

Flambage des coques cylindriques sous pression suiveuse par la Méthode Asymptotique Numérique

P. Ventura¹, H. Azzayani¹, H. Zahrouni¹, M. Potier-Ferry¹,

¹ Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers ParisTech, LEM3, F-57000 Metz, France,
{pascal.ventura,hamza.azzayani,hamid.zahrouni,michel.potier-ferry}@univ-lorraine.fr

Résumé — Dans ce papier, nous allons présenter une simulation numérique du flambage d'une structure élastique mince de type coque cylindrique sous pression suiveuse (ou conservative), par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) et les approximants de Padé. Pour cela, nous considérons une formulation coque, bien adaptée aux structures minces, qui utilise le concept EAS (Enhanced Assumed Strain) et des lois constitutives sans condensation. Des exemples de calculs numériques sont présentés.

Mots clefs — Flambage, Coque cylindrique, Pression suiveuse, Méthode Asymptotique Numérique.

1. Introduction

Cet article revisite le problème des coques cylindriques soumises à un chargement en pression. Curieusement, les travaux en mécanique des structures concernant les problèmes de flambage de coques cylindriques font souvent l'hypothèse d'une pression conservative dont la direction d'application de la force reste parallèle à la direction initiale [1]. Les modes de flambage d'une coque cylindrique soumise à une pression externe sont répartis en un mode axial avec la moitié d'une onde, et en plusieurs modes azimutaux allant d'un mode d'ovalisation ($n = 2$) jusqu'à des modes plus ondulés ($n \geq 4$) et la pression de flambage dépend fortement des conditions aux limites [2][3]. Les références [1][4][5] en présentent une analyse détaillée. L'influence du choix du modèle de coque a été largement étudié et le modèle théorique de Donnell donne la plupart du temps des résultats pertinents à l'exception des modes azimutaux avec de faibles nombres d'onde ($n = 2, 3$). Seul l'article [6] considère des pressions suiveuses et compare des chargements conservatifs et non conservatifs à l'aide d'une analyse de flambage linéaire de coques cylindriques, en trouvant de faibles différences, à part pour le cas de faible valeur du nombre d'onde n .

Les méthodes de continuation sont bien adaptées pour la résolution des problèmes d'instabilité de structures. La technique de base associe un pilotage par longueur d'arc avec l'algorithme itératif de Newton [7][8]. Parmi les techniques de continuation mentionnons tout d'abord la méthode MAN (Méthode Asymptotique Numérique) [9][10][11] et aussi la méthode GPF (Generalized Path-Following) [12][13][14].

Dans cet article, nous avons utilisé la méthode de continuation MAN. Nous étudions la réponse non-linéaire des coques cylindriques (fermées par des disques) sous pression externe. Une simulation numérique combinant les éléments finis coques [9] et la MAN [10][11], nous permet d'étudier l'influence de la pression considérée soit comme un chargement conservatif ou non conservatif [15].

2. Le cadre théorique pour les coques sous pression

Pour modéliser des coques en non-linéaire, nous avons utilisé le cadre théorique présenté par Zahrouni [9]. Les nouveaux développements présentés dans cet article concerneront l'application d'une

pression sur la surface interne ou externe d'une coque cylindrique et les aspects non conservatifs de ce chargement.

2.1. Les équations d'équilibre

Considérons un domaine matériel Ω constitué d'une structure coque et soumise à une pression sur sa surface supérieure (voir la Figure 1).

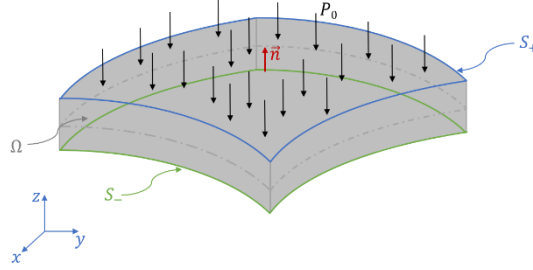


Figure 1 : Coque soumise à une pression sur sa surface externe.

