

# Réduction de modèles éléments finis volumiques par des approches volume-coque et volume-poutre ; application aux structures en bois multicouches

J. Paroissien<sup>1,2</sup>, P. Lardeur<sup>1</sup>, M. Oudjene<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Roberval (mécanique, énergie et électricité), Université de Technologie de Compiègne, Centre de recherche de Royallieu, CS 60319, Compiègne, France, [jeanne.paroissien@utc.fr](mailto:jeanne.paroissien@utc.fr), [pascal.lardeur@utc.fr](mailto:pascal.lardeur@utc.fr)

<sup>2</sup> Département de Génie Civil et de Génie des Eaux, Faculté des Sciences et de Génie, Université Laval, Québec (QC), Canada, [jeanne.paroissien.1@ulaval.ca](mailto:jeanne.paroissien.1@ulaval.ca), [marc.oudjene@gci.ulaval.ca](mailto:marc.oudjene@gci.ulaval.ca)

**Résumé** — Cet article présente des modèles éléments finis de poutres et de panneaux multicouches en bois assemblés à l'aide de goujons en bois densifié. À partir d'un modèle volumique considéré comme référence, une méthodologie utilisant une approche volume-poutre pour les goujons et volume-coque pour les lamelles est décrite, ce qui conduit à une réduction significative du nombre de degrés de liberté. Ces modèles sont évalués pour les performances vibratoires des structures assemblées en bois, et sont destinés à être utilisés pour une étude numérique de la variabilité.

**Mots clefs** — Réduction de modèles, volume-poutre, volume-coque, structures en bois, éléments finis

## 1. Introduction

Les structures en bois multicouches sans colle visent à remplacer les structures en bois lamellé-collé et lamellé-croisé en tant qu'alternative plus respectueuse de l'environnement en améliorant leur durabilité et leur recyclabilité. En effet, les colles généralement utilisées dans les structures en bois génèrent des composés organiques volatils qui réduisent la qualité de l'air intérieur et rendent le recyclage difficile. Le confort vibratoire est une préoccupation majeure dans la construction en bois et concerne les vibrations des planchers, qu'ils soient collés ou non. L'activité humaine dans un bâtiment résidentiel ou commercial produit des vibrations gênantes. Cet article porte sur la réalisation de modèles éléments finis de poutre (Figure 1) et de panneau multicouche en bois assemblés par des goujons en bois densifié [1]. Les panneaux sont composés de trois couches de lamelles juxtaposées les unes à côté des autres.



Figure 1 – Poutre multicouche

Bui et al. [2-4] ont réalisé une étude expérimentale et numérique sur les performances vibratoires de ces structures. Cette étude a notamment mis en évidence un niveau de variabilité élevé des fréquences propres, il est donc nécessaire de modéliser cette variabilité dans les modèles éléments finis. Un modèle éléments finis contenant des éléments volumiques, à la fois pour les lamelles et pour les goujons, a été proposé. Ce modèle est satisfaisant en termes de qualité des résultats, mais il est chronophage, notamment dans le contexte de l'évaluation de la variabilité ou de l'optimisation qui demandent un grand nombre de calculs. Des modèles utilisant des éléments de poutre classiques pour les goujons et des éléments de coque classiques pour les lamelles ont été testés par Bui [5]. Ces modèles présentent plusieurs difficultés, notamment en raison de la déformation complexe des goujons et de la géométrie de la structure, et ne sont finalement pas satisfaisants.

Des approches de type volume-coque et volume-poutre ont été développées par Wei et al. [6-8]. Ces approches présentent l'avantage, à partir de maillages utilisant des éléments volumiques, de réduire le nombre de degrés de liberté en appliquant des théories de poutres ou de coques à l'aide de relations cinématiques. Ces approches sont applicables aux poutres et aux panneaux multicouches et permettent de réduire le modèle tout en conservant la géométrie volumique de la structure. L'adaptation des approches volume-coque et volume-poutre aux structures industrielles est une nouveauté.

Dans cet article, nous présentons les modèles éléments finis volumiques de référence d'une poutre et d'un panneau pour l'analyse modale. Puis, pour réduire les modèles des approches volume-poutre et volume-coque sont appliquées. Enfin, une comparaison de la qualité et de l'efficacité des modèles réduits par rapport aux modèles de références volumiques est présentée.

