

Analyse non linéaire et stochastique d'instabilités dynamiques basée sur les propriétés polynomiales de Tchebychev : application à un système mécanique avec friction.

A.Mercier^{1,2}, L.Jézéquel²

¹ LBMC, Université Lyon 1, {alexymercier}@univ-lyon1.fr

² LTDS, Ecole Centrale Lyon, {alexymercier;louis.jezequel}@ec-lyon.fr

Résumé — Les systèmes mécaniques soumis à des instabilités induites par le frottement présentent des amplitudes vibratoires sensibles aux paramètres incertains. Le choix d'une approche intrusive pour résoudre le problème mécano-stochastique associé, induit des temps de calcul particulièrement longs à cause d'intégration numérique de termes complexes telles que les forces généralisées de nature aléatoires. Une approche intrusive modifiée, basée sur les propriétés des polynômes de *Tchebychev* de seconde espèce, est ainsi proposée dans le but de diminuer les temps de résolution.

Mots clés — Vibrations induites par frottement, Incertitudes, Problème stochastique, Approche intrusive et non intrusive, Polynôme de *Tchebychev* de seconde espèce, Intégration temporelle.

1 Introduction

Il existe de nombreux systèmes mécaniques qui sont soumis à des vibrations induites par frottement [1, 2] lesquelles sont dites auto-entretenues. Les exemples célèbres sont les systèmes de freinage (automobiles [3], aéronautiques [4, 5] ferroviaires [6]) et les embrayages [7, 8], qui ont fait l'objet de nombreuses recherches. Les mécanismes physiques provoquant ces vibrations ont été largement étudiés, notamment le stick-slip [9, 10, 11, 12] et le sprag-slip [13]. L'origine de ces instabilités se situe aux interfaces entre les parties tournantes et fixes de systèmes mécaniques concernés. Le contact unilatéral (décollement) et l'adhérence/glisement avec frottement font partie des phénomènes physiques majeurs à prendre en compte dans la modélisation [14, 15, 16, 17]. L'étude présentée est réalisée sur un modèle phénoménologique incluant les principaux mécanismes physiques liés aux instabilités induites par le frottement et particulièrement le couplage de modes. Des paramètres, tels que la raideur de contact et le coefficient de frottement, qui sont liés à ces mécanismes, présentent des incertitudes qui sont prises en compte avec la théorie probabiliste. Une vision paramétrique est ainsi adoptée comme dans [18]. La méthode du chaos polynomial initiée en 1938 [19] est utilisée dans ces travaux pour obtenir des approximations probabilistes des champs inconnus (déplacements et rotations) du problème mathématique associé. Les polynômes de *Tchebychev* de deuxième espèce sont utilisés pour former la base du chaos polynomial. La fonction poids associée au produit scalaire est une densité de probabilité adaptée étant donné que les valeurs des paramètres sont limitées en ingénierie. La complexité des expressions des forces stochastiques généralisées à l'interface des disques est fortement amplifiée dans le cadre d'une approche intrusive. Le besoin d'effectuer des intégrations numériques pour calculer ces expressions, plusieurs fois par pas de temps, induit des temps de résolution importants. Une modification de l'approche intrusive classique est alors proposée afin de contourner cet écueil. Elle met en avant deux étapes : la première consiste à simplifier les expressions mathématiques des forces et des moments à l'interface des disques rotor et stator en développant des lois de comportement globale liant les variables primales et duales. Les simplifications obtenues sont indispensables pour réaliser la deuxième étape, qui consiste à utiliser certaines propriétés de Polynômes de *Tchebychev* de seconde espèce, dite de "linéarisation" [20, 21, 22, 23], afin de déterminer directement les expressions des efforts stochastiques généralisées sans intégration numérique. Par ailleurs, l'équation du système dynamique dans l'espace d'état associé à l'approche intrusive permet de modifier facilement les paramètres sans dispersion dans le cadre d'une optimisation robuste de système mécanique. Dans le but de comparer les résultats de l'approche intrusive,

une approche non intrusive est également réalisée en effectuant des simulations déterministes.

2 Description du modèle d'étude et principales hypothèses

Le modèle phénoménologique utilisé pour cette étude est présenté en figure (1). Il s'agit d'un système mécanique occupant un domaine Ω dans l'espace euclidien \mathbb{E} durant un intervalle de temps $T = [0, t_{max}] \subset \mathbb{R}$. Le mouvement est mesuré dans le référentiel supposé galiléen désigné par R_0 au moyen du repère cartésien $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$ où $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 . Il est composé d'une poutre d'Euler-Bernoulli de section $S_p = bh$ de longueur L , encastrée au point $O \in \mathbb{E}$, dénommée b . À l'autre extrémité de cette dernière est monté un disque stator, supposé indéformable, dénommé s , de section $S = \pi R^2$ et d'épaisseur e . Le disque stator est en contact avec un disque rotor, supposé indéformable, dénommé r , ayant une vitesse de rotation ω_r autour de la direction x et un déplacement imposé w dans la direction x . Afin de gérer le contact avec frottement à l'interface entre les disques rotor et stator noté $(r - s)$ de domaine Γ_c , un repère cartésien $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1)$ où $\mathcal{B}_1 = (e'_1, e'_2, e'_3)$, est défini. Afin de simplifier le problème mécanique, l'hypothèse des petits déplacements est faite. Parmi les paramètres du modèle, deux présentent des incertitudes : la raideur de contact \varkappa et le coefficient de frottement μ à l'interface $(r - s)$, qui sont indépendants. Par conséquent, deux variables aléatoires associées, notées ξ_1 et ξ_2 contenues dans le vecteur $\xi \in \Theta =]-1, 1[$, sont introduites, telles que :

