

# Un Algorithme d'Adaptation de Maillage pour la Simulation d'Écoulements à Surface Libre dans la Méthode des Éléments Finis-Particules (PFEM)

T. Leysens<sup>1</sup>, J. Lambrechts<sup>1</sup>, J-F. Remacle<sup>1</sup>

<sup>1</sup> iMMC, Université Catholique de Louvain, {thomas.leysens, jonathan.lambrechts, jean-francois.remacle}@uclouvain.be

**Résumé** — La méthode PFEM (*Particle Finite Element Method*) est une méthode adaptée aux écoulements à surfaces libres et aux interactions fluide-structure. Un ensemble de particules représente le fluide. A chaque pas de temps, celles-ci sont triangulées. Afin de pouvoir résoudre les équations de Navier-Stokes par une formulation éléments finis, un algorithme géométrique, l' $\alpha$ -shape, définit la forme du domaine. La qualité des éléments dans le maillage y joue un rôle primordial. Nous proposons une technique de remaillage basée sur une stratégie de raffinement de Delaunay. L'approche est présentée, suivie de quelques résultats montrant l'amélioration en termes de représentation de la surface libre.

**Mots clés** — PFEM, surfaces libres, adaptation de maillage.

## 1 Introduction

La méthode PFEM (*Particle Finite Element Method*)[1] est une méthode permettant de simuler des écoulements de fluides lors desquels la topologie du domaine évolue de façon significative. On peut citer les écoulements à surfaces libres, des interactions fluide-structure, des phénomènes de mouillage et séchage, etc. Dans ces écoulements, la géométrie du fluide varie fortement à cause de séparations et de raccordements de différentes parties du domaine. Ces phénomènes se rencontrent dans de nombreuses branches d'ingénierie : l'hydraulique (écoulements autour de ponts, objets flottants, ruptures de barrages), les méthodes additives (des fronts liquides-solides), en combustion, etc.

La difficulté principale dans la simulation numérique des écoulements à surface libre est directement liée à la modélisation de la géométrie de ces interfaces. En effet, la surface libre évolue dans le temps, parfois rapidement, ce qui engendre des variations dans sa géométrie, ses échelles et sa topologie. Il faut porter une attention spécifique sur les interfaces pour détecter et représenter ces changements.

La communauté fluide sépare généralement les méthodes de modélisation d'interfaces en deux catégories : les méthodes de *capturing* et de *tracking*[2]. Dans les méthodes de *capturing*, l'interface est représentée sur un maillage fixe, et celle-ci évolue à l'aide d'une équation d'advection. Dans les méthodes de *tracking*, le maillage est conforme à l'interface à tout moment. L'avantage majeur de cette deuxième catégorie est que l'interface est directement représentée dans la topologie du maillage, et que des discontinuités liées à l'interface peuvent par conséquent être appliquées directement. Le fait d'avoir un maillage conforme à l'interface à tout instant requiert cependant une adaptation de maillage régulière.

La méthode PFEM, faisant partie des méthodes de *tracking*, a été développée afin de faire face à cette complexité. Initialement développée pour des écoulements fluides[3], elle a été généralisée à des applications industrielles plus complexes comme les interactions fluide-structure [4], des glissements de terrain[5], et même des problèmes de mécanique du solide comme des problèmes d'extrusion[6].

En PFEM, le problème de détection d'interface est approché en effectuant un remaillage à chaque pas de temps. En effet, la seule information du maillage maintenue d'un pas de temps à l'autre est la position des noeuds du maillage, considérés comme des particules lagrangiennes. Au début de chaque pas de temps, on effectue donc une triangulation de Delaunay de ces particules. Cependant, ceci ne dé-