## 2. Modèle éléments finis de référence

### 2.1. Synthèse des résultats expérimentaux

Ci-dessous, sont présentés les résultats expérimentaux de Bui et al. [2-4] qui serviront de base à l'étape de validation des modèles éléments finis par la suite. Les fréquences propres moyennes et leurs coefficients de variation (CV) ont été évalués expérimentalement pour les trois premiers modes de flexion sur cinq poutres et cinq panneaux (Tableau 1). Les coefficients de variation mettent bien en évidence le niveau de variabilité élevé du comportement vibratoire de ces structures.

Tableau 1 - Fréquences moyennes expérimentales pour cinq poutres et cinq panneaux

	Poutres multicouches		Panneaux multicouches	
	Fréquence moyenne (Hz)	CV (%)	Fréquence moyenne (Hz)	CV (%)
$f_1$	118.2	6.0	54.5	2.5
$f_2$	281.0	5.3	56.3	8.5
$f_3$	471.1	4.2	110.3	3.0

### 2.2. Description des modèles éléments finis

Les modèles numériques pour les poutres et les panneaux sont développés en suivant la méthode de Vérification et Validation [9]. Les calculs éléments finis sont réalisés à l'aide du logiciel Abaqus/Standard®, et l'élément volumique hexaédrique à vingt nœuds avec intégration réduite (C3D20R d'Abaqus) est exploité. Après avoir testé plusieurs éléments volumiques, l'élément C3D20R est le plus efficace pour la convergence des fréquences propres et permet de minimiser la taille des modèles. Comme les modèles éléments finis doivent être aussi proches que possible de la réalité physique, des hypothèses basées sur des observations expérimentales [2] relatives à la connexion entre les différentes parties sont faites. D'une part, il n'y a pas d'interactions ni entre les couches ni entre les lamelles d'une même couche. D'autre part, étant donné que les goujons sont en bois densifié et tendent à s'expandre, une adhérence parfaite est considérée. Comme les maillages des lamelles et des goujons ne sont pas coïncidents à leurs interfaces, l'interaction entre les goujons et les lamelles doit être modélisée, l'option "Tie" dans Abaqus est choisie. Les propriétés mécaniques des lamelles de chêne

viennent des résultats expérimentaux de Bui et al. [2] pour la densité et le module longitudinal. Pour toutes les autres propriétés, des relations empiriques tirées du livre de Jodin [10] sont utilisées. Pour l'épicéa densifié qui constitue les goujons, les propriétés ont été identifiées en utilisant un problème quasi-inverse par Bouhala et al. [11]. Les propriétés mécaniques élastiques sont présentées dans le Tableau 2.

Tableau 2 - Propriétés mécaniques élastiques pour les lamelles (en chêne) et les goujons (en épicéa densifié)

	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$E_3$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$G_{13}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
<b>Chêne [2], [10]</b>	11 380	1 045	1 871	977	1 275	361	0.40	0.32	0.43
<b>Epicéa densifié [11]</b>	26 000	1 033	1 082	800	800	100	0.41	0.41	0.37

### 2.3. Vérification des modèles éléments finis

Pour l'étape de Vérification, une solution très précise est obtenue avec un maillage fin. Pour la poutre, les résultats de l'étude de convergence présentés dans la Figure 2a conduisent à un maillage optimal d'environ 13 000 éléments et 220 000 degrés de liberté. Ce modèle est décrit dans la Figure 3a. Il est important de noter que dans les goujons, aussi bien pour la poutre que le panneau, le maillage est raffiné près des interfaces entre les lamelles, puisque le gradient des contraintes est élevé dans ces zones. Pour le panneau, l'étude de convergence illustrée dans la Figure 2b conduit à un maillage optimal d'environ 86 000 éléments et 1 500 000 degrés de liberté. Ce maillage est présenté dans la Figure 3b.

