

Optimisation topologique des coques épaisses avec la méthode level set en analyse isogéométrique multi-patches

Fernando Hübner^{1,2,3}, Malek Zarroug², Hakim Naceur³, Andrei Constantinescu¹

¹ Laboratoire de Mécanique des Solides, CNRS, École Polytechnique, 91128, Palaiseau, France, {fernando.hubner, andrei.constantinescu}@polytechnique.edu

² Direction Scientifique et Technologies Futures, Groupe Stellantis, Route de Gisy, Velizy-Villacoublay, 78140, France, malek.zarroug@stellantis.com

³ INSA Hauts-de-France, CNRS UMR 8201-LAMIH, F-59313 Valenciennes, 59300, France, hakim.naceur@hdf-insa.fr

Résumé — Nous présentons un cadre d'optimisation topologique pour les coques épaisses en utilisant la méthode level set (LSM) couplée à l'analyse isogéométrique multi-patches (IGA). La description paramétrique de l'IGA permet d'extraire les géométries optimisées en format CAO. L'optimisation vise à trouver la distribution de matière dans la surface moyenne de la coque qui maximise la rigidité de la structure tout en minimisant son volume. L'approche est validée sur plusieurs exemples de coques 3D, suivant un modèle de Reissner-Mindlin en élasticité linéaire.

Mots clés — Optimisation topologique, analyse isogéométrique, level set, Coques épaisses de Reissner-Mindlin, Multi-patches

1 Introduction

L'analyse isogéométrique permet d'intégrer de manière efficace la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) et l'analyse, ce qui fait d'elle un outil extrêmement puissant pour les applications en ingénierie de mécanique [15]. Cependant, dans le contexte des problèmes d'optimisation de forme et topologique, la nature explicite de la description géométrique de l'IGA peut être problématique, car la géométrie évolue sans connaissance préalable de sa forme finale. Pour résoudre cette problématique, la méthode level set, LSM (méthode des surfaces de niveaux) émerge comme une technique efficace et robuste, offrant une représentation implicite des domaines en évolution. Par conséquent, l'objectif de cette étude est de fournir un cadre pour effectuer de l'optimisation topologique sur des surfaces paramétrées en utilisant la méthode des surfaces de niveaux, tout en tirant parti de l'analyse isogéométrique lors de l'analyse, et en produisant également les formes optimales sous forme de modèles CAO exploitable directement pour d'autres simulations ou applications.

La méthode level set a été largement utilisée avec la méthode des éléments finis, comme illustré dans [4, 17, 2, 12], ainsi que dans le contexte de modèles des plaques et coques, comme présenté dans [5, 8, 11]. Aussi, des travaux ont également été menés alliant l'analyse isogéométrique avec la méthode de level set, mais dans un contexte limité à l'élasticité linéaire en 2D, comme dans [13, 16, 19, 18]. En dehors du cadre du LSM, [7] a utilisé l'IGA pour optimiser la forme sur un domaine sphérique d'une coque fine. La nouveauté de notre approche consiste à combiner l'IGA avec le LSM dans un contexte des géométries multi-patches courbes 3D sous modèle de coques épaisses de Reissner-Mindlin.

2 Géométrie de la coque épaisse dans l'analyse isogéométrique

On note $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ la surface moyenne de la coque d'épaisseur constante $\varepsilon > 0$. Soit $\mathbf{S} : \hat{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée par une NURBS définie sur le domaine paramétrique $\hat{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$. Sans perte de généralité, le domaine paramétrique peut être exprimé comme étant le carré unitaire. Nous définissons le *patch* comme la surface moyenne \mathcal{D} , tel que $\mathcal{D} = \mathbf{S}(\hat{\mathcal{D}})$.

En chaque point $(\xi, \eta) \in \hat{\mathcal{D}}$, il est possible de définir une base covariante locale $\{\mathbf{a}_i\}$ avec $\mathbf{a} = (\hat{\partial}_\xi \mathbf{S}, \hat{\partial}_\eta \mathbf{S}, \mathbf{n})^T$, où $\mathbf{n} = \hat{\partial}_\xi \mathbf{S} \times \hat{\partial}_\eta \mathbf{S} / |\hat{\partial}_\xi \mathbf{S} \times \hat{\partial}_\eta \mathbf{S}|$. Avec la définition de cette base, on peut définir la coque mathématiquement comme étant l'image du domaine paramétrique volumique $\hat{\mathcal{V}} := \hat{\mathcal{D}} \times [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ via la fonction $\mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie comme suit :

$$\mathcal{V}((\xi, \eta), \zeta) = \mathbf{S}(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{n}(\xi, \eta) \quad (1)$$

Il a été démontré en [6] que, sous l'hypothèse de régularité C^3 de la fonction \mathbf{S} et pour ϵ suffisamment petit, \mathcal{V} est un 2-difféomorphisme entre \hat{V} et $V := \mathcal{V}(\hat{V})$. Ce résultat nous permet de travailler principalement avec les objets mathématiques définis dans l'espace paramétrique, plutôt qu'avec leurs réciproques plus compliqués dans le domaine physique.