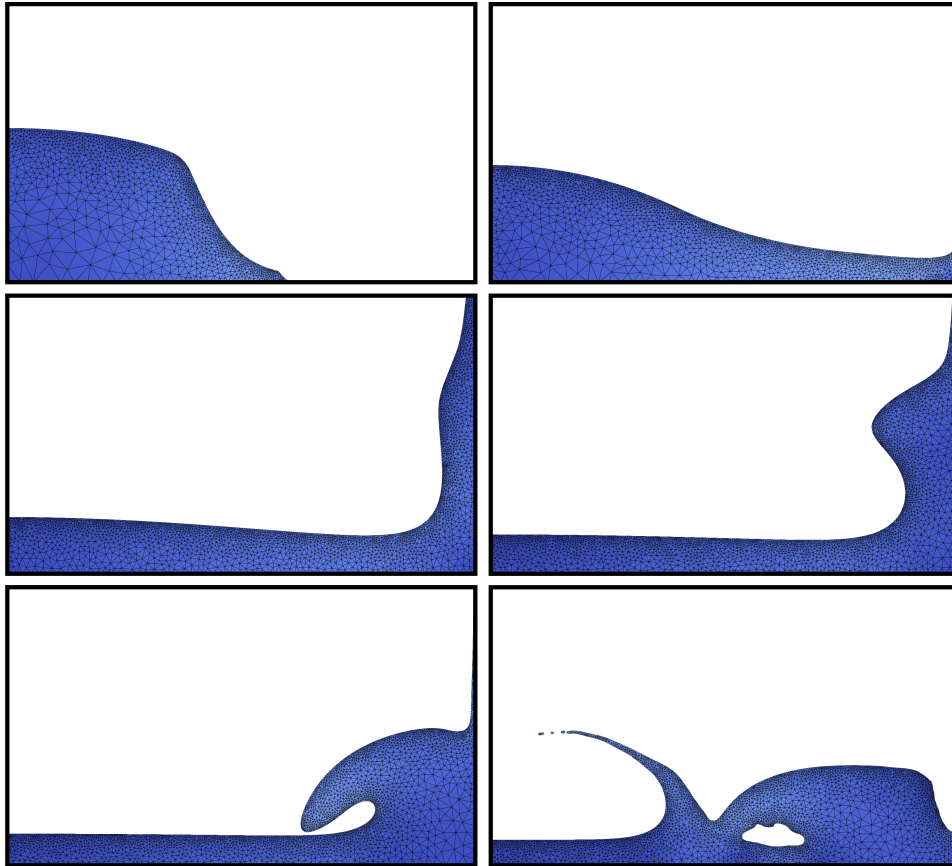


FIGURE 1 – Simulation d’une rupture de barrage par la méthode PFEM.

ne finit pas encore la forme du domaine fluide. En effet, la triangulation de Delaunay, dans son approche la plus simple, génère une forme convexe de l’ensemble des points. Afin de détecter la forme correcte du fluide, on applique l’algorithme des  $\alpha$ -shapes [7], qui définit la forme d’un nuage de points. En bref, l’ $\alpha$ -shape considère la triangulation de Delaunay du nuage de points, et définit la région fluide comme étant l’ensemble des éléments respectant un certain critère de qualité et de taille.

On voit ici l’importance d’avoir un maillage de haute qualité. Ceci est nécessaire, non seulement pour résoudre les équations par éléments finis avec précision, mais aussi et surtout afin que l’algorithme  $\alpha$ -shape détecte correctement le domaine fluide. C’est pourquoi nous proposons ici un algorithme d’adaptation de maillage qui se base sur des critères de qualité. Une fois le domaine et ses frontières définis, nous effectuons une insertion de points basée sur une stratégie de raffinement de Delaunay. La philosophie consiste à imposer une haute qualité de maillage à tout moment, et de raffiner sur base d’une carte de taille. Ceci améliore la robustesse de la méthode, car on retire l’approche parfois arbitraire de la détection des frontières du domaine avec un  $\alpha$ -shape classique. De plus, le fait d’utiliser une carte de taille permet d’accepter plus de raffinement dans des régions d’intérêt. Ceci permet de décrire l’évolution de la surface libre de façon précise, comme par exemple dans la simulation de rupture de barrage (*dam break*) de la figure 1.

L’algorithme de la méthode PFEM est décrit dans un premier temps. Ensuite, les équations physiques sont présentées, ainsi que les conditions limites et notre algorithme d’adaptation de maillage. Quelques résultats sont ensuite présentés, et nous terminons par des perspectives futures.