$$\begin{cases} \varkappa : \xi_1 \in]-1, 1[\mapsto \bar{\varkappa} + \xi_1 \varkappa_d \in \mathbb{R} \\ \mu : \xi_2 \in]-1, 1[\mapsto \bar{\mu} + \xi_2 \mu_d \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

où $\bar{\varkappa}$ (respectivement $\bar{\mu}$) est la valeur moyenne et où \varkappa_d (respectivement μ_d) pour k (respectivement μ). Mathématiquement, le vecteur de variables aléatoires ξ est donné par l'application $\Xi : \omega \in \Omega \mapsto \xi = \Xi(\omega) \in \Theta$, où Ω est un univers inconnu et ω un événement. La mesure de probabilité pour Ξ est notée \mathbb{P}_Ξ et est associée à la densité de probabilité *Tchebychev* de seconde espèce :

$$f_\Xi : \xi \in \Theta \mapsto \frac{4}{\pi^2} \prod_{i=1}^2 \sqrt{1 - \xi_i^2} \in [0, 1] \quad (2)$$

Cette densité de probabilité est très bien adaptée aux problèmes d'ingénierie étant donné que les valeurs des paramètres sont à support borné.

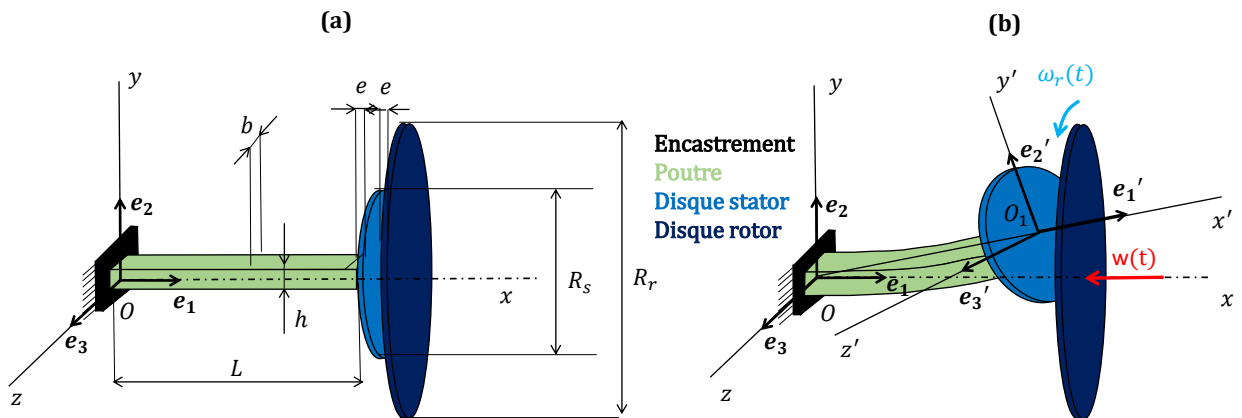


FIGURE 1 – Schéma du système mécanique. (a) Système de l'état initial avec les paramètres géométriques associés. (b) Système en mouvement avec un déplacement w suivant x imposé au disque du rotor tournant autour de x à une vitesse angulaire ω_r .

3 Formulation faible du problème mécano-stochastique

Le formulation faible du problème mécano-stochastique est obtenue en faisant une double projection de *Galerkin*. La première est faite sur les éléments d'une base d'approximation spatiale construite à l'aide

de la méthode de *Rayleigh-Ritz*. La seconde utilise une base d'approximation probabiliste construits à l'aide du chaos polynomial associé à des polynômes de *Tchebychev* de seconde espèce. En écrivant la formulation faible sous forme d'état, le vecteur constitué des coordonnées modales et stochastiques généralisées ainsi que de leurs dérivées temporelles premières, est solution du problème (3) suivant : Trouver $\mathbf{X} : t \in T \mapsto [\mathbf{w}(t) \quad \dot{\mathbf{w}}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, où $n = 2m \in \mathbb{N}^*$, tel que :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = G(\mathbf{X}, \cdot) & \text{dans } T \\ \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 & \text{en } \{0\} \end{cases} \quad (3)$$

avec :

- $\mathbf{G} : (\mathbf{X}(t), t) \in \mathbb{R}^n \times T \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, le champ de vecteurs donnant la variation temporelle de l'état.
- $\mathbf{W}^T : t \in T \mapsto \left\langle \frac{d\Phi^T(L)}{dx} \mathbf{C}(\cdot, t) \middle| \mathcal{H} \right\rangle_{S'_1, S_2} + \langle \Phi^T(L) \mathbf{F}(\cdot, t) \middle| \mathcal{H} \rangle_{S'_1, S_2} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, l'application associée aux efforts stochastiques généralisés où $S_1 = S^{2N}$ et $S_2 = S^{2N \times m}$.