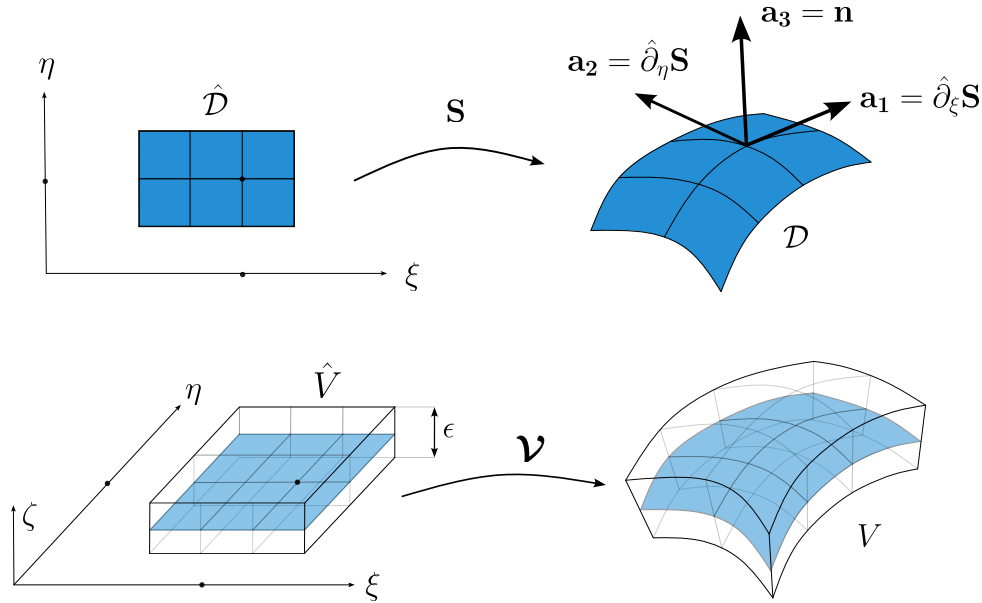


FIGURE 1 – Construction de la coque épaisse. La fonction $\mathbf{S} : \hat{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}$ en haut transforme un point dans l'espace paramétrique $\hat{\mathcal{D}}$ dans un point dans l'espace physique appartenant à la surface moyenne \mathcal{D} . De plus, la fonction volumique $\mathcal{V} : \hat{V} \rightarrow V$ en bas transforme un point dans le domaine paramétrique $\hat{V} = \hat{\mathcal{D}} \times [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$ dans un point dans l'espace physique volumique V .

Multi-patch en analyse isogéométrique : Lors de l'utilisation de l'analyse isogéométrique, l'emploi de techniques multi-patch devient souvent nécessaire. Cela est dû au fait que, dans la plupart des applications, les complexités des géométries ne peuvent pas être adéquatement représentées par une seule surface NURBS. Ainsi, nous pouvons adopter une collection $\{\mathbf{S}_k\}_{k=1}^K$ comprenant K paramétrisations NURBS distinctes et disjointes. Chaque patch est donc caractérisé par une surface moyenne notée \mathcal{D}_k , où $\mathcal{D}_k = \mathbf{S}_k(\hat{\mathcal{D}}_k)$. Cette collection $\{\mathcal{D}_k\}_{k=1}^K$ définit une partition de la surface moyenne \mathcal{D} avec :

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{k=1}^K \overline{\mathcal{D}}_k \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_l = \emptyset \quad \text{if} \quad k \neq l \quad (2)$$

Dans cette étude, notre attention se porte uniquement sur les systèmes multi-patch en supposant des patches conformes. Cela signifie que, pour toute paire de patches adjacents donnée, notée k et l , on a que l'interface commune γ_{kl} satisfait à $\gamma_{kl} = \overline{\partial \mathcal{D}_k} \cap \overline{\partial \mathcal{D}_l} = \overline{\partial \mathcal{D}_k} = \overline{\partial \mathcal{D}_l}$.

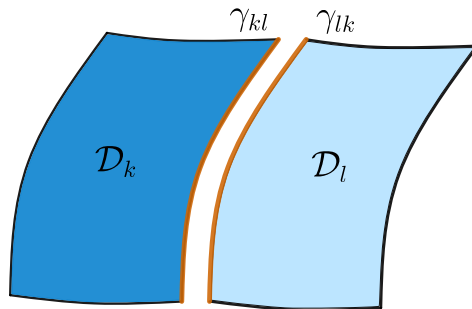


FIGURE 2 – Illustration d'un système multi-patch simple (pour $K = 2$). Les patches k et l sont les images de la paramétrisation NURBS \mathbf{S}_k et \mathbf{S}_l et partagent une interface conforme commune $\gamma_{kl} = \overline{\partial \mathcal{D}_k} \cap \overline{\partial \mathcal{D}_l}$.

