

Des méthodes de perturbation pour l'étude des vibrations libres et forcées de structures composites à base de fibres de lin.

V. Couillard¹, M. Ziapkoff¹, K. Chikhaoui¹, L. Duigou¹, J.M. Cadou¹

¹ IRDL, CNRS UMR 6027, IRDL, F-56100 Lorient, France, {jean-marc.cadou@univ-ubs.fr}

Résumé — Nous proposons dans ce travail deux méthodes numériques pour déterminer l'amortissement de structures composites à bases de fibres de lin. Ces deux méthodes sont basées sur les techniques de perturbation. La première méthode est appliquée au problème de vibrations libres. Elle consiste à résoudre le problème aux valeurs propres non linéaires en associant les techniques d'homotopie et de perturbation. Pour les vibrations forcées, nous utilisons une méthode asymptotique numérique. Pour ces deux méthodes, la difficulté provient du caractère non linéaire des lois de comportements considérées pour la structure composite. Ainsi, afin de satisfaire la dépendance de l'amortissement avec la fréquence, les lois de Maxwell Généralisé et de Zener fractionnaire sont utilisées. Des simulations numériques de structures composites à base de fibres de lin permettent de comparer les performances des deux algorithmes proposés.

Mots clefs — Méthodes de perturbation, vibrations libres et forcées, matériaux composites biosourcés.

1. Introduction

Les structures composites sont aujourd'hui largement utilisées dans de nombreux secteurs industriels (transport, construction navale, ...) grâce notamment à leur bon compromis poids/rigidité. Un des enjeux industriels actuel est de remplacer les traditionnelles fibres issues de la pétrochimie par des fibres naturelles ou biosourcées. Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement aux fibres de lin. Ces dernières ont l'avantage de présenter un amortissement supérieur aux fibres synthétiques [1]. Des essais expérimentaux [1, 2] ont également montré que cet amortissement dépendait de la fréquence (*i.e.* l'amortissement structural n'est pas le même pour tous les modes de vibration). Cette étude s'inscrit dans le projet ANR Bio-Damping qui a comme objectif principal de modéliser les propriétés amortissantes d'un pli (matrice/fibres de lin) pour prédire l'amortissement de structures composites biosourcées. Il s'agit notamment de caractériser cette dépendance en fréquence en proposant plusieurs lois d'évolution des propriétés mécaniques. Dans ce travail nous proposons deux méthodes numériques pour déterminer l'amortissement de ces structures composites. La première consiste à résoudre le problème aux vibrations libres en utilisant un algorithme de Newton d'ordre élevé [3]. Pour la seconde méthode, nous proposons de résoudre le problème aux vibrations forcées en utilisant une Méthode Asymptotique Numérique. Ces deux méthodes ont pour point commun d'utiliser une méthode de perturbation (développement asymptotique). Nous présentons dans ce papier ces deux méthodes de résolution. Une comparaison numérique de ces méthodes sur un exemple de plaque composite à base de fibres de lin est proposée.

2. Equations à résoudre

2.1. Equations

L'objectif de cette étude est de déterminer l'amortissement de structures composites composées de fibres de lin (Flax CEF22085) et d'une résine époxy (SR InfuGreen 810 avec un durcisseur de type SD 8823 fourni par la société SICOMIN). Pour cela nous considérons de deux types de résolution du problème de vibrations. La première consiste à résoudre le problème de vibrations libres de ce composite stratifié et pour la seconde nous étudions le problème de vibrations forcées. Le point commun entre ces deux études réside dans l'utilisation de méthodes de perturbation pour résoudre ces deux problèmes. La discrétisation spatiale est réalisée en considérant la méthode des éléments finis et

en utilisant la théorie du cisaillement du premier ordre. L'élément utilisé est un élément coque à 8 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. Le comportement du stratifié est considéré dans cette étude comme isotrope transverse. Nous distinguons alors trois directions principales : la direction des fibres, dite longitudinale notée "L" et les deux directions perpendiculaires appelées transversales notées "T" et "T'".