$$= \int_{\Theta} \left(\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\xi}, t) \frac{d\Phi(L)}{dx} + \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\xi}, t) \Phi(L) \right) \mathcal{H} d\mathbb{P}_{\Xi}(\boldsymbol{\xi})$$
- $\Omega^2 = \left\langle E \mathbf{I}_b \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \middle| \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \right\rangle_{\mathcal{R}_w, \mathcal{R}_w} = E \int_{]0, L[} \frac{d^2 \Phi^T}{dx^2} \mathbf{I}_b^T \frac{d^2 \Phi}{dx^2} dx \in \mathcal{M}_{2N, 2N}(\mathbb{R})$, la matrice des pulsations au carré où $\mathcal{R}_w = \mathbb{R}^{2 \times 2N}$.
- $I_p = \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, \mathbf{p}_3) \in \mathbb{N}^4 \mid p_1 \in \{1; 2\}, p_2 \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ et } \mathbf{p}_3 \in I_k\}$, $N \in \mathbb{N}^*$, le premier ensemble d'indices.
- $I_k = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 \mid k_1 \leq n_1 \text{ and } k_2 \leq n_2\}$, le second ensemble d'indices.
- $\tilde{\mathcal{R}}_w \subset \mathcal{R}_w = H_{0,D}^2(]0, L[, \mathbb{R})$ (respectivement $\tilde{S} \subset S$), l'approximation de l'espace de *Sobolev* spatial prenant en compte les conditions aux limites de type *Dirichlet* (respectivement l'espace de *Hilbert* probabiliste).
- $\Phi : \mathbf{x} \in]0, L[\mapsto \begin{bmatrix} \phi_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & \phi_{i1}(\mathbf{x}) & \cdots & \phi_{N1}(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \phi_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & \phi_{i2}(\mathbf{x}) & \cdots & \phi_{N2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2, 2N}(\mathbb{R})$, l'application associée aux fonction propres spatiales dénommées ϕ_{ji} , $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \{1; 2\}$ où $N \in \mathbb{N}^*$, qui sont déterminées avec les conditions aux limites de type mixte pour lesquelles \mathbf{F} and \mathbf{C} sont nulles. Ces fonction propres représentent les premiers modes de flexion de la poutre p dans chaque direction y and z .
- $\mathcal{H} : \boldsymbol{\xi} \in \Theta \mapsto \begin{bmatrix} \text{Diag}_{\mathbf{k}_1}, \cdots, \text{Diag}_{\mathbf{k}_{\text{card}(I_k)}}, \text{Diag}_{\mathbf{k}_1}, \cdots, \text{Diag}_{\mathbf{k}_{\text{card}(I_k)}} \\ \text{Diag}_{\mathbf{k}_1}, \cdots, \text{Diag}_{\mathbf{k}_{\text{card}(I_k)}}, \text{Diag}_{\mathbf{k}_1}, \cdots, \text{Diag}_{\mathbf{k}_{\text{card}(I_k)}} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2N, m}(\mathbb{R})$ où $\text{card}(I_k) = n_1 n_2$, $m = \text{card}(I_p) = 2 \text{card}(I_k) N$ et $\text{Diag}_{\mathbf{k}} = \underbrace{\text{diag}(H_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}), \cdots, H_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}))}_{N \text{ once}}$, $\mathbf{k} \in I_k$, l'application associée à l'approximation probabiliste.
- $\mathbf{w} : T \mapsto [\mathbf{w}_{p_1}(t) \cdots \mathbf{w}_{p_{\text{card}(I_p)}}(t)]^T \in \mathbb{R}^m$, l'application donnant les coordonnées généralisées stochastiques.

La connaissance à chaque instant $t \in \mathbb{T}$ de l'état du système mécanique $\mathbf{X}(t)$ est calculée au moyen d'une intégration temporelle du système d'équations différentielles (3) en utilisant le schéma *Runge-Kutta* 4. Ces équations définissent un système dynamique stochastique non autonome noté $\mathcal{S}^{pheno} = (\mathbb{R}^n, T, \varphi_t^{pheno})$.

4 Approche intrusive modifiée pour le problème mécano-stochastique

4.1 Approximations des forces et moments à l'interface

Pour utiliser l'approche intrusive modifiée, il est nécessaire de mettre en ouvre une expression polynomiale du champ de vecteur \mathbf{G} et en particulier des efforts généralisés stochastiques \mathbf{W} . Il faut ainsi trouver des expressions simplifiées des forces \mathbf{F} et des moments \mathbf{C} qui sont fortement non linéaires malgré l'hypothèse des petits déplacements, car elles prennent en compte le décollement progressif des

disques. Ces forces et moments sont exprimés sous forme d'intégrale sur l'interface $(r-s)$ sur le domaine Γ_c , et cela engendre un coût numérique considérable lors de l'intégration temporelle. Pour contourner cette difficulté, les expressions des forces et moments ont pu être approchées à l'aide de considérations physiques et d'une étude de sensibilité :