3 Représentation du matériau par des surfaces de niveaux

La forme de la coque par une surface de niveaux : La technique de surface des niveaux consiste à définir de manière implicite une forme $\Omega \subset \mathcal{D}$ en utilisant une *fonction de surface de niveaux (LSF)*. Dans le contexte de l'IGA, considérons un certain patch k , défini par une paramétrisation \mathbf{S}_k avec $\mathcal{D}_k = \mathbf{S}_k(\hat{\mathcal{D}}_k)$. De plus, soit $\phi_k : \hat{\mathcal{D}}_k \rightarrow \mathbb{R}$ une LSF définie sur le domaine paramétrique, que nous modélisons numériquement sous forme de NURBS. Cela nous permettra par la suite d'extraire la forme optimale sous forme de modèle CAO et aussi de définir précisément les bords du domaine lors des calculs numériques.

En utilisant ϕ_k , il est possible de définir la phase de matériau paramétrique par l'ensemble suivant :

$$\hat{\Omega}_k = \{\xi \in \hat{\mathcal{D}}_k : \phi_k(\xi) < 0\} \quad (3)$$

A partir de ceci, on peut également définir la *phase de matériau* de la coque comme étant l'image de $\hat{\Omega}_k$ par la fonction \mathbf{S}_k :

$$\Omega_k = \mathbf{S}_k(\hat{\Omega}_k) \quad (4)$$

L'idée de la méthode de surface de niveaux est donc de partitionner l'espace physique en deux phases (voir Figure 3). La *phase matérielle* Ω_k possède les propriétés matérielles classiques du composant qui sera optimisé, tandis que la *phase vide* (ou *phase faible*) a des propriétés matérielles faibles, afin de simuler comme s'il n'y avait pas de matériau dans $\mathcal{D}_k \setminus \Omega_k$.

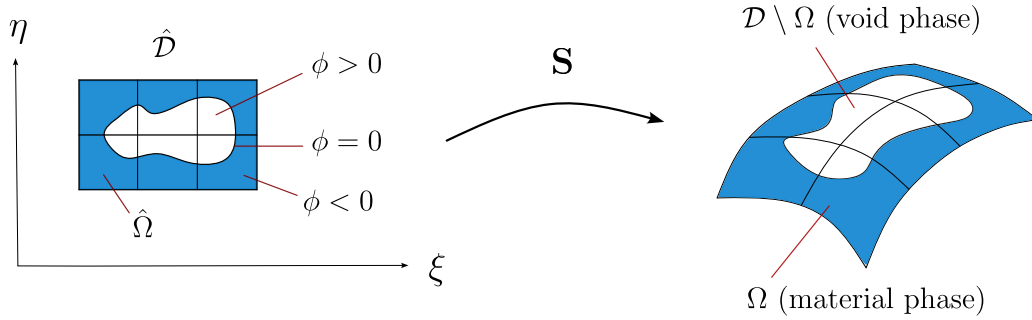


FIGURE 3 – Vue schématique de la méthode de surface de niveaux dans l'analyse isogéométrique. Une phase matérielle paramétrique $\hat{\Omega}_k$ (en bleu) est définie comme l'ensemble de points dans l'espace paramétrique où la fonction de surface de niveaux ϕ_k est négative. L'image de $\hat{\Omega}_k$ par la surface NURBS \mathbf{S}_k définit la forme Ω_k (en bleu) en tant que sous-ensemble de la surface médiane de la coque. L'ensemble $\mathcal{D}_k \setminus \Omega_k$ ayant des propriétés matérielles faibles est appelé la *phase vide* et il agit comme une région vide.

Dans la méthode de la surface de niveaux, nous supposons que les points matériels dans le domaine se déplacent avec un champ de vitesse donné \mathbf{v}_k que nous identifierons ultérieurement avec la direction de descente d'une certaine fonction de coût. Ainsi, pour un patch donné k , l'évolution de la forme sera donnée par l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla \phi_k = \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla \phi_k = 0. \quad (5)$$

Il est important de noter que ces définitions s'étendent de manière immédiate aux systèmes multi-patch, comme illustré dans la Figure 4. En effet, en considérant une collection de fonctions de surface de niveaux $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^K$, avec $\phi_k : \hat{\mathcal{D}}_k \rightarrow \mathbb{R}$, chaque ϕ_k définit une forme Ω_k en conséquence de l'équation (4). Par conséquent, la définition d'une forme globale Ω est réalisée de manière simple comme l'union de les Ω_k individuels, comme indiqué dans l'équation (6). Cependant, il est important de garantir la continuité des fonctions de surface de niveaux aux interfaces entre les patches.

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k \quad (6)$$

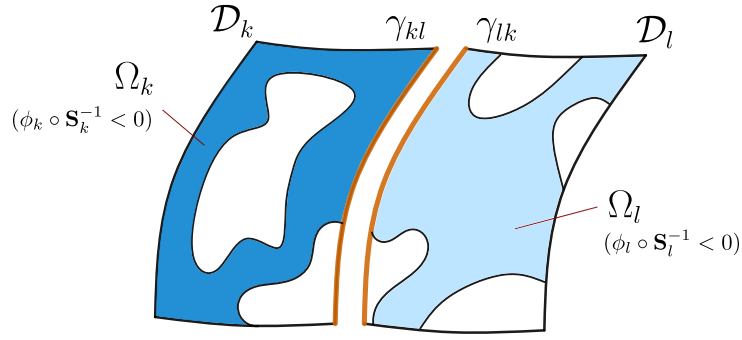


FIGURE 4 – Représentation multi-patch avec des surfaces de niveaux. En définissant un ensemble de fonctions de surface de niveaux $\{\phi_k\}$, on est capable de définir l'ensemble des formes $\{\Omega_k\}$ à travers l'équation (4).