La structure étudiée est une coque cylindrique, fermée par des disques, et soumise à une pression extérieure. Nous supposons que le matériau composant la coque est du type Saint Venant-Kirchhoff, élastique, avec la prise en compte de non-linéarités géométriques. La formulation est Lagrangienne totale, et les grandeurs physiques sont le champ de déplacement mécanique u , le tenseur des déformations de Green-Lagrange γ , et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff S . Nous utilisons une formulation coque proposée par Büchter [16] avec une variation linéaire du déplacement suivant l'épaisseur de la coque (comme dans les formulations classiques de coque) mais incluant une déformation $\tilde{\gamma}$ variant linéairement avec l'épaisseur comme variable additionnelle. Ceci est pris en compte par le concept Enhanced Assumed Strain (EAS) de Simo et Rifai [17]. La déformation $\tilde{\gamma}$ contient seulement la composante $\tilde{\gamma}_{33}$, dépendant linéairement de l'épaisseur, et satisfait une relation d'orthogonalité avec le tenseur S :

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_u + \tilde{\gamma} \\ \int_{\Omega} S : \tilde{\gamma} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ces équations sont complétées par le principe des travaux virtuels (en statique), avec λ le paramètre scalaire de chargement et $P_{pr}(u, \delta u)$ le travail virtuel des forces de pression (la présence de u dans l'expression de P_{pr} traduit l'aspect non conservatif du chargement) :

$$\int_{\Omega} \delta \gamma_u : S d\Omega - \lambda P_{pr}(u, \delta u) = 0 \quad (2)$$

2.2. Une technique de continuation appelée Méthode Asymptotique Numérique

Pour résoudre le problème non-linéaire présenté précédemment quand le paramètre de chargement λ augmente, nous allons utiliser la MAN [10]. Comme cela est très bien décrit dans l'article [9], nous utilisons les variables u , $\tilde{\gamma}$, et S permettant de mettre le système d'équations (1) et (2) sous forme quadratique. La MAN consiste à faire un développement de Taylor en fonction d'un paramètre de chemin a , à l'ordre N :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_0 + a\mathbf{u}_1 + \dots + a^p\mathbf{u}_p + \dots + a^N\mathbf{u}_N \\ \tilde{\gamma}(a) = \tilde{\gamma}_0 + a\tilde{\gamma}_1 + \dots + a^p\tilde{\gamma}_p + \dots + a^N\tilde{\gamma}_N \\ \mathbf{S}(a) = \mathbf{S}_0 + a\mathbf{S}_1 + \dots + a^p\mathbf{S}_p + \dots + a^N\mathbf{S}_N \end{cases} \quad (3)$$

où \mathbf{u}_0 , $\tilde{\gamma}_0$ et, \mathbf{S}_0 sont les valeurs de \mathbf{u} , $\tilde{\gamma}$ et, \mathbf{S} au début de la branche.

Le paramètre de chargement est aussi développé en série de Taylor :

$$\lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + \dots + a^p\lambda_p + \dots + a^N\lambda_N \quad (4)$$

Dans le cadre de la MAN, le rayon de convergence des séries est bien sûr important. Il est habituel (voir [10]) de définir le paramètre a_{\max} , traduisant la longueur maximale des pas pour une précision donnée. Pour cela, nous introduisons un paramètre δ , caractérisant la différence normalisée de la série à des ordres consécutifs. Plus ce paramètre est petit, plus cette différence est petite, et plus la longueur de la branche est petite (typiquement δ prend des valeurs de 10^{-10} , à 10^{-3}). Nous avons ainsi :

$$a_{\max} = \left(\delta \frac{\|\mathbf{U}_1\|}{\|\mathbf{U}_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (5)$$

D'autre part, la partie compatible du tenseur de Green-Lagrange $\gamma_{\mathbf{u}}$ peut se décomposer en une partie linéaire et une partie non-linéaire.

$$\gamma_{\mathbf{u}} = \gamma_{\mathbf{u}}^l(\mathbf{u}) + \gamma_{\mathbf{u}}^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (6)$$

avec, la variation :

$$\delta\gamma_{\mathbf{u}} = \gamma_{\mathbf{u}}^l(\delta\mathbf{u}) + 2\gamma_{\mathbf{u}}^{nl}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (7)$$

De plus, en utilisant les relations (3) et (4), nous pouvons développer $\lambda P_{\text{pr}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ en série de Taylor :

$$\begin{aligned} \lambda P_{\text{pr}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = & A_0(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u}) + A_1(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \lambda_1, \delta\mathbf{u})a + \dots + \\ & A_p(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \delta\mathbf{u})a^p + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Pour la prise en compte des développements en série (3) et (4) dans les systèmes (1) et (2) au différents ordres MAN, il est conseillé de se reporter à [9][10][11].