- Expressions simplifiées des moments $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{C}}}(\boldsymbol{\theta}_s, w)$ in $\Theta \times T$:
ces moments peuvent être considérés comme dépendants uniquement des angles $\theta_{s,1}$ et $\theta_{s,2}$ comme le montre suite à une étude de sensibilité effectuée sur le modèle exact. On introduit la forme d'énergie potentielle \mathcal{W} définie positive suivante :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \varkappa \sum_{j \in I_c} A_j(w) (\theta_{s,1}^2 + \theta_{s,2}^2)^j \in \tilde{\mathcal{S}} \otimes V \quad (4)$$

où : $A_j : [w^{\min}, w^{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in I_c = \{2; 4; \dots; n_c\} \subset 2\mathbb{N}^*$ contient les termes de la série après troncature à l'indice n_c , l'application définie sur l'ensemble des déplacements w du disque rotor dans la direction x . Par conséquent, la forme polynomiale simplifiée est la suivante :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{i=2}^3 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \theta_{s,i-1}} \mathbf{e}_i = \varkappa \sum_{i=2}^3 \left(\sum_{j \in I_c} (j-1) A_j(w) (\theta_{s,1}^2 + \theta_{s,2}^2)^j \theta_{s,i-1} \right) \mathbf{e}_i \in (\tilde{\mathcal{S}} \otimes V)^2 \quad (5)$$

- Expressions simplifiées des forces $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\theta}_s, \mathbf{u}_s, w)$ in $\Theta \times T$:
ces forces sont considérées comme dépendantes uniquement des angles $\theta_{s,1}$ et $\theta_{s,2}$, de la vitesse \dot{u}_1 pour F_1 et de la vitesse \dot{u}_2 pour F_2 comme l'a montré l'étude de sensibilité effectuée en amont. La forme des forces est associée à des considérations physiques et se compose de deux parties. La première est associée à un effet non conservatif et contient principalement les angles $\theta_{s,1}$ et $\theta_{s,2}$. La seconde est associée à la dissipation résultant du frottement plan à l'interface $(r-s)$ et doit principalement contenir l'angle $\theta_{s,1}$ ainsi que la vitesse \dot{u}_1 pour F_1 ($\theta_{s,2}$ ainsi que \dot{u}_2 pour F_2). L'expression est donc la suivante :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mu \varkappa \sum_{i=2}^3 \left(\sum_{j \in I_f} (B_j(w) \theta_{s,i-1} + D_j(w) \dot{u}_{s,i-1}) (\theta_{s,1}^2 + \theta_{s,2}^2)^j \right) \mathbf{e}_i \in (\tilde{\mathcal{S}} \otimes V)^2 \quad (6)$$

où : $B_j : [w^{\min}, w^{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ and $D_j : [w^{\min}, w^{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in I_f = \{2; 4; \dots; n_f\} \subset 2\mathbb{N}^*$ contient les termes de la série après troncature à l'indice n_f , l'application définie sur l'ensemble des déplacements w du disque rotor dans la direction x .

A l'aide de la méthode des moindres carrés, les coefficients A_i , B_j et D_j ont pu être déterminés pour l'ensemble des valeurs du déplacement w imposé au rotor r . Sur la figure (2) sont représentés, les efforts et moments de référence (\mathbf{F} et \mathbf{C} sur la figure (2) (a)), ceux approximatés ($\tilde{\mathbf{F}}$ et $\tilde{\mathbf{C}}$ sur la figure (2) (b)) ainsi que les erreurs d'approximation (figure (2) (c), (d), (e) et (f)) en fonction des angles ($\theta_{s,1}$ et $\theta_{s,2}$) et des vitesses ($\dot{u}_{s,1}$ et $\dot{u}_{s,2}$). Les erreurs démontrent globalement des écarts mineurs, ce qui permet de valider les approximations.

4.2 Utilisation des propriétés polynomiales de Tchebychev

Une fois obtenu une approximation suffisamment précise des forces et des moments sous forme polynomiale, il est possible d'utiliser certaines propriétés des polynômes de *Tchebychev* de seconde espèce, afin de transformer les produits (associés aux non-linéarités) en sommes. Cette transformation permet d'obtenir des expressions des forces $\tilde{\mathbf{F}}$ et des moments $\tilde{\mathbf{C}}$ directement dans les bases d'approximation spatiale et probabiliste et par conséquent éviter le calcul d'intégrale à chaque pas de temps, ce qui allongerait considérablement les temps de calcul. Premièrement, en remplaçant les expressions de \mathbf{u}_s , $\boldsymbol{\theta}_s$, $\dot{\mathbf{u}}_s$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_s$ dans (5) et (6), il vient :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{F}} = \mu \varkappa \sum_{j \in I_{ap}} \mathbf{c}_{F,j}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \prod_{i=1}^{n_1} U_i^{(1),j_i} \prod_{i=1}^{n_2} U_i^{(2),j_{n_1+1}} \\ \tilde{\mathbf{C}} = \varkappa \sum_{j \in I_{ap}} \mathbf{c}_{C,j}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \prod_{i=1}^{n_1} U_i^{(1),j_i} \prod_{i=1}^{n_2} U_i^{(2),j_{n_1+1}} \end{cases} \in (\tilde{\mathcal{S}} \otimes V)^2 \quad (7)$$