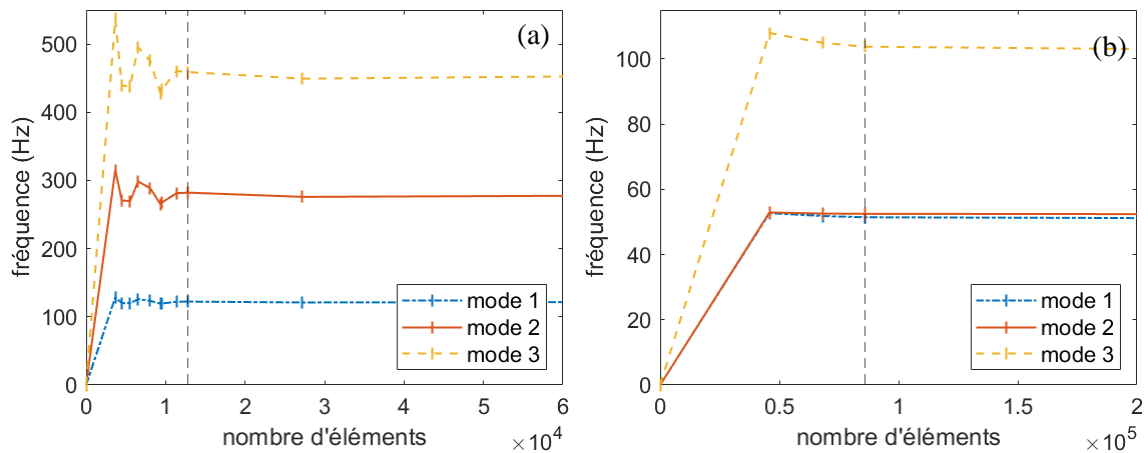


Figure 2 – Etudes de convergence pour les modèles éléments finis : (a) poutre, (b) panneau

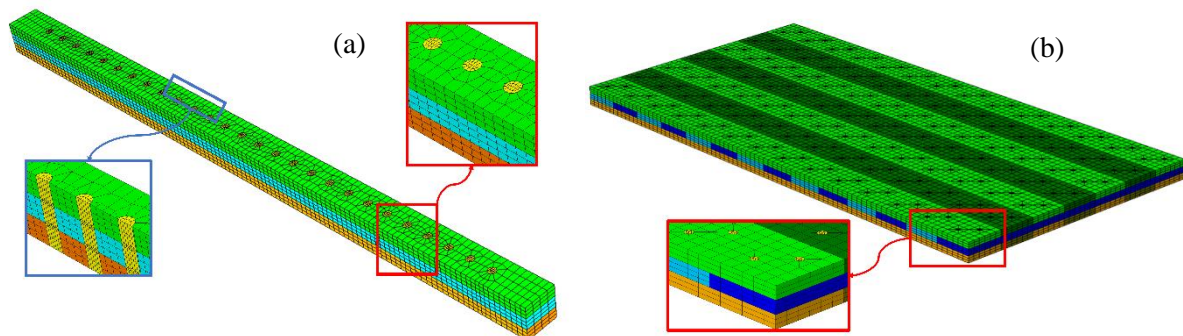


Figure 3 – Modèles éléments finis volumique de référence : (a) poutre, (b) panneau

## 2.4. Validation des modèles éléments finis

L'étape de Validation compare les résultats numériques obtenus avec le modèle élément fini vérifié (issu de l'étape de Vérification précédente) et les résultats expérimentaux. Comme indiqué dans la section 2.1, nous considérons trois fréquences correspondant aux trois premiers modes de flexion illustrés dans la Figure 4 pour la poutre et dans la Figure 5 pour le panneau. Ici, la validation ne concerne que le comportement moyen des structures, donc les fréquences numériques sont comparées aux fréquences expérimentales moyennes. Les résultats sont présentés dans le Tableau 3 pour la poutre et dans le Tableau 4 pour le panneau.

Tableau 3 – Poutre multicouche - Comparaison des fréquences propres numériques et des fréquences propres expérimentales moyennes [2]

	Fréquences expérimentales moyennes	Fréquences numériques	Différence
$f_1$	118.2 Hz	119.1 Hz	0.8 %
$f_2$	281.0 Hz	278.2 Hz	-1.0 %
$f_3$	471.1 Hz	459.6 Hz	-2.4 %

Tableau 4 - Panneau multicouche - Comparaison des fréquences propres numériques et des fréquences propres expérimentales moyennes [2]

	Fréquences expérimentales moyennes	Fréquences numériques	Différence
$f_1$	54.5 Hz	54.3 Hz	- 0.4 %
$f_2$	56.3 Hz	55.9 Hz	-0.7 %
$f_3$	110.3 Hz	108.6 Hz	-1.5 %