2.3. La contribution de la pression à la formulation variationnelle

Supposons que la structure coque est soumise à une pression sur sa face supérieure S_+ ou inférieure S_- . De plus, notons le vecteur unitaire normal à la coque dirigé vers S_+ (voir la Figure 1.). Pour simplifier nous allons supposer la pression appliquée sur la face supérieure S_+ . Nous pouvons écrire :

$$\lambda P_{\text{pr}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = -\lambda \int_{S_+} P_0 \mathbf{n}(\mathbf{u}) \cdot \left(\delta \mathbf{v} + \frac{h}{2} \delta \tilde{\mathbf{w}} \right) dS \quad (9)$$

avec h l'épaisseur de la coque, et \mathbf{v} (resp. $\tilde{\mathbf{w}}$) le déplacement du point du plan moyen (resp. de la normale au plan moyen).

De plus, nous pouvons écrire, au niveau d'un élément fini (e) :

$$(ndS)^e = \mathbf{t}^{e\xi} \times \mathbf{t}^{e\eta} d\xi d\eta \quad \text{avec } \mathbf{t}^{e\xi} = \frac{\partial(\text{OM}_0 + \mathbf{u})}{\partial \xi}, \text{ et, } \mathbf{t}^{e\eta} = \frac{\partial(\text{OM}_0 + \mathbf{u})}{\partial \eta} \quad (10)$$

où OM_0 est la position du point courant dans la coque non déformée.

Il est alors possible d'obtenir une expression générale de $\lambda P_{\text{pr}}^e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ quelle que soit la surface (S_+ ou S_-) sur laquelle est appliquée la pression en se ramenant à l'élément fini de référence :

$$\lambda P_{\text{pr}}^e(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = -\lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_0(\mathbf{t}^{e\xi} \times \mathbf{t}^{e\eta}) \cdot \left(\kappa \delta \mathbf{v} + \frac{h}{2} \delta \tilde{\mathbf{w}} \right) d\xi d\eta \quad (11)$$

avec $\kappa = 1$ (resp. -1) si la pression est appliquée sur la surface S_+ (resp. S_-)

2.4. La contribution de la pression dans l'algorithme MAN

Nous allons maintenant introduire les développements en série de Taylor (3-4) dans l'expression (11) de la contribution de la pression à la formulation variationnelle. Définissons tout d'abord les notations :

$$\mathbf{t}^{e\xi}_0 = \frac{\partial(\text{OM}_0 + \mathbf{u}_0)}{\partial \xi}, \quad \mathbf{t}^{e\eta}_0 = \frac{\partial(\text{OM}_0 + \mathbf{u}_0)}{\partial \eta} \quad \text{et pour } n \geq 1, \quad \mathbf{t}^{e\xi}_n = \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \xi}, \quad \mathbf{t}^{e\eta}_n = \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \eta}.$$

En utilisant la formule de Leibniz permettant d'obtenir le développement en série de Taylor du produit de deux fonctions f et g ($(fg)_n = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}$), nous en déduisons la relation

$$\left(\lambda P^{\text{pr},e} \right)_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_{n-k}^{\text{pr},e}, \quad \text{avec } P_n^{\text{pr},e} = -\sum_{k=0}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_0(\mathbf{t}^{e\xi}_k \times \mathbf{t}^{e\eta}_{n-k}) \cdot \left(\kappa \delta \mathbf{v} + \frac{h}{2} \delta \tilde{\mathbf{w}} \right) d\xi d\eta.$$

En identifiant les termes à l'ordre 1 en a dans (8), il en résulte :

$$A_1(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = \lambda_1 f(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u}) + k(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \lambda_1, \delta \mathbf{u}) \quad (12)$$

avec $f(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u})$ une forme linéaire en fonction de $\delta \mathbf{u}$, et $k(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \lambda_1, \delta \mathbf{u})$ une forme bilinéaire en fonction de \mathbf{u}_1 et $\delta \mathbf{u}$.