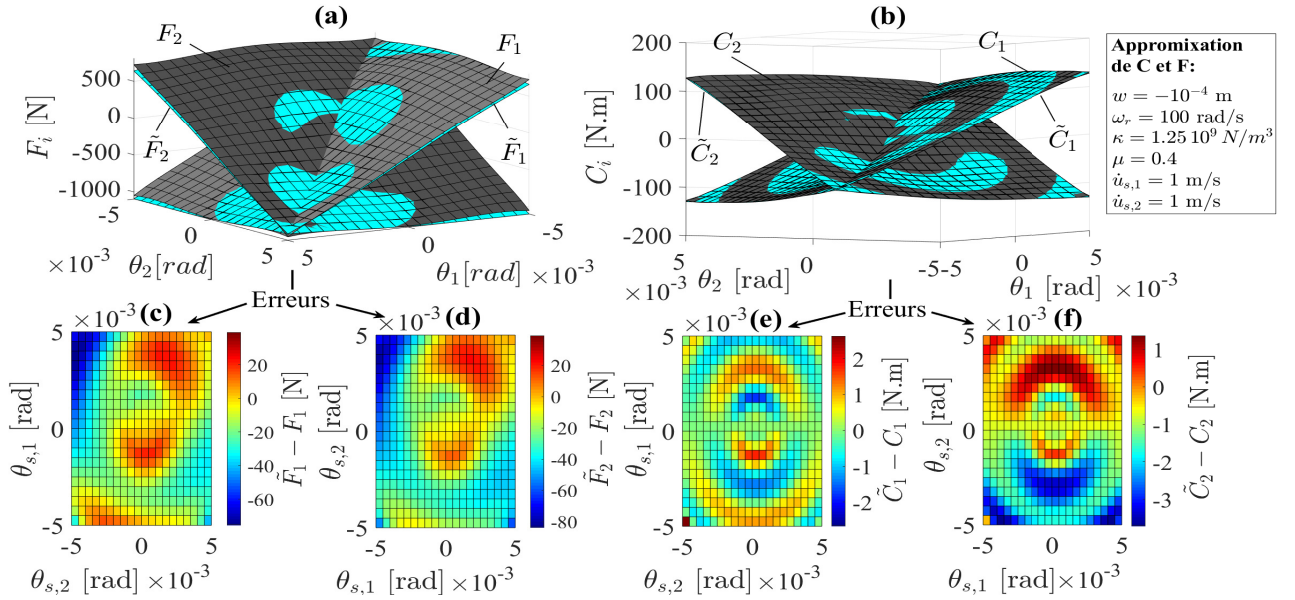


FIGURE 2 – Comparaison entre les forces et moments de référence F et C et les forces et moments approximés \tilde{F} et \tilde{C} . (a) Comparaison des forces de référence (bleu) et approchées (gris) avec des erreurs entre F_1 et \tilde{F}_1 (c) ainsi que F_2 et \tilde{F}_2 (d). (b) Comparaison des moments de référence (bleu) et approchés (gris) avec des erreurs entre C_1 et \tilde{C}_1 (e) et C_2 et \tilde{C}_2 (f).

avec :

- $I_{ap} = \left\{ \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_{2(n_1+n_2)}) \in \mathbb{N}^{2(n_1+n_2)} \mid \sum_{i=1}^{2(n_1+n_2)} j_i \leq n_f = n_c \right\}$, l'ensemble d'indices correspondant au terme \mathbf{j} de la série (7).
- $\mathbf{c}_{F,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbf{c}_{C,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$), le coefficient associé au terme \mathbf{j} de la série (7).

En adaptant dans l'expression (7) la propriété de linéarisation des polynômes de *Tchebychev* : $U_i U_j = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} U_{|i-j|+2k}$ in $]-1, 1[$, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, il vient :

$$\forall \mathbf{j} \in I_s, \quad \prod_{i=0}^n U_i^{j_i} = \sum_{\mathbf{k} \in I_s} U_{|\dots|0-1|+2k_0-2|+2k_1+\dots-(i+1)|+2k_i+\dots-(n+1)|+2k_n} \quad \text{in } [-1, 1] \quad (8)$$

avec :

- $I_s = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \mid k_i \in \left[\left[0, \min \left(|\dots|1 + \sum_{j=0}^i -(j+1)| + 2k_j, j+2 \right) \right] \right] \right\}$.

Ensuite, en remplaçant (8) dans (7), des expressions simplifiées des forces et des moments sont obtenues :

$$\begin{cases} \tilde{F} = \sum_{\mathbf{k} \in I_k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_{\mathbf{k}} = \mathcal{H} \mathbf{a}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \\ \tilde{C} = \sum_{\mathbf{k} \in I_k} \mathbf{b}_{\mathbf{k}}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \mathbf{H}_{\mathbf{k}} = \mathcal{H} \mathbf{b}(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \end{cases} \in (\tilde{\mathcal{S}} \otimes V)^2 \quad (9)$$

avec :

- $\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (respectivement $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$), l'application donnant les coefficients associés au terme \mathbf{k} de la série précédente (9).

A partir des expressions (9), il est facile d'identifier et de récupérer les efforts généralisés stochastiques non linéaires sans calculer le produit scalaire, ainsi :

$$\tilde{\mathbf{W}}^T = \left\langle \frac{d\Phi^T(L)}{dx} \tilde{\mathbf{C}} \middle| \mathcal{H} \right\rangle_{S'_1, S'_2} + \langle \Phi^T(L) \tilde{F} \middle| \mathcal{H} \rangle_{S'_1, S'_2} = \mathbf{a}^T(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \frac{d\Phi(L)}{dx} + \mathbf{b}^T(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \Phi(L) \in V^{1 \times m} \quad (10)$$

Les efforts stochastiques généralisés $\tilde{\mathbf{W}}$ sont désormais connus sans procéder à l'intégration numérique des produits scalaires à chaque pas de temps. Il est possible d'effectuer une intégration temporelle du problème (3) dans des délais raisonnables en utilisant le schéma *Runge-Kutta* 4.