Extraire une CAO des formes optimales : L'utilisation de l'analyse isogéométrique pour l'optimisation topologique présente l'avantage d'extraire facilement les contours du domaine sous forme de courbes B-spline et les formes optimales sous forme de surfaces trimmées. Étant donné que les fonctions de niveau sont modélisées avec des NURBS, même avec un faible nombre d'éléments, les contours du domaine restent lisses, permettant ainsi une détermination précise des frontières du domaine. Cette approche est illustrée sous la forme d'un court algorithm 1. Veuillez vous référer à [10] pour plus d'informations sur les techniques pour trimmer et trouver l'intersections entre surfaces NURBS.

Algorithm 1 Extraire un modèle CAO à partir des fonctions surface de niveaux

Input:

Une collections des paramétrisations $\{\mathbf{S}_k\}_{k=1}^K$ et les fonctions de surfaces de niveau $\{\phi_k\}_{k=1}^K$

for $k = 0$ jusqu'à K **do**

 Trouver l'ensemble des p-courbes $\{\hat{\gamma}_m\}_{m=1}^{M_k}$ d'intersection entre les ϕ_k avec le plan $\zeta = 0$

 Si besoin, on ferme les p-courbes $\{\hat{\gamma}_m\}_{m=1}^{M_k}$ avec les arrêt du domaine $\hat{\mathcal{D}}_k$

 Déterminer les courbes $\{\gamma_m\}_{m=1}^{M_k}$ dans l'espace physique avec $\gamma_m = \mathbf{S}_k(\hat{\gamma}_m)$ pour tout m

end for

4 Représentation IGA de la matière avec des surfaces de niveaux

Nous nous intéressons à la résolution du problème d'élasticité linéaire sur une forme multi-patch Ω , décrite par une fonction de surface de niveaux $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^K$. Pour ce faire, nous allons modéliser le comportement matériel des phases forte et faible par deux tenseurs constitutifs C^{ijml} et \tilde{C}^{ijml} , respectivement. Dans chaque patch, le comportement attendu du matériau A^{ijml} peut être exprimé dans le domaine \mathcal{D}_k avec une dépendance par rapport à la fonction de surface de niveaux ϕ_k comme suit :

$$A^{ijml}(\phi_k) = \begin{cases} C^{ijml} & \text{dans } \Omega_k & (\text{phase forte}, \phi_k < 0) \\ \tilde{C}^{ijml} & \text{dans } \mathcal{D}_k \setminus \Omega_k & (\text{phase faible}, \phi_k > 0) \end{cases} \quad (7)$$

Pour éviter des complications numériques, on peut considérer une fonction de transition lisse pour interpoler de manière continue les propriétés du matériau d'une phase à l'autre. Soit $e > 0$ un paramètre petit représentant l'épaisseur de cette interface entre les deux phases. On peut introduire une fonction de Heaviside $\mathcal{H}_e \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ avec l'expression $\mathcal{H}_e(\phi) := \frac{1}{2} \left(1 - \phi / \sqrt{e^2 + \phi^2} \right)$. Alors on peut exprimer le tenseur de contrainte avec une dépendance des fonctions ϕ_k et \mathcal{H}_e de la manière suivante :

$$\sigma_{\phi_k}^{ij} = \left(\mathcal{H}_e(\phi) (C^{ijml} - \tilde{C}^{ijml}) + \tilde{C}^{ijml} \right) \varepsilon_{ij} = A^{ijml}(\phi_k, \mathcal{H}_e) \varepsilon_{ij}. \quad (8)$$

Avec ces considérations, on peut avancer vers la définition de la formulation faible de l'élasticité linéaire. Considérons l'espace de Sobolev suivant, adapté au modèle de coque Reissner-Mindlin :

$$H_d^1(\mathcal{D}_k) = \{\mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_k^u, \mathbf{v}_k^r) \in H^1(\mathcal{D}_k) \times H^1(\mathcal{D}_k) : \mathbf{v}_k^u|_{\partial\mathcal{D}_d^u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_k^r|_{\partial\mathcal{D}_d^r} = \mathbf{0}\}, \quad (9)$$

où $\partial\mathcal{D}_d^u, \partial\mathcal{D}_d^r$ sont les parties des bords de Dirichlet $\partial\mathcal{D}_d$ où respectivement les déplacements et rotations sont fixés à zéro avec $\partial\mathcal{D}_d = \partial\mathcal{D}_d^u \cup \partial\mathcal{D}_d^r$.