$$f(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u}) = -\sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_0(\mathbf{t}^{e\xi}_0 \times \mathbf{t}^{e\eta}_0) \cdot \left(\kappa \delta \mathbf{v} + \frac{h}{2} \delta \tilde{\mathbf{w}} \right) d\xi d\eta \quad (13)$$

$$k(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = \lambda_0 \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_0 \left((\mathbf{t}^{e\xi_1} \times \mathbf{t}^{e\eta_0}) - (\mathbf{t}^{e\eta_1} \times \mathbf{t}^{e\xi_0}) \right) \cdot \left(\kappa \delta \mathbf{v} + \frac{h}{2} \delta \tilde{\mathbf{w}} \right) d\xi d\eta \quad (14)$$

Et à l'ordre $p > 1$ on a :

$$A_p(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \delta \mathbf{u}) = \lambda_p f(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u}) + f_p^{\text{nl}}(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{p-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \delta \mathbf{u}) + k(\mathbf{u}_0, \lambda_0, \mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}) \quad (15)$$

Les expressions de $f_p^{\text{nl}}(\dots)$ conduisent à des développements assez longs et sont détaillés dans [15].

2.5. Géométrie, cinématique, et discrétisation élément fini des structures coques

La géométrie et la cinématique de la coque sont représentées sur la Figure 2. En utilisant les coordonnées curvilignes, l'expression du vecteur position \mathbf{x} d'un point de la coque non déformée est :

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (16)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position et \mathbf{a}_3 le vecteur directeur au plan moyen, en un point donné de la surface moyenne. De façon classique, l'épaisseur de la coque étant très faible en comparaison de ses deux autres dimensions, nous allons supposer que le champ de déplacement 3D varie linéairement suivant son épaisseur :

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (17)$$

avec \mathbf{v} le déplacement au niveau du plan moyen, et \mathbf{w} la différence entre le vecteur directeur de la coque déformée et non déformée. Il est possible de trouver les détails concernant la cinématique de la coque ainsi que de l'hypothèse EAS dans les références [9][15][16].

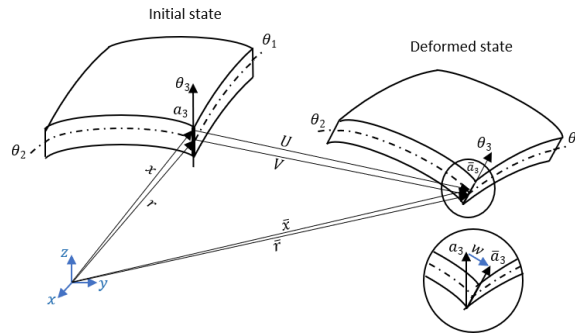


Figure 2 : géométrie et cinématique de la coque

Finalement, pour un élément fini sur lequel est appliqué la pression, à partir de (13), [15], et (14), nous obtenons le vecteur second membre linéaire $\{\mathbf{F}_{\text{pres}}^e\}$ et non-linéaire $\{\mathbf{F}_{\text{pres}}^{\text{nl}e}\}$, ainsi que la matrice tangente $\{\mathbf{K}_{\text{pres}}^e\}$.

3. Les applications numériques

Considérons une structure coque composée d'un cylindre fermé par deux disques. Nous allons, tout d'abord, nous intéresser à une longue structure cylindrique avec un ratio hauteur sur rayon de 12. La longueur totale du cylindre est $L = 120$ mm, le rayon du cylindre est $R = 10$ mm et l'épaisseur de la coque est $h = 0.1$ mm. La pression nominale appliquée sur la structure est $P_0 = 1$ MPa.