Les équations discrétisées d'un problème de vibrations libres s'écrivent :

$$[K^*(\omega^*) - \omega^{*2}M]\{U^*\} = \{0\} \quad (1)$$

Pour un problème de vibrations forcées et en considérant une force harmonique d'intensité F et de fréquence ω , les équations discrétisées sont :

$$[K^*(\omega) - \omega^2M]\{U^*\} = \{F\} \quad (2)$$

Dans les précédentes équations, l'exposant '*' signifie que les quantités considérées sont complexes. Les symboles K et M désignent respectivement les matrices de rigidité et de masse de la structure composite. A noter que pour la suite de la résolution, nous introduisons la pulsation Ω dans les deux équations précédentes définie par :

$$\Omega^* = \omega^{*2} \text{ pour (1) ou } \Omega = \omega^2 \text{ pour (2)} \quad (3)$$

Pour ces deux problèmes, les propriétés matériaux dépendent de la pulsation [3] qu'elle soit considérée complexe (problème de vibrations forcées) ou réelle (problème de vibrations libres). Cette dépendance en la fréquence peut être représentée par une loi de comportement viscoélastique. Ici, nous considérons deux types de loi de comportement. Le premier modèle rhéologique considéré est le modèle de Maxwell Généralisé. Dans ce cas, l'évolution des modules du stratifié ($\Lambda^* = \{E_L^*, ET^*, GLT^*\}$) fonction de la fréquence ϖ (ω^* ou ω en fonction du problème considéré) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\Lambda^*(\varpi) = \Lambda_0 + \sum_{b=1}^{Nmax} \frac{j\varpi\Lambda_b}{\Lambda_b + j\varpi\eta_b} \quad (4)$$

Où « b » désigne le nombre de branches du modèle de Maxwell (dans cette étude b=4), Λ_i et η_i désignent respectivement la partie élastique et la viscosité du module et de la branche considérée. Le second modèle rhéologique considéré est le modèle de Zener fractionnaire défini par l'expression suivante :

$$\Lambda^*(\varpi) = \Lambda_0 + \frac{(\Lambda_\infty - \Lambda_0)(j\varpi\tau)^\alpha}{1 + (j\varpi\tau)^\alpha} \quad (5)$$

Où α est l'ordre de l'opérateur de dérivation (compris entre 0 et 1) et τ est le temps de relaxation. L'écriture précédente n'est pas la forme classique du modèle mais nous permet, comme pour le modèle de Maxwell généralisé de séparer les parties élastique et visqueuses. Ainsi dans les équations (1) et (2), la matrice $K^*(\varpi)$ peut alors être décomposée en partie élastique et une partie visqueuse dépendant de la fréquence ϖ :

$$[K^*(\varpi)] = [K_0 + K_v^*(\varpi)] \quad (6)$$

2.2. Méthode itérative et technique d'homotopie pour les vibrations libres.

Dans le cas de l'étude des vibrations libres, nous utilisons un algorithme itératif afin de déterminer les couples fréquences et modes solutions du problème (1). Nous cherchons alors ces inconnues sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U^* = U_0^* + \Delta U^* \\ \Omega^* = \Omega_0^* + \Delta \Omega^* \end{cases} \quad (7)$$

Où le couple (U_0^*, Ω_0^*) est une solution connue. Pour la première itération il est choisi égal aux solutions du problème de vibrations libres non amorties. En introduisant ces relations dans l'équation (1), on obtient :

$$L^*\Delta U^* + \Delta \Omega^* M U_0^* = -R_0 - \Delta K_v^* U_0^* - \Delta K_v^* \Delta U^* - \Delta \Omega^* M \Delta U^* \quad (8)$$

Avec les opérateurs linéaire L^* et de résidu R_0 définis par :

$$\begin{cases} L^* = K_0 + K_v^*(\omega_0^*) + \Omega_0^* M \\ R_0 = L^* U_0^* \end{cases} \quad (9)$$

Il est à noter que la matrice de rigidité étant dépendante de ϖ , elle est également recherchée sous la forme incrémentale. Comme le problème (8) présente un nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations, nous ajoutons une condition d'orthogonalité afin d'obtenir un problème bien posé, soit :

$$U^{*T} M U_0^* = 0 \quad (10)$$

Pour résoudre le problème non linéaire, nous proposons d'utiliser une technique d'homotopie. Cela consiste à modifier le problème (8) en introduisant un paramètre, ε , dont la valeur est comprise entre 0 et 1. Cette équation se réécrit alors :

$$L^* \Delta U^* + \Delta \Omega^* M U_0^* = -\varepsilon R_0 - \varepsilon \Delta K_v^* U_0^* - \Delta K_v^* \Delta U^* - \Delta \Omega^* M \Delta U^* \quad (11)$$

Cette équation comme l'équation (2) va alors être résolue en utilisant une technique de perturbation, ε étant dans ce cas le paramètre de perturbation.