4.3 Comparaison avec une approche non intrusive utilisant les polynômes de Tchebychev

Afin de valider l'approche intrusive modifiée, les résultats associés à l'approche intrusive modifiée peuvent être comparés à une approche non intrusive en utilisant une interpolation à l'aide de polynômes de *Tchebychev* de seconde espèce. Pour cette dernière, il convient en premier lieu d'effectuer des intégrations temporelles pour un ensemble de valeurs des variables aléatoires ξ contenues dans Θ puis d'interpoler des résultats de ces intégrations temporelles. Pour l'approche non intrusive, la solution faible associée au problème (3) a la forme suivante :

$$\tilde{u} = \Phi v \in \tilde{U}_w \quad (11)$$

avec :

- $v : (\xi, t) \in \Theta \times T \mapsto v(\xi, t) \in \mathbb{R}^{2N}$, la première partie du vecteur d'état $X \in \mathbb{R}^n$ qui est la solution du problème (3) transformé en problème déterministe (pour cela : $n_1 = n_2 = 1$).

Il est important de relever que l'approche intrusive utilise également des propriétés intéressantes des polynômes de *Tchebychev* pour approximer v à chaque instant $t \in T$. L'utilisation de ces polynômes permet de converger uniformément vers la solution réelle v lorsque le nombre de polynômes utilisés tend vers l'infini. Cela permet d'approcher v comme suit :

$$\tilde{v} = \mathcal{H} w \in (\tilde{\mathcal{S}} \otimes V)^{2N} \quad (12)$$

avec :

- $w^T = \langle \tilde{v} | \mathcal{H} \rangle_{(\tilde{\mathcal{S}} \otimes V)^{2N}, \tilde{\mathcal{S}}^{2N \times 2Nq}} = \int_{\Theta} \tilde{v}^T(x, \cdot) \mathcal{H}(x) d\mathbb{P}_{\Xi}(x) \in V^{1 \times 2Nq}$, la projection de \tilde{v} sur \mathcal{H} .

où : $q = q_1 \times q_2 \in \mathbb{N}^*$, correspondant au nombre d'éléments de la base constitués de produits de polynômes de *Tchebychev* lesquels sont associés à ξ_1 (q_1) et ξ_2 (q_2). La convergence uniforme est garantie en choisissant des points d'interpolation particuliers appelés points *Gauss-Tchebychev*. En utilisant ces points, il est possible d'approcher w avec la quadrature suivante :

$$\tilde{w}^T = \sum_{i=1}^{Q_1} \sum_{j=1}^{Q_2} \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{M_1+1}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{M_2+1}\right)}{(M_1+1)(M_2+1)} \tilde{v}^T(x_{ij}, \cdot) \mathcal{H}(x_{ij}) \in V^{1 \times 2Nq} \quad (13)$$

avec :

- $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, le nombre de points de *Gauss-Tchebychev* associés à la première (respectivement deuxième) variable aléatoire ξ_1 (respectivement ξ_2).
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, Q_1 \rrbracket \times \llbracket 1, Q_2 \rrbracket$, $x_{ij} = \left(\cos\left(\frac{i\pi}{M_1+1}\right), \cos\left(\frac{j\pi}{M_2+1}\right) \right) \in \Theta$, les coordonnées des points de *Gauss-Tchebychev*.

À présent, pour l'approche non intrusive, neuf intégrations temporelles déterministes associées aux neuf points de *Gauss-Tchebychev* ($q = 9$), sont réalisées avec le schéma de *Runge-Kutta* 4. Puis, une interpolation des résultats est effectuée en utilisant l'expression (13). Pour l'approche intrusive, une intégration temporelle stochastiques est réalisée avec trois polynômes ($n_1 = n_2 = 3$) pour chaque variable aléatoire (ξ_1 et ξ_2) et par conséquent neuf produits de polynômes pour la base d'approximation stochastique. Sur la figure (3) sont représentées les évolutions temporelles du déplacement ainsi que leurs dérivées temporelles, au centre du disque stator s dans la direction y , pour l'approche intrusive ((a) et (b)) et l'approche non intrusive ((c) et (d)). Les amplitudes extrémales et l'allure des moyennes $\bar{u}_{s,1}$ et $\bar{\dot{u}}_{s,1}$, des moyennes plus écart type $\bar{u}_{s,1} + \sigma[u_{s,1}]$ et $\bar{\dot{u}}_{s,1} + \sigma[\dot{u}_{s,1}]$ ainsi que des moyennes moins l'écart type $\bar{u}_{s,1} - \sigma[u_{s,1}]$ et $\bar{\dot{u}}_{s,1} - \sigma[\dot{u}_{s,1}]$, pour la méthode intrusive modifiée (3) ((a) et (b)) et la méthode non intrusive (3) ((c) et (d)), sont très proches. On constate quelques différences dont un léger décalage temporel qui peut être observé sur la croissance exponentielle des niveaux vibratoires (développement d'instabilités). Ces observations permettent de valider les résultats de l'approche intrusive modifiée. Il faut aussi rappeler l'intérêt de l'approche intrusive modifiée qui permet d'obtenir des résultats en une seule intégration temporelle, dans des délais raisonnables (quatre fois plus rapides que l'approche intrusive classique) et avec plus d'ergonomie que l'approche non intrusive (plusieurs intégrations temporelles déterministes puis interpolation des résultats).