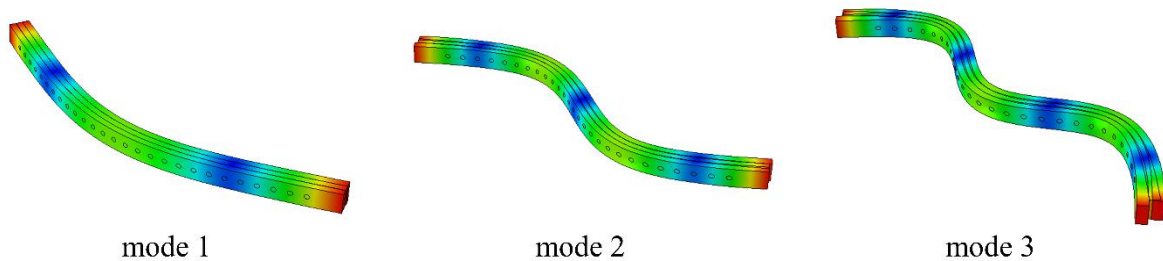


Figure 4 - Déformées modales pour le modèle éléments finis de poutre multicouche

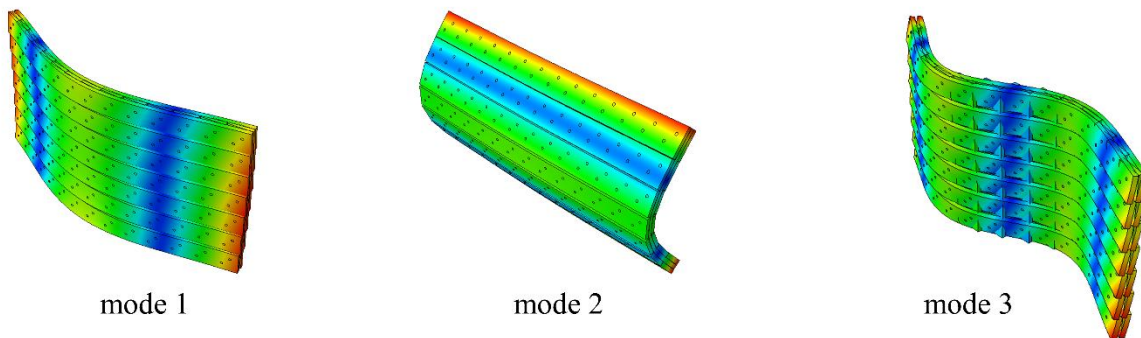


Figure 5 - Déformées modales pour le modèle éléments finis de panneau multicouche

Les résultats numériques et expérimentaux concordent bien à la fois pour la poutre et le panneau. Les faibles erreurs entre les fréquences numériques et expérimentales démontrent que les hypothèses d'interaction adoptées sont pertinentes, même si elles peuvent être remises en question compte tenu de

la complexité de la physique impliquée dans les connexions. Ces modèles éléments finis sont de grande taille, en particulier pour le panneau. Afin de réduire la taille du modèle, une nouvelle méthodologie basée sur des approches volume-poutre et volume-coque spécifiques a été développée.

### 3. Approches volume-coque et volume-poutre

#### 3.1. Principe des approches volume-coque et volume-poutre proposées

Les approches volume-poutre et volume-coque utilisées pour construire un modèle réduit exploitent une méthodologie qui a été initialement développée par Wei et al. [6-8]. La structure est d'abord modélisée avec des éléments finis volumiques puis les théories de poutre ou de coque sont appliquées directement sur ces éléments volumiques. Il est tout à fait possible de mélanger les approches volume-poutre et volume-coque dans une même pièce, et même de garder localement des zones non traitées, où la théorie volumique est appliquée. Le concept de degrés de liberté maîtres et esclaves est utilisé, des relations linéaires entre les degrés de liberté maître et les degrés de liberté esclaves sont appliquées pour éliminer ces derniers. Ce processus modifie le système d'équations algébriques et conduit à une réduction de la taille du modèle par rapport au modèle volumique de référence. Un programme MATLAB© produit l'ensemble des équations linéaires, ces équations sont introduites à l'aide du mot-clé « \*EQUATION », dans le fichier d'entrée Abaqus. Ici, la théorie des coques est utilisée dans l'épaisseur des lamelles et la théorie des poutres dans les sections des goujons. Des théories de premier ordre modifié, ainsi que des théories d'ordre supérieur, peuvent être prises en considération. Dans cet article, seules les théories d'ordre supérieur sont présentées.