Enfin, on peut exprimer mathématiquement le modèle de coque IGA, tel que présenté dans [1], lorsqu'il est couplé avec la formulation de la surface de niveaux. Introduisons la forme bilinéaire (continue et coercitive) $a_k : H_d^1(\mathcal{D}_k) \times H_d^1(\mathcal{D}_k) \rightarrow \mathbb{R}$ et une forme linéaire (continue) $L_k : H_d^1(\mathcal{D}_k) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \int_{V_k} \boldsymbol{\sigma}_{\phi_k}(\mathbf{u}_k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_k) dV_k = \int_{[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \times \hat{\mathcal{D}}_k} \boldsymbol{\sigma}_{\phi_k}(\mathbf{u}_k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_k) |\det J_{\mathcal{V}_k}| d\hat{\mathcal{D}}_k d\zeta \quad (10)$$

$$L_k(\mathbf{v}_k) = \int_{V_k} (\mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{v}_k) \mathbb{1}_{\Omega_k} dV_k + \int_{\mathcal{D}_k} (\mathbf{f}_k^s \cdot \mathbf{v}_k) \mathbb{1}_{\Omega_k} d\mathcal{D}_k + \int_{\partial\mathcal{D}_n} (\mathbf{v}_k^u \cdot \mathbf{g}_k + \mathbf{v}_k^r \cdot \mathbf{m}_k) \mathbb{1}_{\Omega_k} ds \quad (11)$$

où \mathbf{f}_k^v est une force volumétrique appliquée sur l'ensemble du volume V_k , \mathbf{f}_k^s est une force de surface sur \mathcal{D}_k , \mathbf{g}_k sont les forces latérales sur $\partial\mathcal{D}_n$, \mathbf{m}_k est le moment appliqué à $\partial\mathcal{D}_n$, $J_{\mathcal{V}_k}$ est la matrice jacobienne de la transformation \mathcal{V}_k dans l'équation (1) et $\mathbb{1}_{\Omega} : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$ désigne la fonction indicatrice.

Par conséquent, pour résoudre l'élasticité linéaire dans le contexte multi-patch, nous considérons l'approche de pénalité formulée dans [1]. Le concept clé de cette approche est d'introduire une autre forme bilinéaire $b_{kl} : H_d^1(\mathcal{D}_k) \times H_d^1(\mathcal{D}_l) \rightarrow \mathbb{R}$ qui impose la continuité entre les interfaces des patches k et l . Un choix possible pour b_{kl} est le suivant :

$$b_{kl}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \int_{\gamma_{kl}} (\text{tr}_{kl}\mathbf{u}_k - \text{tr}_{lk}\mathbf{u}_l)(\text{tr}_{kl}\mathbf{v}_k - \text{tr}_{lk}\mathbf{v}_l) d\gamma_{kl} \quad (12)$$

où tr_{kl} désigne l'opérateur de trace de frontière dans l'interface interne γ_{kl} et α_{kl} est un facteur de pénalité élevé pour l'interface γ_{kl} .

Le problème d'élasticité linéaire en multi-patch peut alors être résolu en trouvant $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_k\} \in \prod_k H_d^1(\mathcal{D}_k)$:

$$\sum_k a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k>l} \alpha_{kl} b_{kl}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \sum_k L_k(\mathbf{v}_k) \quad \forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_k\} \in \prod_k H_d^1(\mathcal{D}_k) \quad (13)$$

5 Problème d'optimisation topologique

Nous commençons par introduire la fonction de coût $\mathcal{J} : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans l'équation (14), où $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ est l'ensemble de parties de \mathcal{D} . Cette fonction évalue la performance d'une certaine forme multi-patch Ω , comme une composition de la complianc et du volume. À cette fin, nous considérons un multiplicateur de Lagrange fixe $\Lambda > 0$ pour pénaliser l'augmentation du volume lors de l'optimisation. Il s'agit d'une technique classique, utilisée dans [4, 3, 14, 9], pour tenter d'augmenter simultanément la rigidité de la forme Ω et réduire son volume.

$$\mathcal{J}(\Omega) = \underbrace{\sum_k \int_{V_k} \boldsymbol{\sigma}_{\phi_k}(\mathbf{u}_k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) dV_k}_{\text{complianc}} + \Lambda \underbrace{\sum_k \int_{V_k} \mathbb{1}_{\Omega_k} dV_k}_{\text{volume}} \quad (14)$$

Considérons maintenant l'ensemble des formes admissibles, définies comme $\mathcal{U}_{ad} = \{\Omega \subset \mathcal{D} : \partial\Omega_n = \partial\mathcal{D}_n \text{ et } \partial\Omega_d \subset \partial\mathcal{D}_d\}$. Alors, l'optimisation peut être simplement résumée en trouvant la forme optimale $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$ telle que :

$$\mathcal{J}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}(\Omega),$$

sous contrainte de (13) (15)

Champs de régularisation dans l'espace tangent : Étant donné que notre objectif est de trouver la distribution de matériau optimale sur la surface moyenne \mathcal{D} , nous proposons de construire un champ de vitesse qui a des valeurs sur le fibré tangent de la variété \mathcal{D} . Si nous transformons une forme $\Omega^{(0)}$ avec la transformation $T_\theta = \text{id} + \theta$, nous souhaitons nous assurer que $T_\theta(\Omega^{(0)})$ se trouve à l'intérieur du domaine d'optimisation \mathcal{D} .

