paris,

Résumé — Lors de cette communication nous présentons une démarche de simulation acoustique 3D d'instruments à vent et en particulier le saxophone. Avec des hypothèses de modélisation adaptées à ce type d'instrument couplées à des approches numériques de condensation et de réduction de modèle nous pouvons réduire considérablement les temps de calcul et le besoin en mémoire nécessaire à une simulation complète de l'instrument sur une plage fréquentielle large pour de nombreux doigtés différents.

Mots clés — Acoustique musicale, éléments finis, condensation statique, parallélisme, réduction de modèle.

1 Introduction

Les instruments à vent, et plus particulièrement ceux présentant des cheminées avec des clés ou des trous sont des objets complexes. Modélisés classiquement par un système couplé d'excitateur-résonateur ils sont constitués en deux grandes parties : un oscillateur mécanique (lèvres ou anches) et une cavité résonante (volume d'air contenu dans l'instrument). Le saxophone présente de nombreuses configurations différentes pour un même instrument : les nombreuses combinaisons de clés ouvertes ou fermées (environ une cinquantaine de doigtés différents) permettent de jouer toute une variété de notes. Les musiciens professionnels ont une sensibilité très précise à la justesse de ces notes et sont capables de distinguer des écarts en fréquence jusqu'à 5 cents (entre 0.4Hz et 3Hz en fonction de la fréquence). Cette précision extrême est une problématique majeure pour la conception en facture instrumentale qui reste jusqu'à aujourd'hui principalement empirique et expérimentale [7, 1]. Ainsi la conception d'un nouvel instrument représente généralement plusieurs années.

L'objectif pour ce type d'industrie est de réduire les coûts et les temps de développement des instruments en se basant sur la simulation numérique des instruments. Certaines propriétés musicales comme l'harmonicité, le timbre, la facilité d'émission peuvent être quantifiées en étudiant l'impédance d'entrée de la cavité résonante. Actuellement des simulations 3D hautes fidélités de l'instrument complet restent incompatibles avec les temps de développement. En effet, résoudre le problème d'acoustique harmonique par éléments finis en prenant en compte des effets dissipatifs sur toute la plage fréquentielle demande de résoudre des milliers de systèmes à plusieurs millions de degrés de liberté. En considérant l'ensemble des doigtés cela représente potentiellement plusieurs semaines voire mois de calculs ce qui n'est pas compétitif par rapport à des approches empiriques actuelles.

Des solveurs itératifs haute performance pour le problème de Helmholtz ont été proposés durant ces vingt dernières années : les méthodes FETI-H [4] ou FETI-DPH [5] comme des adaptations de FETI pour ce genre de problème ; ou encore les méthodes de Schwarz optimisées [6, 9] qui semblent finalement être les plus robustes. Cependant notre problème est légèrement différent de celui rencontré dans ces travaux. En effet pour simuler intégralement et précisément un instrument il est nécessaire d'obtenir la réponse acoustique de l'instrument pour une plage large en fréquence en considérant des pas extrêmement fins (des pas de 0.4Hz à 3Hz sur une plage entre 20Hz et 8000Hz par exemple). Cela nécessite des milliers de résolutions en considérant tous les doigtés à déterminer. De plus la large plage fréquentielle conduit à une variation importante du nombre d'onde détériorant ainsi le conditionnement des méthodes itératives [3].

Notre objectif est donc de proposer une approche astucieuse en terme de modélisation et de méthodes numériques pour effectuer dans des temps raisonnables des simulations acoustiques 3D haute fidélité

d'un saxophone. Un travail de réduction de modèle couplé à une approche de condensation statique nous permet de restreindre le domaine d'étude à la seule cavité résonante limitant ainsi le nombre de degré de liberté. Avec un parallélisme adapté nous pouvons également traiter plusieurs plages fréquentielles simultanément.

2 Définition du problème

2.1 Formulation du problème éléments finis

Nous définissons dans cette partie le problème d'acoustique harmonique que nous devons résoudre. Nous considérons un solide rigide $V \in \mathbb{R}^3$ centré à l'origine plongé dans un volume fluide non borné $R = \mathbb{R}^3 \setminus V$. La pression acoustique $p(\mathbf{x})$ en tout point $\mathbf{x} \in R$ est solution du problème harmonique constitué de l'équation de Helmholtz dans le milieu fluide R , des conditions limites sur les bords ainsi qu'une condition de rayonnement à l'infini gouvernée par l'équation de Sommerfeld. Le problème considéré à la pulsation ω est alors le suivant :

$$\text{Trouver } p(\mathbf{x}) \text{ solution de, } \begin{cases} \nabla^2 p + k^2 p = 0 & \forall \mathbf{x} \text{ in } R, \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = -j\rho \omega Y p & \text{on } S_Y, \\ p = p_0 & \text{on } S_p, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} + ikp \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Avec \mathbf{n} la normale sortante du volume solide V sur la surface S , ρ la densité du fluide, c la vitesse du son, k le nombre d'onde, Y une admittance de paroi et $r = \|\mathbf{x}\|$.