#### 3.2. Approche volume-coque dans les lamelles

Pour les lamelles, le champ de déplacement de coque décrit dans l'équation (1) a été exploité par Wei et al. [7], en utilisant les théories de Reissner [12] et Lo et al. [13]. Le champ de déplacement est cubique à travers l'épaisseur pour  $u$  et  $v$ , et quadratique pour  $w$ . Les coefficients dans l'équation (1) sont identifiés en appliquant ce champ aux quatre nœuds maîtres. Ensuite, ce champ de déplacement est appliqué aux degrés de liberté des nœuds esclaves qui sont alors éliminés. L'emplacement dans l'épaisseur des lamelles des degrés de liberté maîtres et esclaves est décrit dans la Figure 6.

$$\begin{cases} u(z) = z^3 a_1 + z^2 a_2 + z a_3 + a_4 \\ v(z) = z^3 b_1 + z^2 b_2 + z b_3 + b_4 \\ w(z) = z^2 c_1 + z c_2 + c_3 \end{cases} \quad (1)$$

Figure 6 – Position des nœuds maîtres et des nœuds esclaves pour l'approche volume-coque d'ordre supérieur

#### 3.3. Approche volume-poutre dans les goujons

Pour les goujons, le champ de déplacement de poutre de l'équation (2) a été développé en modifiant le champ de déplacement d'ordre supérieur pour les poutres à section rectangulaire proposé par Wei et

al. [6]. Le champ de déplacement est développé ici spécialement pour les poutres à section circulaires et est analogue à celui décrit par Huang et al. [14]. Le champ de déplacement dans l'équation (2) est appliqué à travers la section transversale de chaque goujon. La distribution est cubique pour  $u$  (déplacement longitudinal) et quadratique pour  $v$  et  $w$  (déplacements transversaux). Le même principe d'utilisation des degrés de liberté maîtres et esclaves est appliqué à nouveau. La Figure 7 décrit l'emplacement dans la section des goujons des degrés de liberté maîtres et esclaves.

$$\begin{cases} u(y, z) = y^3 a_1 + z^3 a_2 + yz^2 a_3 + zy^2 a_4 + ya_5 + za_6 + a_7 \\ v(y, z) = y^2 b_1 + z^2 b_2 + yzb_3 + yb_4 + zb_5 + b_6 \\ w(y, z) = y^2 c_1 + z^2 c_2 + yzc_3 + yc_4 + zc_5 + c_6 \end{cases} \quad (2)$$

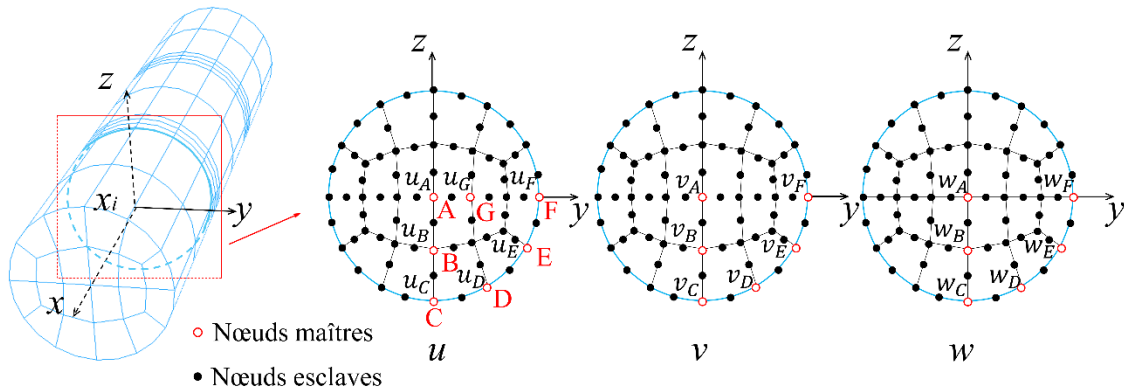


Figure 7 – Position des nœuds maîtres et des nœuds esclaves pour l'approche volume-poutre d'ordre supérieur