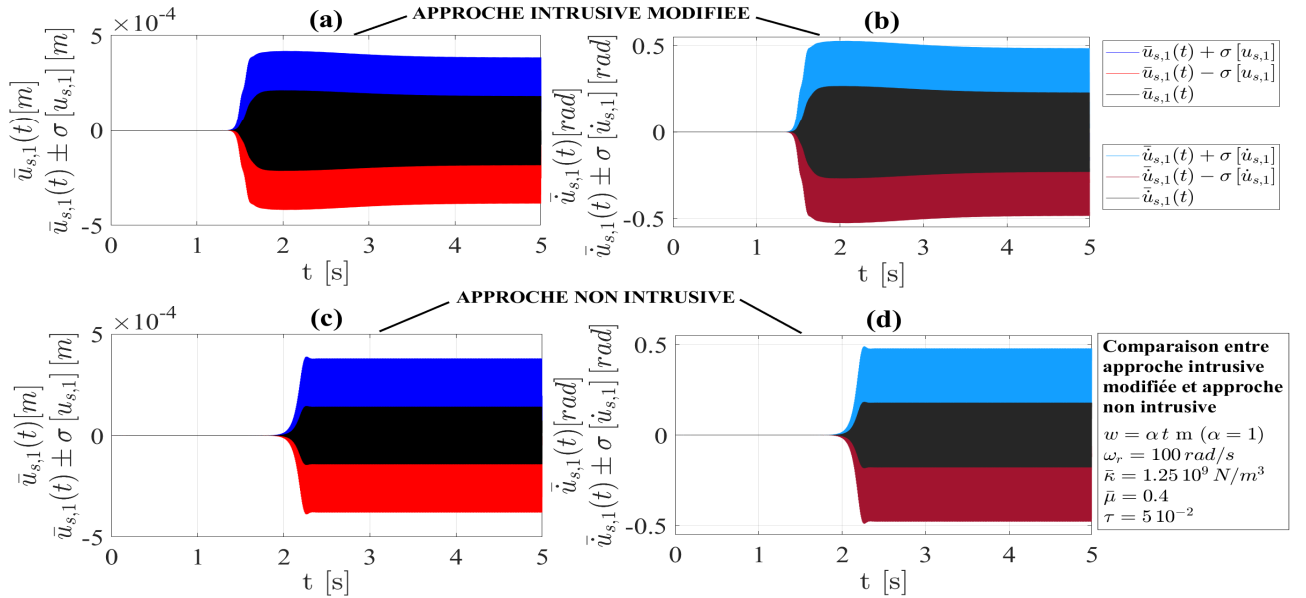


FIGURE 3 – Comparaison des évolutions temporelles associées à la moyenne $\bar{u}_{s,1}$ et $\bar{\dot{u}}_{s,1}$, la moyenne plus ou moins l'écart type $\bar{u}_{s,1} \pm \sigma[u_{s,1}]$ et $\bar{\dot{u}}_{s,1} \pm \sigma[\dot{u}_{s,1}]$, entre les approches intrusives et non intrusives modifiées. (a) ((c) respectivement) Évolution temporelle de la moyenne $\bar{u}_{s,1}$, la moyenne plus l'écart type $\bar{u}_{s,1} + \sigma[u_{s,1}]$ et la moyenne plus l'écart type $\bar{u}_{s,1} - \sigma[u_{s,1}]$. (b) ((d) respectivement) Évolution temporelle de la moyenne $\bar{\dot{u}}_{s,1}$, la moyenne plus l'écart type $\bar{\dot{u}}_{s,1} + \sigma[\dot{u}_{s,1}]$ et la moyenne plus l'écart type $\bar{\dot{u}}_{s,1} - \sigma[\dot{u}_{s,1}]$.

5 Conclusion

Un modèle phénoménologique simple associé aux mécanismes physiques induisant des instabilités provoquées par le frottement a été utilisé pour tester une approche intrusive modifiée. Des incertitudes ont été prises en compte pour deux des paramètres du modèle : la raideur de contact et le coefficient de frottement. La structure des équations associées au modèle est complexe, générant ainsi des temps de résolution par intégration temporelle importants. De plus, la prise en compte des incertitudes dans le modèle, avec une approche intrusive classique, induit une forte augmentation des temps de calcul. Pour contourner ces difficultés, l'approche modifiée proposée comprend deux étapes et consiste en premier lieu à simplifier l'expression du torseur des actions mécaniques (forces et moments) à l'interface des disques rotor et stator. Pour y parvenir, une étude de sensibilité a été réalisée afin d'identifier les variables ayant une forte influence sur les efforts et les moments. Cette étude de sensibilité a été renforcée par des considérations physiques et a permis d'élaborer des lois de comportement fortement simplifiées. Les expressions polynomiales résultant de la simplification peuvent être obtenues rapidement et les erreurs commises entre les expressions approchées et celles des références sont très faibles. Les propriétés des polynômes *Tchebychev* de seconde espèce ont ensuite été exploitées pour calculer les expressions des forces stochastiques généralisées, sans effectuer d'intégrations numériques probabilistes des termes intégraux associés. Grâce à cette stratégie, les temps d'intégration temporelle sont considérablement réduits (quatre fois plus rapides). Les résultats de l'approche intrusive modifiée ont ensuite été comparés à ceux d'une approche non intrusive. Dans le cadre de cette approche, d'autres propriétés des polynômes *Tchebychev* ont été exploitées pour interpoler les résultats d'intégrations temporelles déterministes. Des différences mineures ont été observées entre les deux approches sur des moyennes, des écarts types et des amplitudes de cycles limites. Ainsi, les résultats de l'approche non intrusive optimisée ont pu être validés. Enfin, l'approche intrusive modifiée permet d'obtenir des résultats robustes dans des délais très raisonnables, en effectuant une seule intégration temporelle et avec beaucoup plus d'ergonomie que l'approche non intrusive. Par ailleurs, l'équation du système dynamique dans l'espace d'état associé à l'approche intrusive permet de modifier facilement les paramètres sans dispersion dans le cadre d'une optimisation robuste de système mécanique.