Afin de déterminer une solution numérique de type éléments finis, une troncature sphérique du domaine fluide infini est réalisé (Fig. 1). Nous notons Ω le nouveau domaine fluide et Γ son bord extérieur. Nous utilisons une formulation d'ordre 2 de Bayliss-Gunzberger-Turkel sur le bord Γ pour approximer la condition de Sommerfeld. Ainsi l'approximation éléments finis \mathbf{p} de la pression acoustique est solution du système suivant :

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{R}_\omega)\mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

Avec :

$$(\mathbf{K})_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega, \quad (3a)$$

$$(\mathbf{M})_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} N_i N_j \, d\Omega, \quad (3b)$$

$$(\mathbf{C})_{ij} = \int_{S_Y} \rho Y N_i N_j \, dS, \quad (3c)$$

$$(\mathbf{R}_\omega)_{ij} = \int_{\Gamma} B_1 N_i N_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2B_1} \nabla_{\Gamma} N_i \cdot \nabla_{\Gamma} N_j \, d\Gamma, \quad (3d)$$

$N_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions de forme éléments finis, $B_1 = jk + \frac{1}{r}$ et ∇_{Γ} l'opérateur gradient défini en coordonnées sphériques par $\nabla_{\Gamma} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$.

Le système obtenu est creux et symétrique complexe. Il est résolu en considérant une condition de Dirichlet sur le bord $S_p : p(\mathbf{x}) = 1\text{Pa}, \forall \mathbf{x} \in S_p$.

Les opérateurs \mathbf{K} , \mathbf{M} et \mathbf{R}_ω sont linéaires, indépendants de la pulsation pour les deux premier, non-linéairement dépendant de la pulsation pour \mathbf{R}_ω . L'opérateur \mathbf{C} est lui non-linéaire, et contrairement aux autres, ne peut être assemblé une fois pour toutes au début de la simulation.

2.2 Modélisation des pertes thermodynamiques

La dissipation est un phénomène complexe. Parmi les différents modèles existants, nous privilégions le modèle proposé par [2, 8] qui modélise la dissipation par des pertes visco-thermiques aux parois. Ces

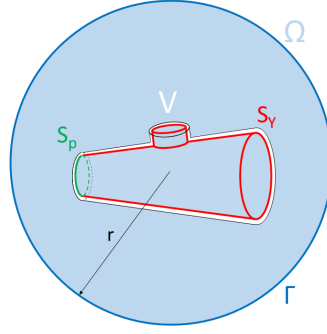


FIGURE 1 – Modèle géométrique borné

perles sont prises en compte par une condition d'admittance qui dépend non-linéairement de la pression acoustique. Cette formulation est de l'admittance $Y(\omega, p)$ s'écrit :

$$Y(\omega, \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{j\omega}{c}} \left[\left(1 - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|} \right)^2 \right) \sqrt{l_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_t} \right], \quad (4)$$

avec $l_v = \frac{\mu}{\rho c}$ et $l_t = \frac{l_v}{Pr}$ qui sont respectivement longueurs caractéristiques visqueuse et thermique, μ la viscosité dynamique, γ le coefficient de chaleur spécifique, Pr le nombre de Prandtl et $\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{j\rho\omega}$ la vitesse acoustique à la pulsation ω .

La non-linéarité est gérée classiquement par un algorithme de point fixe pour lequel l'initialisation est choisie d'une telle façon que la vitesse est tangente à la paroi ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, condition dite "rigide"). Chaque itération permet alors de mettre à jour le coefficient d'admittance jusqu'à convergence. Dans les faits seulement 2 itérations sont effectuées.