## 4. Résultats avec les modèles réduits

Les modèles de référence volumiques respectivement pour la poutre et le panneau, sont ceux décrits dans la section 2. Les modèles réduits pour la poutre et le panneau sont développés en utilisant la méthodologie présentée dans les sections 3.2 et 3.3. Dans cet article, nous présentons des modèles réduits avec l'approche volume-coque d'ordre supérieur qui est appliquée dans l'épaisseur des lamelles. Pour les goujons, l'approche volume-poutre d'ordre supérieur est appliquée dans les sections, excepté au niveau de l'interface des lamelles (zones dont le maillage est raffiné, voir Figure 2a). Dans ces zones, le comportement est tridimensionnel et par conséquent, la théorie volumique est conservée. Dans la suite de l'article, on compare la qualité des résultats obtenus entre modèles réduits et modèles de référence. Le niveau de réduction de la taille des modèles est également commenté.

### 4.1. Résultats pour le modèle réduit de poutre multicouche assemblée par des goujons

Le Tableau 5 compare, pour la poutre, les fréquences propres numériques obtenues avec les modèles éléments finis de référence et réduit. La différence entre les deux modèles est faible, la valeur maximale observée pour la fréquence la plus élevée reste inférieure à 1%. Les valeurs de MAC, toutes égales à 1 montrent que les déformées modales sont identiques. Les niveaux de réduction obtenus grâce aux approches volume-coque et volume-poutre sont donnés dans le Tableau 6. Le nombre d'opérations élémentaires et le nombre de degrés de liberté sont réduits de façon très significative.

Tableau 5 – Poutre multicouche - Comparaison des fréquences propres et des modes propres entre modèle de référence et modèle réduit

	Modèle de référence	Modèle réduit	Différence	MAC
$f_1$	119.1 Hz	119.4 Hz	0.3 %	1.00
$f_2$	278.2 Hz	279.6 Hz	0.5 %	1.00
$f_3$	459.6 Hz	480.7 Hz	0.6 %	1.00

Tableau 6 - Poutre multicouche - Comparaison des tailles du modèle de référence et du modèle réduit

	Modèle de référence	Modèle réduit	Réduction
<b>Nombre de degrés de liberté</b>	221 220	120 165	46 %
<b>Nombre d'opérations élémentaires</b>	$1.34 \times 10^{11}$	$3.49 \times 10^{10}$	73 %

#### 4.2. Résultats pour le modèle réduit de panneau multicouche assemblé par des goujons

Le Tableau 7 compare, pour le panneau, les fréquences numériques obtenues avec les modèles éléments finis de référence et réduit. Comme pour la poutre, les fréquences obtenues avec les modèles réduit et volumique sont très proches les unes des autres avec une différence maximale inférieure à 1%. De même, les valeurs de MAC toutes égales à 1 montrent que les déformées modales sont identiques. La comparaison de la taille des modèles et du coût de calcul est résumée dans le Tableau 8. Le nombre de degrés de liberté et le nombre d'opérations élémentaires sont à nouveau réduits très significativement.

Tableau 7 – Panneau multicouche - Comparaison des fréquences propres et des modes propres entre modèle de référence et modèle réduit

	Modèle de référence	Modèle réduit	Différence	MAC
$f_1$	54.3 Hz	54.6 Hz	0.6 %	1.00
$f_2$	55.9 Hz	56.0 Hz	0.2 %	1.00
$f_3$	108.6 Hz	109.3 Hz	0.6 %	1.00

Tableau 8 - Panneau multicouche - Comparaison des tailles du modèle de référence et du modèle réduit

	Modèle de référence	Modèle réduit	Réduction
<b>Nombre de degrés de liberté</b>	1 460 256	685 692	53 %
<b>Nombre d'opérations élémentaires</b>	$1.49 \times 10^{12}$	$3.47 \times 10^{11}$	77 %

Le niveau de réduction est comparable pour les modèles de poutre et de panneau. Cependant, pour le panneau en bois assemblé, la taille du modèle numérique est beaucoup plus importante. Par conséquent, réduire la taille du modèle est encore plus intéressant dans ce cas, en particulier pour une évaluation de la variabilité ou pour appliquer des techniques d'optimisation.