3. Méthode de perturbation

3.1. Développements en séries

Les inconnues des problèmes (2) et (11), rassemblés symboliquement en un vecteur X , sont cherchées sous la forme d'un développement en séries entières d'un paramètre, dénoté ici κ , et tronqué à l'ordre N :

$$X = \sum_{i=0}^N \kappa^i X_i \quad (12)$$

Dans le cas des vibrations forcées, ce vecteur inconnu peut s'écrire :

$$X = \{\omega, \Omega, U^*, K_v^*, \Lambda^*\} \quad (13)$$

Et dans ce cas, le paramètre de perturbation, noté « a », est un paramètre de chemin défini par une méthode de pseudo arc-length, soit :

$$a = \langle U^* - U_0^*, U_1^* \rangle + (\Omega - \Omega_0) \Omega_1 \quad (14)$$

où l'opérateur \langle, \rangle désigne le produit scalaire Euclidien. Les développements asymptotiques précédents sont introduits dans les équations du problème et en identifiant suivant les puissances de κ , on obtient un ensemble de problèmes linéaires à résoudre. Ainsi pour le problème en vibrations forcées, on obtient :

Ordre 0 en κ :

$$[L^*] \{U_0^*\} = \{F\} \quad (15)$$

Ordre 1 en κ :

$$\begin{cases} [L^*] \{U_1^*\} = -\Omega_1 [M] \{U_0^*\} - [K_{v1}^*] \{U_0^*\} \\ \mathbf{1} = \langle U_1^*, U_1^* \rangle + \Omega_1^2 \end{cases} \quad (16)$$

Ordre $p > 1$ en κ :

$$\begin{cases} [L^*] \{U_p^*\} = -\sum_{r=1}^{p-1} \{\Omega_r [M] \{U_{(p-r)}^*\} + [K_{vr}^*] \{U_{(p-r)}^*\}\} \\ \mathbf{1} = \langle U_p^*, U_1^* \rangle + \Omega_p \Omega_1 \end{cases} \quad (17)$$

où l'opérateur L^* est celui défini dans l'expression (9) en considérant ω_0 et Ω_0 réels. Les expressions sont quasi-identiques pour le problème aux vibrations libres. La résolution de l'ensemble des problèmes linéaires précédents permet de déterminer les inconnues X à chaque ordre. Ces solutions polynomiales (exceptée la matrice K_v^* quel que soit le problème considéré) sont ensuite remplacées par des fractions équivalentes [4], appelées approximants de Padé et définis par :

$$X(\kappa) - X_0 = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(\kappa) X_i \quad (18)$$

où les fonctions $f_i(\kappa)$ sont des fractions du paramètre de perturbation κ .

A l'issue du calcul de ces solutions à chaque ordre, il faut d'une part, établir pour le problème de vibrations forcées le domaine de validité de ces approximations polynomiales et d'autre part, pour le problème libre, regarder si la résolution a convergé.

Pour ce dernier, la valeur $\kappa = \mathbf{1}$ est introduite dans l'expression (18) et le résidu R_0 est alors calculé (9). Si la norme de ce résidu est inférieure à une tolérance définie par l'utilisateur le calcul s'arrête. Si ce n'est pas le cas, une seconde itération est calculée en considérant comme valeur initiale la solution qui vient d'être calculée. Pour les vibrations forcées, le domaine de validité (*i.e.* la valeur κ_{\max}) des

approximants de Padé est déterminé grâce à une méthode de dichotomie définie dans [5]. Cette valeur est ensuite introduite dans l'expression (18). Cela permet de calculer un nouveau point de départ \mathbf{X}_0 et d'appliquer à nouveau la méthode de perturbation. Cette méthode de continuation est réalisée jusqu'à atteindre la valeur maximale de la pulsation d'excitation définie par l'utilisateur.