2.3 Complexité du problème

La résolution du problème de Helmholtz pour tous les doigts ($N_f \approx 50$ doigts) sur l'ensemble des fréquences d'intérêt ($N \approx 7000$ fréquences) tout en satisfaisant la précision requise pour le musicien professionnel est extrêmement coûteux à la fois en temps mais aussi en mémoire. Cela amène à résoudre plus d'un demi-million de problèmes linéaires contenant potentiellement chacun plusieurs millions de degrés de libertés. Ainsi pour obtenir la réponse complète d'un instrument à vent avec les outils standards utilisés au sein de la facture instrumentale, il faudrait des semaines voire des mois. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, cela explique pourquoi une approche expérimentale et empirique est toujours fortement utilisée.

3 Méthodes numériques développées

L'objectif de notre étude est donc de réduire d'au moins un ordre de grandeur le temps nécessaire pour obtenir la réponse numérique 3D complète d'un instrument. Pour cela nous mettons en oeuvre plusieurs approches à la fois en terme de modélisation et d'implémentation numérique.

3.1 Linéarisation de la condition d'admittance aux parois

Comme montré précédemment l'admittance aux parois est non-linéaire par rapport à la pression acoustique. Ainsi pour chaque fréquence il est nécessaire d'itérer pour prendre en compte cette non-linéarité. Le pas fréquentiel est relativement faible ce qui fait que la solution n'évolue que très peu entre deux fréquences successives. Ainsi, au lieu d'itérer nous faisons le choix de considérer le champ de vitesse $\mathbf{v}_{\omega_{k-1}}$ à la pulsation ω_{k-1} pour calculer le coefficient d'admittance $Y(\omega_k, \mathbf{v}_{\omega_k})$:

$$Y(\omega_k, \mathbf{v}_{\omega_k}) = \frac{1}{\rho c} \sqrt{\frac{j\omega}{c}} \left[\left(1 - \left(\frac{\mathbf{v}_{\omega_{k-1}} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{v}_{\omega_{k-1}}\|} \right)^2 \right) \sqrt{l_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_t} \right] \quad (5)$$

Cela permet d'obtenir un admittance linéaire et nous nous économisons la moitié des résolutions faites jusqu'ici. De plus cela permet de déterminer la matrice d'amortissement **C** une seule fois au début de la simulation.

3.2 Réduction du domaine d'étude adaptée aux spécificités combinatoires des doigtés

Une grosse limitation en terme de nombre de degrés de liberté provient de la gigantesque sphère fluide englobant l'instrument. Nous effectuons alors quelques hypothèses afin de se ramener à un cas plus abordable.

Dans un premier temps nous faisons l'hypothèse que les pertes visco-thermiques sur le bord extérieur de l'instrument sont négligeables. Ainsi les conditions d'admittance y sont transformées en conditions de paroi dite "rigide" ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ à la paroi) et linéaire. Il est donc possible de condenser statiquement tout le volume extérieur au niveau des cheminées pour limiter le domaine d'étude au volume fluide interne à l'instrument. Cela reste cependant encore insuffisant, le volume extérieur étant conséquent, le calcul du complément de Schur en question se révélerait très coûteux à effectuer.

Une seconde hypothèse est de négliger l'interaction acoustique entre les cheminées par l'extérieur. La grande sphère de volume fluide est ainsi remplacée par des sphères plus petites et positionnées au dessus de chaque cheminée (Fig. 2). Ces sphères "aveugles" n'interagissent pas entre elles et la condensation statique de chacune d'entre elles peut être effectuée en parallèle. Ce choix est également motivé par le fait que chaque doigté voit une combinaison différente de cheminées ouvertes et fermées. Alors que dans le cas d'une sphère unique il est nécessaire de recalculer le complément de Schur pour chaque doigté, avec l'hypothèse de sphères aveugles la condensation est faite une seule fois. Ainsi cette approche de sphères aveugles permet de réduire le nombre de condensation à effectuer. En effet il y a moins de cheminées ($H \approx 25$) que de doigtés ($N_f \approx 50$) dans l'instrument, les condensations sont alors moins nombreuses et sur des modèles plus petits. Comme illustré à la Fig. 3, à chaque cheminée ouverte dans un doigté le complément de Schur de la sphère aveugle associée est assemblé à l'opérateur élément finis liés à la cavité résonante.