## 2 La méthode PFEM

L’algorithme général de la PFEM est résumé dans la figure 2. La vision de la PFEM est lagrangienne, c’est-à-dire que le fluide est représenté par un ensemble de particules matérielles, qui se déplacent

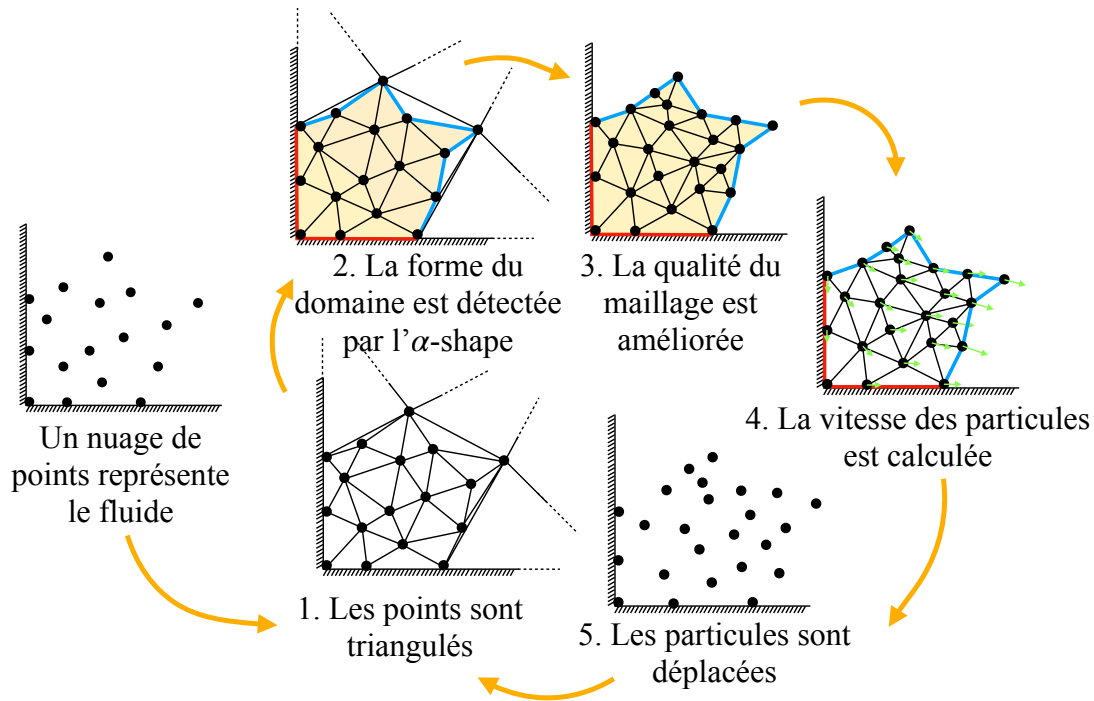


FIGURE 2 – Les différentes étapes d’une itération en PFEM.

avec le mouvement du fluide. Par ailleurs, celles-ci contiennent toute l’information du fluide (vitesse, pression, température,...), et la transfèrent d’un pas de temps à un autre. Afin de calculer l’évolution du fluide, ces particules sont triangulées à chaque pas de temps afin d’obtenir un maillage. Ensuite, l’ $\alpha$ -shape permet de détecter l’ensemble des éléments qui appartiennent au fluide, et de définir les frontières du domaine. Pour chaque triangle présent dans le domaine, on définit un critère comme suit :

$$\alpha_e = \frac{R_e}{\alpha(\mathbf{x}_e)} \quad (1)$$

où  $R_e$  est le rayon du cercle circonscrit de l’élément  $e$ , et  $\alpha(\mathbf{x}_e)$  est la valeur de la carte de taille  $\alpha(\mathbf{x})$  pour l’élément  $e$ . Si  $\alpha_e$  est inférieur à une certaine valeur limite, typiquement autour de 1.2, alors on considère que cet élément appartient au fluide. La figure 3 illustre cette méthode de détection du domaine fluide.

Une fois le domaine fluide défini, les équations de Navier-Stokes peuvent être résolues pour obtenir le champ de vitesse des particules. Pour ce faire, une approche classique par éléments finis est utilisée. C’est ici que repose une force de la PFEM par rapport à d’autres méthodes lagrangiennes : on exploite la base théorique forte des éléments finis pour résoudre les équations, et les conditions limites sont appliquées de façon identique à une formulation par éléments finis classique. Cela permet par ailleurs un couplage aisé avec un solveur solide dans le cadre des interactions fluide-structure.