3.2. Cas des modules rhéologiques Λ^* .

La difficulté pour ces méthodes de perturbation est d'exprimer à chaque ordre les matrices visqueuses \mathbf{K}_v^* . Ces matrices dépendent des modules $\Lambda^*(\omega)$. Les modèles rhéologiques considérés dans ce travail, modèle de Maxwell Généralisé ou de Zener fractionnaire, sont non linéaires en la pulsation ω . Pour identifier à chaque ordre l'expression de ces modules (et donc les matrices visqueuses à chaque ordre), l'idée générale est de transformer les relations originales en relations quadratiques. La forme quadratique des équations du problème à résoudre étant la plus adaptée pour les méthodes de perturbation. Pour rendre ces équations quadratiques, nous suivons exactement la démarche initialement présentée dans [6] et généralisée dans [7]. Cependant, pour ne pas alourdir la rédaction de ce papier nous ne présentons pas ici ces transformations mais elles sont disponibles dans le papier [3] pour le modèle de Zener fractionnaire et dans la thèse [8] pour le modèle de Maxwell Généralisé.

4. Résultats

L'exemple numérique considéré pour valider les deux méthodes numériques est une plaque rectangulaire de dimension $0.272\text{m} \times 0.1\text{m}$ discrétisée en 32 éléments CQ86 composés de 121 nœuds au total. Ce stratifié est composé de 10 plis UD orienté à 0° .

Table 1 : Paramètres matériaux identifiés pour un pli époxy/lin, modèle de Zener fractionnaire.

	Λ_0 (GPa)	Λ_∞ (-)	τ (s)	α (-)
E_L^*	19.72	28.292	$7.762 \cdot 10^{-7}$	0.187
E_T^*	4.28	7.610	$7.762 \cdot 10^{-7}$	0.187
G_{LT}^*	1.12	2.100	$7.762 \cdot 10^{-7}$	0.187

Table 2 : Paramètres matériaux identifiés pour un pli époxy/lin, modèle de Maxwell Généralisé à 4 branches.

	Λ_1 (Pa)	Λ_2 (Pa)	Λ_3 (Pa)	Λ_4 (Pa)	η_1 (Pa.s)	η_2 (Pa.s)	η_3 (Pa.s)	η_4 (Pa.s)
E_L^*	$5.882 \cdot 10^8$	$2.177 \cdot 10^8$	$1.742 \cdot 10^8$	$9.079 \cdot 10^7$	$2.155 \cdot 10^4$	$9.694 \cdot 10^4$	$8.549 \cdot 10^4$	$8.338 \cdot 10^4$
E_T^*	$8.931 \cdot 10^7$	$1.295 \cdot 10^8$	$1.911 \cdot 10^5$	$2.538 \cdot 10^8$	$2.439 \cdot 10^4$	$2.379 \cdot 10^5$	$3.518 \cdot 10^6$	$9.376 \cdot 10^3$
G_{LT}^*	$8.562 \cdot 10^8$	$1.231 \cdot 10^8$	$5.008 \cdot 10^8$	$4.584 \cdot 10^7$	$2.109 \cdot 10^3$	$4.872 \cdot 10^6$	$8.608 \cdot 10^2$	$2.227 \cdot 10^4$

Table 3 : Fréquence amortie (f_a) et facteur de perte structural (η_s) obtenus par l'algorithme itératif. Comparaison avec les valeurs mesurées expérimentalement pour les cinq premiers modes de flexion.

	Mode	Valeur expérimentale	Maxwell Généralisé	Zener Fractionnaire
f_a (Hz)	Mode 1	36.96	39.68	40.31
	Mode 2	229.91	248.36	252.5
	Mode 3	630.96	693.28	703.45
	Mode 4	1219.58	1347.2	1366.9
	Mode 5	2009.72	2207	2238.6
η_s	Mode 1	0.0226	0.0033	0.088
	Mode 2	0.0131	0.0132	0.0116
	Mode 3	0.0133	0.0135	0.0136
	Mode 4	0.0139	0.014	0.0152
	Mode 5	0.0164	0.0166	0.0166

L'épaisseur de chaque pli est de 0.433 mm. Des simulations avec des orientations différentes ont également été réalisées mais ne sont pas présentées dans ce document. Les valeurs des paramètres matériaux pour les deux lois considérées ont été déterminées grâce à une campagne expérimentale menée sur des échantillons de type poutre [8]. L'identification de ces paramètres a été réalisée à l'aide d'un algorithme du simplexe de Nelder-Mead [9]. Le résultat de cette identification est donné dans les tableaux 1 et 2 respectivement pour le modèle de Zener fractionnaire et de Maxwell Généralisé. Le coefficient de Poisson et la masse volumique pour la fibre de lin ont également été déterminés expérimentalement et sont $\nu = 0.36$ et $\rho = 1206.57 \text{ kg.m}^{-3}$.