Avec cette condition à l'esprit, considérons l'espace de Sobolev qui satisfait les conditions suivantes :

$$\Theta(\mathcal{D}_k) = \left\{ \vartheta_k \in (H^1(\mathcal{D}_k))^3 : \vartheta_k \cdot \mathbf{a}^3 = 0 \text{ dans } \mathcal{D}_k \text{ et } \vartheta_k \cdot \mathbf{t}_n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D}_k \setminus \bigcup_{l=1}^K \gamma_{kl} \right\} \quad (16)$$

où $\mathbf{t}_n \in T(\mathcal{D}_k)$ est la normale unitaire sortante de $\partial\mathcal{D}_k$ dans l'espace tangent et \mathbf{a}^3 représente la base contravariante sur la surface moyenne, obtenue par $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_i^j$.

Considérons maintenant comment calculer la dérivée de forme de la fonction de coût dans l'équation (14). Généralement, dans le contexte de la compliance, la dérivée de forme est exprimée sous forme d'intégrale de bord, comme démontré dans les travaux [4, 3]. Cependant, nous avons choisi une formulation alternative sous forme d'intégrale de volume, fournie par [9], qui offre une implémentation plus simple. Dans le contexte de l'IGA multi-patch, on prend $\vartheta = \{\vartheta_k\} \in \prod_k \Theta(\mathcal{D}_k)$, et nous adaptons l'expression de la dérivée de forme comme suit :

$$j'(\Omega)(\vartheta) = \sum_k \int_{\mathcal{D}_k} (2\nabla \mathbf{u}_k^T \sigma_{\phi_k}(\mathbf{u}_k) - \sigma_{\phi_k}(\mathbf{u}_k) : e(\mathbf{u}_k) \mathbf{I}) : \nabla \vartheta_k + \Lambda \sum_k \int_{\Omega_k} \text{div} \vartheta_k, \quad (17)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité de second ordre.

À partir de la définition de l'espace fonctionnel $\Theta(\mathcal{D}_k)$ des champs de vitesse, on peut maintenant proposer sa relation avec la dérivée de forme de j . On considère un problème de régularisation sous la forme d'un problème d'identification en utilisant un produit scalaire sur $\Theta(\mathcal{D}_k)$. Considérons d'abord le cas **single-patch**, le problème de régularisation pourrait être énoncé par le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } \theta \in \Theta(\mathcal{D}) \text{ t.q. } \int_V \nabla_{\mathcal{D}} \theta : \nabla_{\mathcal{D}} \vartheta = -j'(\Omega)(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta(\mathcal{D}) \quad (18)$$

Cette approche peut facilement être généralisée à un cas **multi-patch**, de manière similaire à ce qui a été proposé pour le cas de l'élasticité linéaire, grâce à la même approche de pénalité. Par conséquent, le problème de régularisation vise à trouver le champ $\theta = \{\theta_k\} \in \prod_k \Theta(\mathcal{D}_k)$ de telle sorte que :

$$\sum_k \int_{V_k} \nabla_{\mathcal{D}} \theta_k : \nabla_{\mathcal{D}} \vartheta_k + \sum_{k>l} \beta_{kl} b_{kl}(\theta_k, \vartheta_k) = - \sum_k j'(\Omega_k)(\vartheta_k) \quad \forall \vartheta = \{\vartheta_k\} \in \prod_k \Theta(\mathcal{D}_k) \quad (19)$$

où β_{kl} est un coefficient de pénalité pour l'interface interne γ_{kl} .

Nous notons que, dans le cas multi-patch, un champ de régularisation donné $\theta \in \prod_k \Theta(\mathcal{D}_k)$ a la condition $\mathbf{t}_n \cdot \theta_k = 0$ sur la frontière externe pour tout k . Sur la Figure 5, nous illustrons sur un système multi-patch comment appliquer les conditions limites sur les frontières selon leur nature.

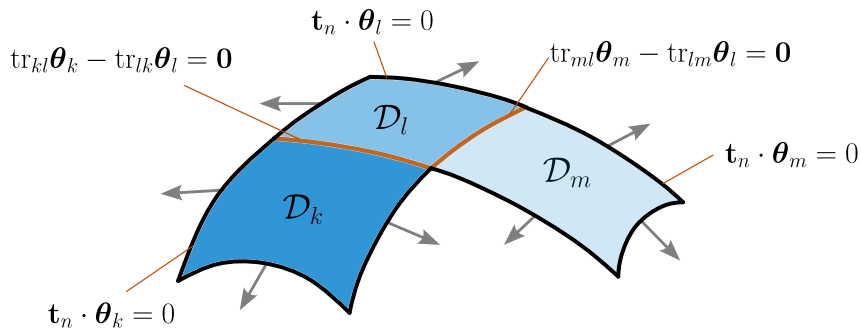


FIGURE 5 – Illustration des conditions limites pour le problème de régularisation multi-patch. Les frontières externes de \mathcal{D} ont la condition d'orthogonalité $\theta_k \cdot \mathbf{t}_n = 0$ pour tout k . Les interfaces internes sont traitées avec l'approche de pénalité, où on cherche à garantir la continuité de θ_k et θ_l sur γ_{kl} .