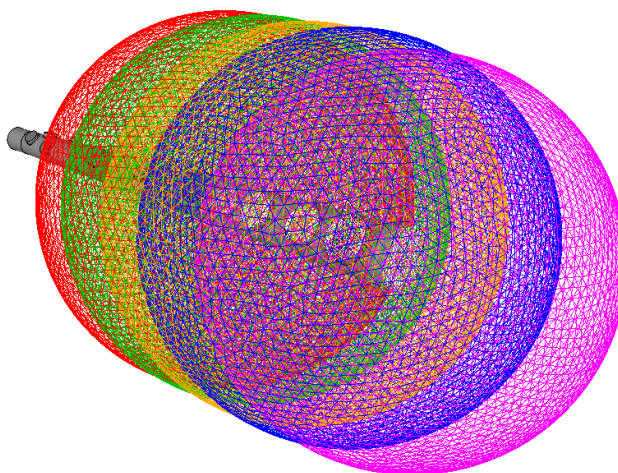


FIGURE 2 – Exemple d'un maillage avec 5 sphères aveugles

Bien que ces hypothèses aient permis de réduire considérablement les coûts numériques cela reste encore trop gourmand en mémoire. En effet stocker l'ensemble des compléments de Schur (matrices denses symétriques pour une interface de quelques centaines de degrés de liberté) des sphères aveugles pour tous les pas en fréquences (pour rappel environ 7000 à effectuer) occupent trop d'espace mémoire.

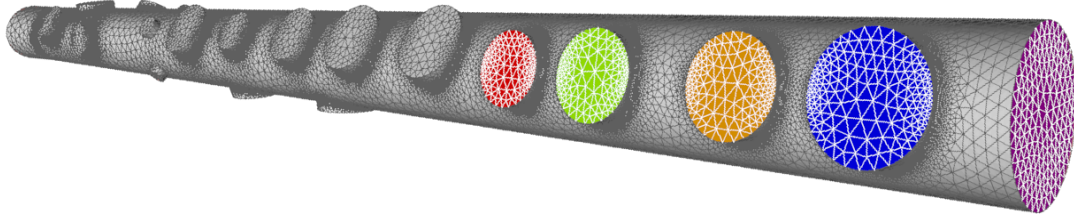
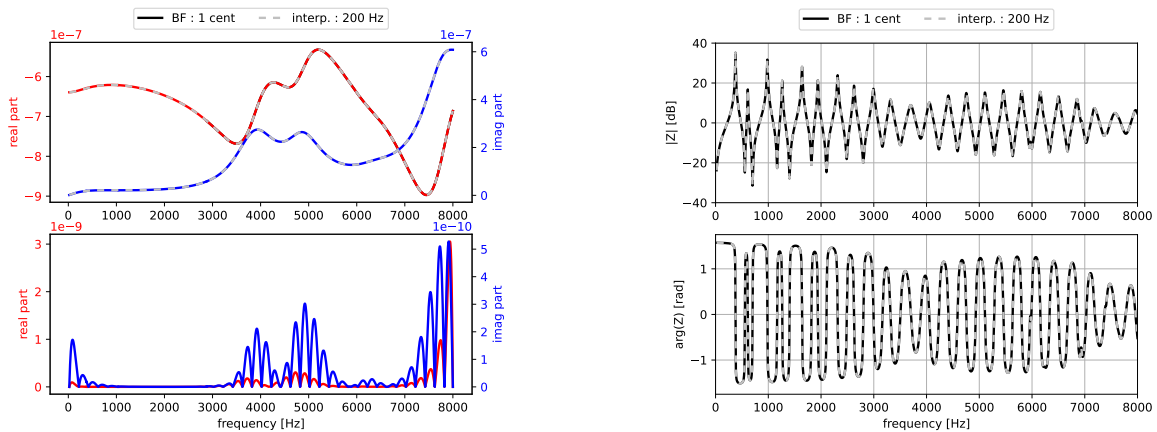


FIGURE 3 – Maillage du corps avec la condensation des sphères aveugles

3.3 Réduction de modèle pour la construction des compléments de Schur

Comme évoqué précédemment le calcul et le stockage de $H \times N$ complément de Schur n'est pas acceptable. L'idée pour réduire considérablement ces besoins numériques est de combiner une approche par interpolation et une approximation de rang faible. Afin d'illustrer les gains potentiels nous considérons un cas académique d'un corps constitué de seulement 2 cheminées dont les maillages associés à leurs sphères aveugles contiennent environ 120k degrés de liberté. Le corps quant à lui comporte 250k degrés de liberté.

Le choix d'interpoler l'évolution fréquentielle du complément de Schur des sphères aveugles est justifié par une évolution très régulière de ses coefficients (Fig. 4a). Au lieu de calculer N compléments de Schur par cheminée, nous pouvons nous restreindre à un nombre beaucoup plus faible n_S et interpoler le reste ($n_S = 41$ pour le cas de la Fig. 4).