Les résultats (fréquence amortie et facteur de perte structural) pour l'algorithme itératif sont donnés dans le tableau 3. A noter que ces valeurs sont déterminées à partir des expressions suivantes :

$$\begin{cases} f_a = \frac{\sqrt{(\omega^r)^2 - (\omega^i)^2}}{2\pi} \\ \eta_s = \frac{2\omega^r \omega^i}{(\omega^r)^2 - (\omega^i)^2} \end{cases} \quad (19)$$

où ω_r et ω_i désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de la pulsation complexe ω^* .

Ces résultats sont obtenus avec une seule itération de la méthode itérative en utilisant un ordre de troncature égal à 20 et une tolérance sur le résidu choisie égale à 10^{-8} . Ils sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus par le Laboratoire LEM3 à Metz à l'aide d'un dispositif de pot vibrant [8].

Figure 1 : Evolution du déplacement vertical en différents points de la plaque en fonction de la fréquence, à gauche modèle de Maxwell Généralisé et à droite modèle de Zener fractionnaire.

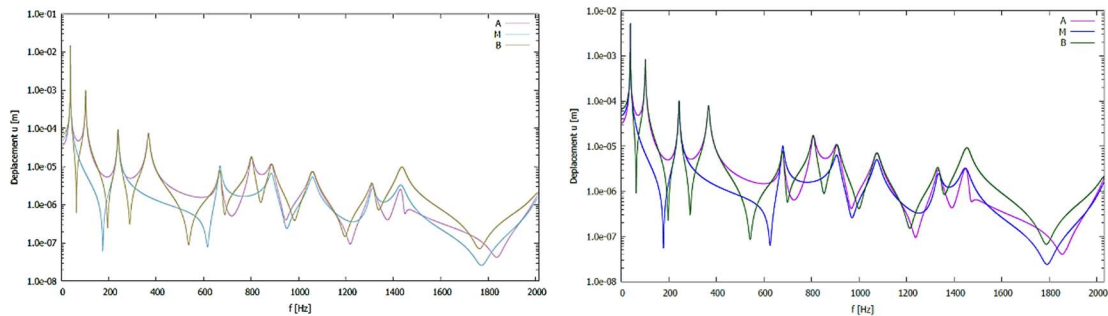
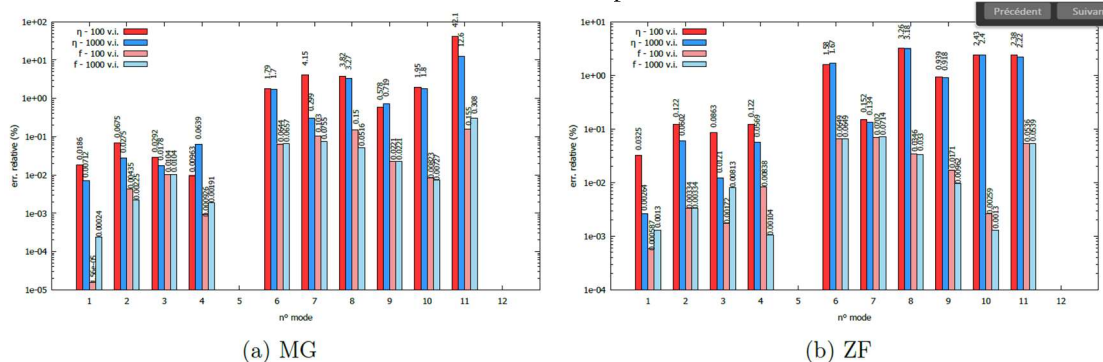


Figure 2 : Erreur relative entre les résultats obtenus avec les vibrations forcées et les vibrations libres pour les deux modèles de comportement.