Dans le but de mettre en évidence l'importance d'une simulation numérique incluant la nature suivieuse de la pression, nous allons réaliser une simulation complémentaire en supposant la pression conservative. Avec l'aide d'Abaqus, nous avons généré le maillage de la structure coque, défini le matériau avec un module d'Young $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, les conditions de chargement en pression et les conditions aux limites. Une première analyse avec Abaqus du type "linear perturbation step, buckling" nous a permis de calculer les premiers modes de flambage dont certains seront utilisés pour perturber la géométrie initiale de la structure, facilitant ainsi le déclenchement du flambage. Un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe du cylindre permet de ne modéliser que la moitié du cylindre, permettant ainsi d'obtenir les modes symétriques et non symétriques. En ce qui concerne les conditions aux limites, la condition YSYMM prend en compte le plan de symétrie, les déplacements selon x et z sont bloqués au nœud sur l'axe du cylindre (disque supérieur) pour éviter les mouvements de corps solide de translation, et, le déplacement suivant z est bloqué au nœud A (sur la circonférence du disque supérieur) pour éviter les mouvements de corps solide de rotation. La Figure 3 montre le premier et le quatrième mode de flambage. Dans cet article nous allons utiliser seulement une perturbation de la géométrie du premier mode. Des simulations complémentaires présentées en [15] ont utilisé comme perturbation à la fois le premier et le quatrième mode de flambage. Dans le cas d'une perturbation de la géométrie par le premier mode de flambage, la Figure 4 présente la valeur maximale du déplacement suivant x . Nous voyons deux bifurcations sur cette courbe. La première est une bifurcation classique suivant le premier mode de flambage, périodique de période 3, la pression critique étant d'environ $\lambda = 0.16$ dans le cas suiviseur et $\lambda = 0.18$ dans le cas conservatif. Ensuite, une seconde bifurcation est observée, pour une valeur proche de $u_x = 1.3$ mm caractérisée par un virage rapide et une accumulation de petits pas. A noter que la seconde bifurcation n'est pas vue dans les calculs Abaqus.



Figure 3 : premier (a) et quatrième (b) modes de flambage du cylindre fermé par des disques avec un ratio hauteur du rayon de 12.

Une autre description de ces bifurcations est présentée à la Figure 5. Cette figure, en coordonnées polaires, montre pour les pas MAN 16 (a) et 40 (b), le changement du profil de la déformation d'une coupe au niveau du plan de symétrie du cylindre en traçant à la fois la déformée (en bas à gauche) et l'incrément de déformation entre deux pas consécutifs (en bas à droite).

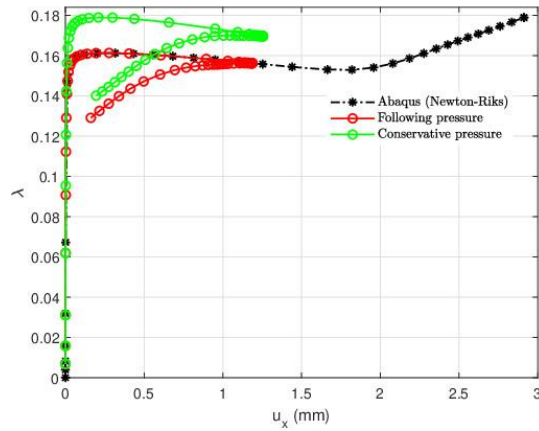


Figure 4 : Déplacement selon x d'un nœud avec une amplitude maximale (choisi sur le plan de symétrie).

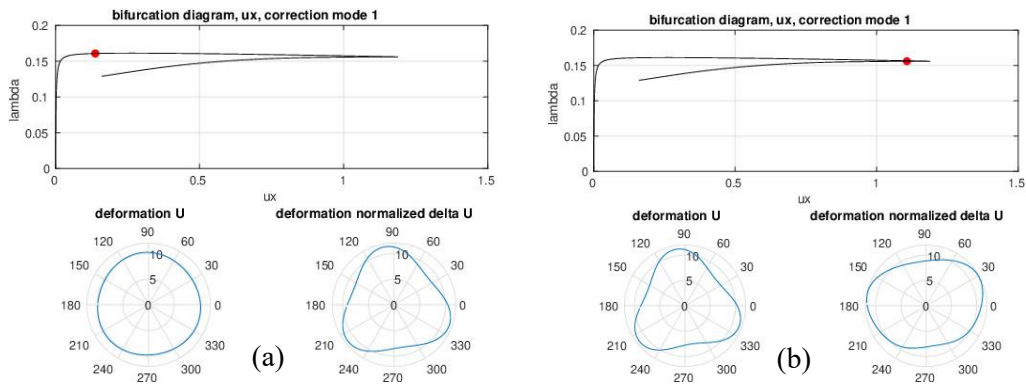


Figure 5 : Déplacement selon x d'un nœud avec une amplitude maximale (choisi sur le plan de symétrie), un point rouge pour le pas 16 (a) et 40 (b).