(a) Évolution fréquentielle d'un coefficient aléatoire du complément de Schur : (haut) évolution de la partie réelle et la partie imaginaire, (bas) évolution de l'erreur d'interpolation.

(b) Évolution de l'impédance d'entrée

FIGURE 4 – Comparaison entre l'approche sans interpolation avec $N = 7000$ fréquences et l'approche par interpolation avec $n_S = 41$ points d'interpolation (environ tous les 200Hz)

Nous mettons également en place un approximation de rang faible pour limiter le stockage des n_S compléments de Schur. Pour cela nous considérons la matrice \mathbf{U} de taille $m \times n_S$ construite telle que chaque colonne correspond à la partie triangulaire supérieure du complément de Schur à une fréquence donnée. En effectuant une SVD de cet opérateur (Fig. 5) nous nous rendons compte qu'il est possible d'utiliser une SVD tronquée pour représenter à moindre coût l'opérateur \mathbf{U} .

3.4 Parallélisation des résolutions

L'ensemble des outils développés dans ces travaux sont implémentés sous python en faisant appel à la librairie DOLFINx du projet FEniCS. Du MPI est bien évidemment utilisé pour le parallélisme et ce à différents niveaux : à la fois pour la résolution des systèmes linéaires à travers PETSc, mais aussi pour effectuer en parallèle des opérations indépendantes. Par exemple la construction des compléments

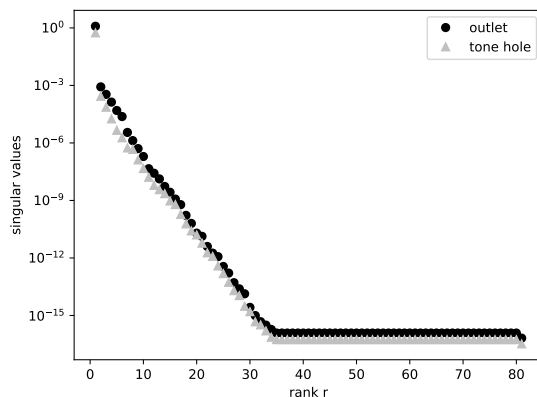


FIGURE 5 – Valeurs singulières pour $n_s = 81$

de Schur des sphères aveugles est parallélisée à deux niveau : un premier communicateur MPI permet de traiter de façon parallèle chaque sphère et un sous-communicateur MPI permet de paralléliser la résolution du système linéaire associé.

Un autre niveau de parallélisme est mis en place lors du calcul de la réponse fréquentielle de l'instrument. L'intervalle de fréquences est divisé en sous-intervalles qui sont traités en parallèle permettant un gain net en terme de temps de calcul.

4 Résultats numériques

Les résultats que nous montrons concerne la simulation d'un corps d'alto à 19 cheminées. Les résultats de simulation sont obtenus sur une plage de fréquence de 20Hz à 8000Hz et seront confrontés à des résultats expérimentaux. Les simulations ont été effectuées sur une machine (Intel(R) Xeon(R) Gold 6230 CPU @ 2.10GHz), avec 2 sockets de 20 CPU - 40 threads chacun, et 126Go de RAM au total.

Le doigté F4 suivant la convention britannique est simulé. La CAO et le maillage sont intégralement gérés et automatisés avec *salome-meca*. Notre approche de condensation des sphères aveugles a permis de diviser par 3 le nombre de degrés de liberté pour n'en avoir seulement que 600k dans le corps de l'instrument. Chaque résolution en fréquence dure environ 30s sur 16 CPU. Les 7070 pas fréquentiels sont répartis en 5 sous-intervalles traités en parallèle. Avec une telle configuration un doigté complet est simulé en 12h.

La Fig. 6 présente les résultats des simulations. Nous confrontons nos résultats numériques à des mesures expérimentales en comparant à la fois l'amplitude mais aussi la phase. Les amplitudes des pics et les fréquences des résonances sont très bien captés à basse fréquence et une différence apparaît progressivement en terme d'amplitude à mesure que la fréquence augmente laissant penser à une sous-estimation de la dissipation dans le modèle. Pour les pics 5 et 6, plus que la pollution numérique, l'écart net sur les amplitudes s'explique par l'utilisation de sphères aveugles, qui néglige la dissipation associée aux interactions acoustiques entre cheminées par l'extérieur de l'instrument. Les résonances 5 et 6 du doigté F4 présentent un ventre de pression au niveau des deux cheminées ouvertes, favorables à ce type d'interaction. Les fréquences de résonances sont pour autant très précisément estimées, toutes sous les 6 cents d'erreur avec les mesures pour les 6 premiers pics.