Références

- [1] A. F. D'souza and A. H. Dweib. Self-excited vibrations induced by dry friction, part 2 : Stability and limit-cycle analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 137(2) :177–190, 1990. Publisher : Elsevier.
- [2] A. H. Dweib and A. F. D'Souza. Self-excited vibrations induced by dry friction, part 1 : experimental study. *Journal of Sound and Vibration*, 137(2) :163–175, 1990. Publisher : Elsevier.
- [3] N. M. Kinkaid, Olivier M. O'Reilly, and Panayiotis Papadopoulos. Automotive disc brake squeal. *Journal of sound and vibration*, 267(1) :105–166, 2003. Publisher : Elsevier.
- [4] James Gordon, Steven Liu, and M. Ozbek. A nonlinear model for aircraft brake squeal analysis. II - Stability analysis and parametric studies. In *Dynamics Specialists Conference, Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-located Conferences*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, April 1996.
- [5] Steven Y. Liu, James T. Gordon, and M. Akif Ozbek. Nonlinear Model for Aircraft Brake Squeal Analysis : Model Description and Solution Methodology. *Journal of Aircraft*, 35(4) :623–630, July 1998.
- [6] Xavier Lorang, Florence Foy-Margiocchi, Quoc Son Nguyen, and Pierre-Etienne Gautier. TGV disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3-5) :735–746, 2006. Publisher : Elsevier.
- [7] B. Hervé, J. Sinou, H. Mahé, and L. Jézéquel. Analysis of friction-induced self-generated vibrations originated from mode-coupling in clutches. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 42(3) :369, 2008. Publisher : Citeseer.
- [8] Benjamin Hervé, J.-J. Sinou, Hervé Mahé, and Louis Jezequel. Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27(2) :141–160, 2008. Publisher : Elsevier.
- [9] Chao Gao, Doris Kuhlmann-Wilsdorf, and David D. Makel. The dynamic analysis of stick-slip motion. *Wear*, 173(1-2) :1–12, April 1994.
- [10] Chao Gao, Doris Kuhlmann-Wilsdorf, and David D. Makel. Fundamentals of stick-slip. *Wear*, 162-164 :1139–1149, April 1993.
- [11] R. A. Ibrahim. Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos—Part II : Dynamics and Modeling. *Applied Mechanics Reviews*, 47(7) :227–253, July 1994.
- [12] R. A. Ibrahim. Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos—Part I : Mechanics of Contact and Friction. *Applied Mechanics Reviews*, 47(7) :209–226, July 1994.
- [13] R. P. Jarvis and B. Mills. Vibrations Induced by Dry Friction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 178(1) :847–857, June 1963.
- [14] P. Chambrette and L. Jezequel. Stability of a beam rubbed against a rotating disc. *European journal of mechanics. A. Solids*, 11(1) :107–138, 1992.
- [15] Daniel Hochlenert. Nonlinear stability analysis of a disk brake model. *Nonlinear Dyn*, 58(1-2) :63–73, October 2009.
- [16] Utz von Wagner, Daniel Hochlenert, and Peter Hagedorn. Minimal models for disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 302(3) :527–539, 2007. Publisher : Elsevier.
- [17] Alexy Mercier, Louis Jézéquel, Sébastien Besset, Abdelbasset Hamdi, and Jean-Frédéric Diebold. Studies on detachment non-linearity at the rotor-stator interface. *Journal of Sound and Vibration*, 468 :115084, March 2020.
- [18] M. Loève. *Probability Theory I*, volume 45 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, New York, NY, 1977.
- [19] Norbert Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4) :897–936, 1938. Publisher : JSTOR.
- [20] Ma Shao-Juan, Xu Wei, Li Wei, and Fang Tong. Analysis of stochastic bifurcation and chaos in stochastic Duffing–van der Pol system via Chebyshev polynomial approximation. *Chinese Physics*, 15(6) :1231, 2006. Publisher : IOP Publishing.
- [21] John C. Mason. Chebyshev polynomials of the second, third and fourth kinds in approximation, indefinite integration, and integral transforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 49(1-3) :169–178, 1993. Publisher : Elsevier.
- [22] Jianping Liu, Xia Li, and Limeng Wu. An operational matrix technique for solving variable order fractional differential-integral equation based on the second kind of Chebyshev polynomials. *Advances in Mathematical Physics*, 2016, 2016. Publisher : Hindawi.
- [23] Louis Jézéquel, Hugo de Filippis, and Alexy Mercier. Analysis and Physical Interpretation of the Uncertainty Effect in Structural Dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 148(2) :04021147, 2022. Publisher : American Society of Civil Engineers.