Les courbes réponses, déplacement (amplitude de la réponse complexe) en fonction de la fréquence d'excitation, sont montrées sur la figure 1. Pour ces simulations numériques, le facteur de perte structural est déterminé à partir de la méthode de la bande passante. L'erreur relative entre les deux problèmes de vibration étudiés est présentée sur la figure (2) pour les deux modèles rhéologiques. Dans ces figures, les nombres 100 et 1000 désignent le nombre de points pris (nombre de valeurs du paramètre 'a' par pas de continuation pour reconstruire la solution MAN). Ce nombre de points est relativement important et se justifie par la précision nécessaire au calcul de l'amortissement par la méthode de la bande passante. A noter que ce nombre de points ne pénalise pas les temps de calculs

nécessaires à la résolution par la MAN. Les courbes de la figure (2) montrent que l'erreur relative entre les résultats obtenus à l'aide de l'algorithme itératif et ceux obtenus par la MAN sont relativement proches (moins de 1% d'erreur).

Table 4 : Comparaison des temps de calculs et du nombre de pas de continuation avec la MAN pour obtenir la courbe réponse de la figure 1. Cas du modèle rhéologique de type Maxwell Généralisé.

	Temps de calculs (s)	Nombre de pas de continuation (MAN)
Représentation polynomiale	2150	261
Approximants de Padé	1284	157

Les différences entre les deux algorithmes se situent au niveau du temps de calcul nécessaire pour obtenir les informations. Le tableau (4) donne le nombre de pas de continuation nécessaire à la MAN pour obtenir les dix premiers modes de vibration en utilisant un ordre de troncature égal à 20. Ce tableau montre que l'utilisation des approximants de Padé permet de diminuer de manière importante le nombre de pas de calculs. Chaque pas de calcul nécessitant une triangulation de matrice, le nombre total de triangulations est cependant relativement important comparé à celui demandé par la méthode itérative. En effet, pour cette dernière, chaque mode de vibration et chaque valeur d'amortissement nécessite (en général) une seule triangulation de matrice, soit un total de 10 triangulations de matrice pour 10 modes.

5. Conclusion

Cette étude propose une comparaison numérique de deux méthodes, basées sur des méthodes de perturbation, permettant de caractériser l'amortissement de structures composites à base de fibres de lin. Ces deux méthodes donnent exactement les mêmes résultats et permettent d'accéder de manière efficace aux propriétés vibratoires de ces structures composites. Il est trivial de souligner que la résolution par la MAN du problème de vibrations forcées est la méthode numérique qui est la plus gourmande en temps de calculs. Cependant cette dernière a l'avantage d'obtenir la courbe réponse (déplacement vs fréquence) de manière continue. Cette propriété peut être intéressante dans l'optique de dimensionnement de structures composites. Cette étude se poursuit aujourd'hui en considérant des structures composites hybrides carbone/lin afin de bénéficier au mieux pour le composite des qualités de chaque fibre.

Références

- [1] A. El-Hafidi, P. Gning, B. Piezel, M. Belaïd, and S. Fontaine, Determination of dynamic properties of flax fibres reinforced laminate using vibration measurements, *Polymer Testing.*, vol. 57, pp. 219–225, 2017.
- [2] S. Mahmoudi, A. Kervoelen, G. Robin, L. Duigou, E. Daya, and J.-M. Cadou, Experimental and numerical investigation of the damping of flax–epoxy composite plates, *Compos. Struct.*, vol. 208, pp. 426–433, 2019.
- [3] M. Ziapkoff, L. Duigou, G. Robin, J.-M. Cadou, and E. M. Daya. A high order Newton method to solve structures considering fractional derivative Zener model. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Taylor & Francis, 2023.
- [4] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, A critical review of asymptotic numerical methods, *Archives of Computational Methods in Engineering* 5 (1998) 31–50.
- [5] A. Elhage-Hussein, M. Potier-Ferry et N. Damil, « A numerical continuation method based on Padé approximants », *International Journal of Solids and Structures*, t. 37 (46), p. 6981-7001, 2000
- [6] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps, J.M. Cadou, H.L. Cao, A. Elhage-Hussein, Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, t. 324, Série II b (1997), 171–177.
- [7] L. Guillot, B. Cochelin, C. Vergez, A generic and efficient Taylor series–based continuation method using a quadratic recast of smooth nonlinear systems, *Int. J. Num. Methods in Engineering* 119 (2019) 239-304.
- [8] M. Ziapkoff, Caractérisation et modélisation des propriétés viscoélastiques d'un pli époxy/fibres de lin pour prédire l'amortissement des structures composites biosourcées, Thèse, Université Bretagne Sud (Juin 2023).
- [9] J. A. Nelder et R. Mead, « A Simplex Method for Function Minimization », *The Computer Journal*, t. 7 (4), p. 308-313, 1965.