5 Conclusion et perspectives

Dans ces travaux nous avons présenté des approches intéressantes pour résoudre efficacement le problème de Helmholtz en 3D appliqué aux instruments à vent. A l'aide d'hypothèses de modélisation ainsi que des méthodes numériques adaptées nous pouvons améliorer les performances en terme de mémoire et de temps de calcul de quelques ordres de grandeurs. Le fait de négliger les interactions acoustiques par l'extérieur de l'instrument permet de considérer des sphères aveugles au dessus de chaque cheminées. Couplé à une technique de condensation statique le nombre de degrés de liberté est limité à ceux du

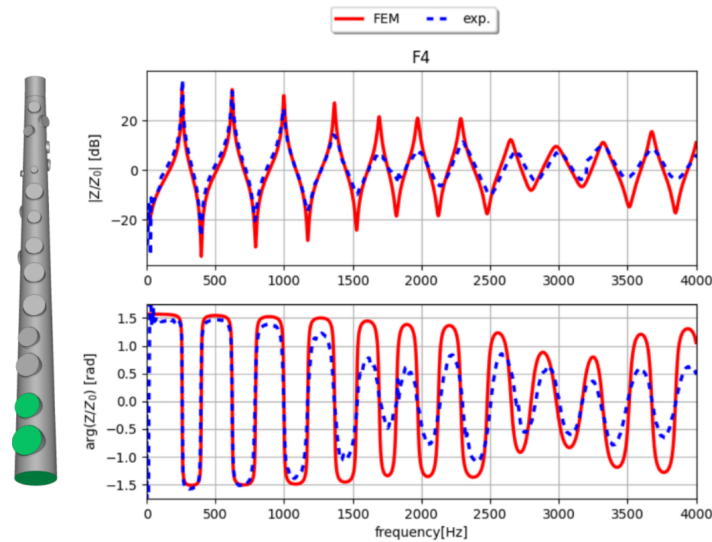


FIGURE 6 – Comparaison de l'impédance d'entrée entre la simulation et les mesures expérimentales pour le doigté F4. Sur la gauche sont représentés les doigtés correspondant (en vert les cheminées ouvertes), sur la droite sont affichés l'amplitude et la phase

corps de l'instrument. Le stockage mémoire est réduit via une technique de réduction de modèle et d'interpolation des compléments de Schur. Finalement des parallélismes bien choisis permettent désormais de simuler des doigtés en des temps compatibles avec les démarches de conception. Lors de la communication nous présenterons également une approche intéressante basée sur la FFD pour réduire encore le nombre de degré de liberté.

Références

- [1] Andrieux B., Cottier J., Selmer J., Gibiat V., *Caractérisation de l'impédance acoustique du couple bec-instrument par l'utilisation d'une méthode mixte mettant en jeu le calcul par éléments finis et la mesure par la méthode TMTC*, VISHNO, 2016.
- [2] Cremer L., *On the acoustic boundary layer outside a rigid wall*, Arch. Electr. Uebertr., 1948.
- [3] Ernst O. G., Gander M.J., *Why it is Difficult to Solve Helmholtz Problems with Classical Iterative Methods*, 325–363, 2012.
- [4] Farhat C., Macedo A., Lesoinne M., Roux F.-X., Magoulès F., La Bourdonnaie dA, *Two-level domain decomposition methods with Lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 213-239, 2000.
- [5] Farhat C., Avery P., Tezaur R., Li J., *FETI-DPH : a dual-primal domain decomposition method for acoustic scattering*, Journal of Computational Acoustics, 499–524, 2005.
- [6] Gander M. J., Zhang H., *A Class of Iterative Solvers for the Helmholtz Equation : Factorizations, Sweeping Preconditioners, Source Transfer, Single Layer Potentials, Polarized Traces, and Optimized Schwarz Methods*, SIAM Review, 3-76, 2019.
- [7] Gibiat V, Laloë F., *Acoustical impedance measurements by the two-microphone-three-calibration (TMTC) method*, Journal of the Acoustical Society of America 1990.
- [8] Lefebvre A., *Computational Acoustic Methods for the Design of Woodwind Instruments*, PhD thesis, 2010.
- [9] Modave A., Royer A., Antoine X., Geuzaine C., *A non-overlapping domain decomposition method with high-order transmission conditions and cross-point treatment for Helmholtz problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020.