Celle-ci permet de confirmer que la première bifurcation consiste en une transition entre un état axisymétrique et une structure périodique de période 3, et que la seconde bifurcation effectue une transition entre la structure périodique de période 3 et un mode non symétrique. De plus, nous avons utilisé les approximants de Padé comme indicateur de bifurcation [18]. Le paramètre pertinent pour caractériser le comportement mécanique d'une structure cylindrique coque est le paramètre de Batdorf $Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1-\nu^2}$. La coque cylindrique que nous avons étudiée avec un ratio $L/R = 12$ donne $Z = 13104$. Or, dans le cas d'un paramètre $Z = 364$ correspondant à un ratio $L/R = 2$, les chargements en pression conservatifs ou non conservatifs conduisent à des diagrammes de bifurcation quasiment identiques.

3. Conclusion

Nous avons étudié le flambage d'une coque cylindrique soumise à une pression supposée non conservative à l'aide de la méthode de continuation MAN. Cette méthode de continuation est

performante pour l'analyse des bifurcations. Nous avons comparé le cas d'une pression conservative et suivieuse dans le cas d'un cylindre fermé par des disques. Il apparaît que le paramètre de Batdorf est le paramètre pertinent pour caractériser le flambage des coques cylindriques soumises à la pression. Dans le cas d'un grand paramètre de Batdorf ($Z = 13104$), nous observons une différence de 10% entre une pression conservative et suivieuse, tandis que pour un paramètre de Batdorf faible ($Z = 364$) la différence est quasi nulle. Donc, l'analyse classique du flambage dans l'hypothèse conservatif reste valable pour les structures peu élancées. Les diagrammes de bifurcation ont mis en lumière deux brisures de symétrie, la première d'un mode axisymétrique à un mode de période 3, et la seconde de ce mode périodique vers un mode complètement asymétrique.

Références

- [1] N. Yamaki. Elastic stability of circular cylindrical shells, Elsevier, Amsterdam, 1984.
- [2] L. H. Sobel. Effects of boundary conditions on the stability of cylinders subject to lateral and axial pressures, *AIAA Journal* 2, 1437-1440, 1964.
- [3] R. Abdelmoula, A. Léger. Singular perturbation analysis of the buckling of circular cylindrical shells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 706-729, 27(2008).
- [4] R. Abdelmoula. Flambage des coques cylindriques sous pression : influence des conditions aux limites et des défauts, thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz, 1989.
- [5] N. Debbaneh. Flambage des coques de révolution à méridienne brisée sous pression latérale externe, thèse de doctorat, INSA Lyon, 1988.
- [6] G. J. Simitses, M. Aswani. Buckling of thin cylinders under uniform lateral loading, *Journal of Applied Mechanics*, 827-829, 41 (1974).
- [7] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 529-551, 15 (1979).
- [8] H. B. Keller. Numerical methods in bifurcation problems. *Lectures on Mathematics and Physics*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1987, Springer-Verlag, 1987.
- [9] H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71-85, 175 (1999).
- [10] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. Méthode asymptotique numérique, Hermès-Lavoisier, 2007.
- [11] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. The asymptotic numerical method : an efficient technique for non linear structural mechanics, *Revue Européenne des Eléments Finis*, 281-297, 3 (1994).
- [12] A. Eriksson. Structural instability analyses based on generalized path-following, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45-74, 156 (1998).
- [13] R. M. J. Groh, D. Avitabile, A. Pirrera. Generalised path-following for well-behaved nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 394-426, 331 (2018).
- [14] J. Shen, R. M. Groh, M. Shenk, A. Pirrera. Experimental path following of equilibria using Newton's method. Part II: Applications and outlook, *International Journal of Solids and Structures*, 25-40, 213 (2021).
- [15] P. Ventura, H. Azzayani, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry. Buckling of pressurized cylindrical shells using the Asymptotic Numerical Method, *Journal Thin-Walled Structures*, volume 188, July 2023, 110835.
- [16] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2551-2568, 37 (1994).
- [17] J. Simo, M. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1595-1636, 37 (1990).
- [18] E. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi. Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants, *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, 1987-2012, 60 (12) (2004).