6 Résultats numériques

Les résultats numériques issues des techniques ici décrites peuvent être visualisés sur la Figure 6. Les géométries considérées ici ont été adimensionalisées. Ainsi, le module de Young a été fixé à $E = 1$ pour la phase forte et $E = 10^{-3}$ pour la phase faible, tandis que le coefficient de Poisson a été fixé à $\nu = 0.3$ pour les deux phases. Tous les changements indiqués sur la figure sont de module unitaire.

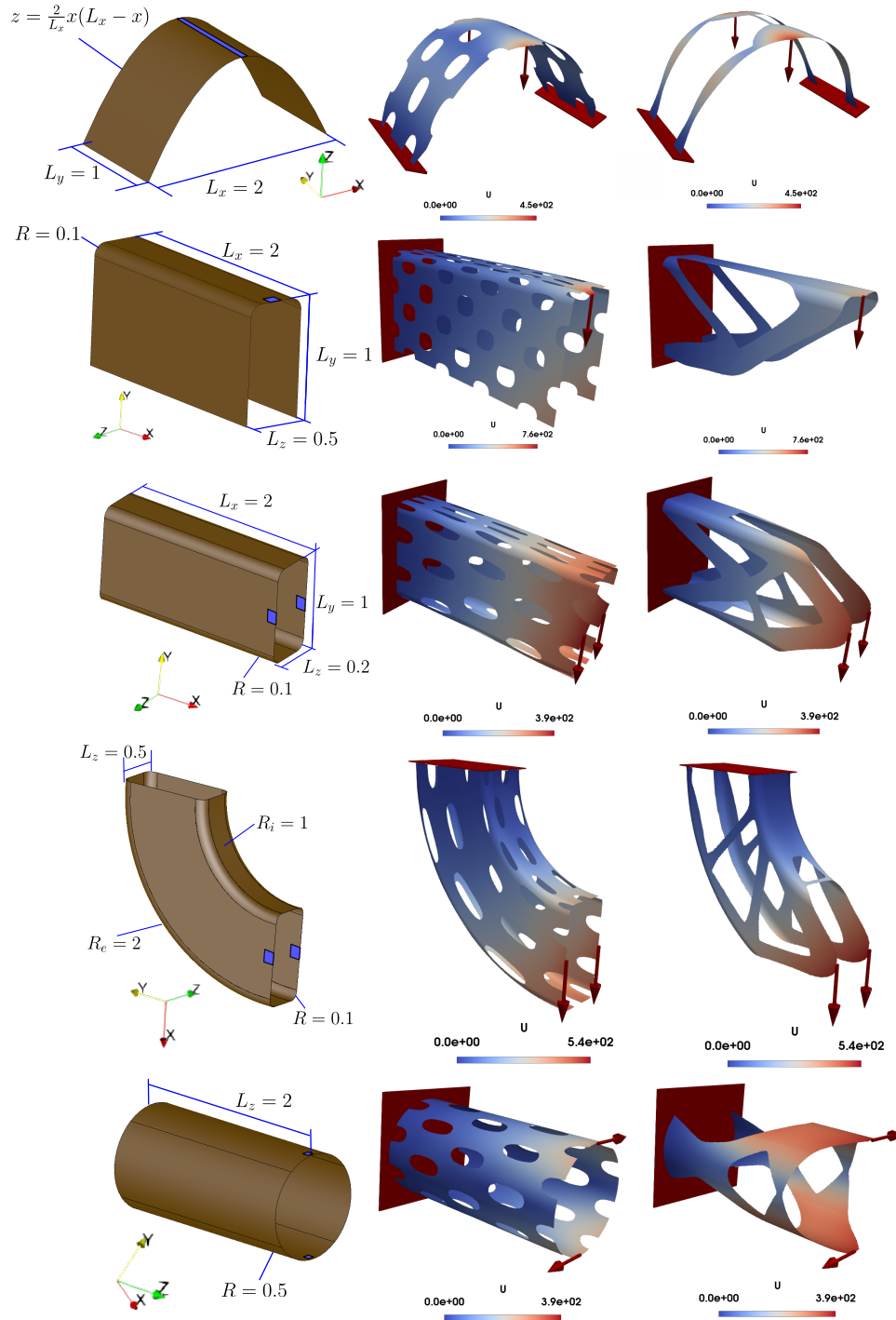


FIGURE 6 – Résultats numériques de l'optimisation topologique. Chaque ligne montre une géométrie étudiée. De gauche à droite on montre le domaine d'optimisation, la forme initiale et la solution finale toutes les deux déformées. Les zones en bleu représentent une zone de raideur ajoutée artificiellement dans la matrice de raideur du problème de régularisation.