#### 4.3. Critère de choix des théories

Pour les modèles réduits développés dans cette étude, le choix des théories pour les lamelles et les goujons, qu'il s'agisse de théories de coques, de poutres ou volumiques, a été fait de manière heuristique. Un critère de choix de théorie calculé automatiquement et reposant sur l'analyse de l'état de contraintes en tout point, a été mis au point sur des exemples académiques par Wei et al. [8]. Ce critère permet d'identifier la théorie la plus adaptée (poutre, coque, théorie volumique) dans chaque zone de la structure. Des travaux en cours consistent à appliquer ces critères de choix aux structures en bois considérées ici.

### 5. Conclusion et perspectives

Des modèles éléments finis de poutre et de panneau pour le calcul vibratoire ont été présentés. L'approche de Vérification et de Validation démontre que le modèle de référence, composé d'éléments volumiques, est capable de reproduire correctement les fréquences expérimentales des modes de flexion. Une technique de réduction, basée sur l'application d'approches volume-poutre et volume-coque, a été présentée. Des théories de poutre et de coque d'ordre supérieur ont été exploitées. Les modèles éléments finis réduits permettent d'obtenir des résultats de bonne qualité et une réduction significative de leur taille par rapport aux modèles de référence. Une perspective de cette étude consiste à appliquer un critère de choix de théorie calculé automatiquement. Un autre axe de recherche sera le couplage entre les

modèles réduits et la méthode MSP (Modal Stability Procedure) pour prendre en compte la variabilité dans le calcul par éléments finis. L'investigation approfondie de la confrontation entre la variabilité expérimentale et numérique est également une perspective envisagée.

## Remerciements

Les auteurs remercient la Région Hauts-de-France et le conseil de recherches en sciences naturelles et génie du Canada pour le cofinancement de ce travail.

## Références

- [1] J. Paroissien, T.A. Bui, M. Oudjene et P. Lardeur. Efficient finite element models for adhesive-free multi-layered timber structures, World Conference on Timber Engineering (WCTE), Oslo, 2023.
- [2] T.A. Bui, M. Oudjene, P. Lardeur, M. Khelifa et Y. Rogaume. Towards experimental and numerical assessment of the vibrational serviceability comfort of adhesive free laminated timber beams and CLT panels assembled using compressed wood dowels, *Engineering Structures*, 110586, 2020.
- [3] T.A. Bui, P. Lardeur, M. Oudjene et J. Park. Numerical modelling of the variability of the vibration frequencies of multi-layered timber structures using the modal stability procedure, *Composite Structures*, 115226, 2022.
- [4] T.A. Bui, P. Lardeur et M. Oudjene. Vérification et validation d'un modèle éléments finis pour l'étude vibratoire des structures bois multicouches assemblées par des tourillons, Colloque National en Calcul des Structures (CSMA), Giens, 2019.
- [5] T.A. Bui. Experimental and numerical uncertain vibration analysis of multilayered timber structures assembled using compressed wood dowels, Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2020.
- [6] G. Wei, P. Lardeur et F. Druésne. A new solid-beam approach based on first or higher-order beam theories for finite element analysis of thin to thick structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, 103655, 2022.
- [7] G. Wei, P. Lardeur et F. Druésne. Solid-shell approach based on first-order or higher-order plate and shell theories for the finite element analysis of thin to very thick structures, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 104591, 2022.
- [8] G. Wei, P. Lardeur et F. Druésne. Modélisation adaptative pour l'analyse statique des structures par éléments finis, Colloque national en Calcul des Structures (CSMA), Giens, 2019.
- [9] P. Lardeur, R. Scigliano, et M. Scionti. Verification and validation for the vibration study of automotive structures modelled by finite elements, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, pages 59-72, 2013.
- [10] P. Jodin. Le bois, matériau d'ingénierie, Nancy: Association pour la recherche sur le bois en Lorraine, 1994.
- [11] L. Bouhala, D. Fiorelli, A. Makradi, S. Boulettat, A. Sotayo, D.F. Bradley et Z. Guan. Advanced numerical investigation on adhesive free timber structures, *Composite Structures*, 112389, 2020.
- [12] E. Reissner. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, pages 569-573, 1975.
- [13] K.H. Lo, R.M. Christensen et E.M. Wu. A high-order theory of plate deformation - part 1: homogeneous plates, *Journal of Applied Mechanics*, pages 663-668, 1977.
- [14] Y. Huang, J. Wu, X.F. Li et L. Yang. Higher-order theory for bending and vibration of beams with circular cross section, *Journal of Engineering Mathematics*, pages 91-104, 2013.