Références

- [1] Nicolas ADAM, Patrick TALLEC et Malek ZARROUG. *Multipatch isogeometric mortar methods for thick shells*. In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 372 (déc. 2020), p. 113403. DOI : 10.1016/j.cma.2020.113403.
- [2] Filippo AGNELLI, Grigor NIKA et Andrei CONSTANTINESCU. *Design of thin micro-architected panels with extension–bending coupling effects using topology optimization*. In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 391 (mars 2022), p. 114496. DOI : 10.1016/j.cma.2021.114496.
- [3] Grégoire ALLAIRE. *Conception Optimale de Structures*. Springer Berlin Heidelberg, jan. 2007. DOI : 10.1007/978-3-540-36856-4.
- [4] Grégoire ALLAIRE, François JOUVE et Anca-Maria TOADER. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method* 1*. In : Journal of Computational Physics 194 (fév. 2004), p. 363-393. DOI : 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
- [5] Ruben ANSOLA et al. *An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures*. In : Computers & Structures - COMPUT STRUCT 80 (mars 2002), p. 449-458. DOI : 10.1016/S0045-7949(02)00019-6.
- [6] Philippe G. CIARLET et Cristinel MARDARE. “An Introduction to Shell Theory”. In : *Differential Geometry : Theory and Applications*. 9. Higher Education Press World Scientific, 2008, p. 94-184. DOI : 10.1142/9789812771476_0002. URL : <https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01077558>.
- [7] Luca DEDE, Michael BORDEN et Thomas HUGHES. *Isogeometric Analysis for Topology Optimization with a Phase Field Model*. In : Archives of Computational Methods in Engineering 19 (sept. 2012). DOI : 10.1007/s11831-012-9075-z.
- [8] Seongyeol GOO et al. *Topology optimization of thin plate structures with bending stress constraints*. In : Computers & Structures 175 (oct. 2016). DOI : 10.1016/j.compstruc.2016.07.006.
- [9] Antoine LAURAIN. *A level set-based structural optimization code using FEniCS*. In : Structural and Multidisciplinary Optimization 58 (mai 2017). DOI : 10.1007/s00158-018-1950-2.
- [10] Benjamin MARUSSIG et Thomas HUGHES. *A Review of Trimming in Isogeometric Analysis : Challenges, Data Exchange and Simulation Aspects*. In : Archives of Computational Methods in Engineering 25 (juin 2017), p. 1-69. DOI : 10.1007/s11831-017-9220-9.
- [11] Thuan HO-NGUYEN-TAN et Hyun-Gyu KIM. *Level set-based topology optimization for compliance and stress minimization of shell structures using trimmed quadrilateral shell meshes*. In : Computers & Structures 259 (nov. 2021), p. 106695. DOI : 10.1016/j.compstruc.2021.106695.
- [12] Grigor NIKA et Andrei CONSTANTINESCU. *Design of multi-layer materials using inverse homogenization and a level set method*. In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 346 (avr. 2019), p. 388-409. DOI : 10.1016/j.cma.2018.11.029.
- [13] Emad SHAKOUR et Oded AMIR. *Topology optimization with precise evolving boundaries based on IGA and untrimming techniques*. In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 374 (fév. 2021), p. 113564. DOI : 10.1016/j.cma.2020.113564.
- [14] Ole SIGMUND. *Sigmund, O. : A 99 Line Topology Optimization Code Written in MATLAB. Structural and Multidisciplinary Optimization 21, 120-127*. In : Structural and Multidisciplinary Optimization 21 (avr. 2001), p. 120-127. DOI : 10.1007/s001580050176.
- [15] Y. Bazilevs T.J.R. HUGHES J.A. Cottrell. “NURBS as a Pre-Analysis Tool : Geometric Design and Mesh Generation”. In : *Isogeometric Analysis : Toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, Ltd, 2009. Chap. 2, p. 19-68. ISBN : 9780470749081. DOI : <https://doi.org/10.1002/9780470749081.ch2>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9780470749081.ch2>.
- [16] Wolfgang WALL, Moritz FRENZEL et Christian CYRON. *Isogeometric structural shape optimization. Comput Methods Appl Mech Eng*. In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - COMPUT METHOD APPL MECH ENG 197 (juin 2008), p. 2976-2988. DOI : 10.1016/j.cma.2008.01.025.
- [17] Michael WANG, Xiaoming WANG et Dongming GUO. *A level set method for structural topology optimization*. In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192 (jan. 2003), p. 227-246. DOI : 10.1016/S0045-7825(02)00559-5.
- [18] Yingjun WANG et David BENSON. *Isogeometric analysis for parameterized LSM-based structural topology optimization*. In : Computational Mechanics 57 (jan. 2016). DOI : 10.1007/s00466-015-1219-1.
- [19] Manman XU, Shuting WANG et Xianda XIE. *Level set-based isogeometric topology optimization for maximizing fundamental eigenfrequency*. In : Frontiers of Mechanical Engineering 14 (fév. 2019). DOI : 10.1007/s11465-019-0534-1.