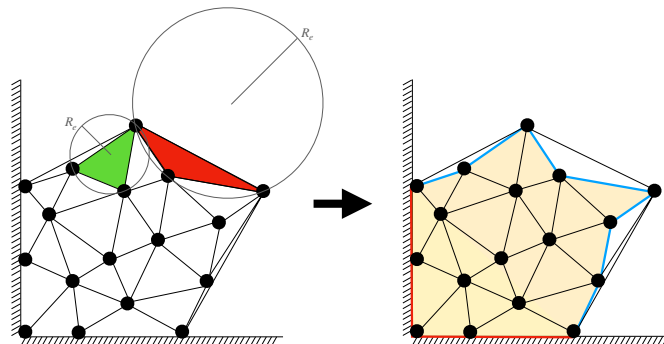


FIGURE 3 – L’ $\alpha$ -shape d’un nuage de points : l’ensemble des éléments respectant un critère de qualité et de taille forme le domaine fluide.

## 2.1 Les équations physiques

Nous considérons ici des écoulements de fluides incompressibles, nous résolvons donc les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

$\rho$  est la densité du fluide,  $\mathbf{u}$  sa vitesse,  $p$  la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\mathbf{g}$  la gravité. Notons que l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (2) est exprimée avec la dérivée matérielle de la vitesse, car nous résolvons pour la vitesse matérielle : nous recherchons la vitesse matérielle des particules, pour pouvoir mettre à jour leur position. Ceci constitue un autre avantage non négligeable de la méthode par rapport aux approches eulériennes, puisque le système à résoudre est linéaire.

Afin de les résoudre, ces équations sont discrétisées par une approche standard d'éléments finis linéaires [8]. Par ailleurs, la pression est stabilisée à l'aide d'un terme PSPG[9]. Enfin, une fois la vitesse  $\mathbf{U}_i^t$  des particules obtenue, nous pouvons mettre à jour leur position  $\mathbf{X}_i^t$  à l'aide d'un déplacement explicite :

$$\mathbf{X}_i^{t+1} = \mathbf{X}_i^t + \mathbf{U}_i^t \Delta t, \quad i = 1, \dots, n.$$

## 2.2 Les conditions limites

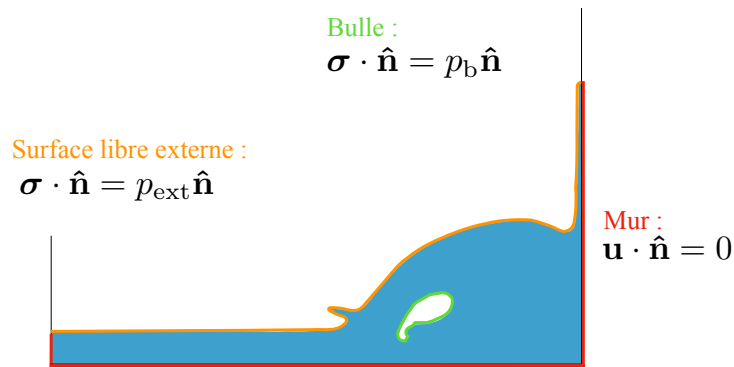


FIGURE 4 – Les différentes conditions limites considérées.

Dans le cadre des écoulements à surfaces libres, trois conditions limites différentes sont à considérer. La première concerne les bords solides. Le long de ces murs, une condition de glissement est appliquée, c'est-à-dire que la composante normale de la vitesse au mur est nulle :

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{mur}}.$$

Ensuite, il faut distinguer deux cas différents en ce qui concerne les surfaces libres. Le premier cas concerne les surfaces libres externes, c'est-à-dire celles qui représentent l'interface avec l'air externe. Sur ces bords, nous appliquons une pression extérieure, par exemple la pression atmosphérique :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = p_{\text{ext}} \hat{\mathbf{n}} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{ext}}.$$

$\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes du fluide, et  $p_{\text{ext}}$  une pression externe imposée. Le deuxième type de surfaces libres concerne les situations où le fluide englobe entièrement un région "vide", comme le bord vert de la figure 4. Ces régions peuvent être assimilées à des bulles d'air. Ici, si nous appliquons la même pression que sur les surfaces libres externes, ces bulles disparaîtraient, car la pression appliquée n'empêcherait pas le fluide lourd de remplir cet espace. C'est pourquoi nous appliquons une pression qui modélise la présence d'un autre fluide incompressible à l'intérieur de la bulle. Cette pression se compose de 3 termes : un terme traduisant un gradient de pression hydrostatique au sein de la bulle, un terme de tension de surface, et un terme constant qui impose l'incompressibilité de la bulle :

$$p_b(\mathbf{x}) = \rho_b g z + \kappa \boldsymbol{\sigma} + p_i,$$

où  $\rho_b$  est la densité du fluide dans la bulle,  $z$  la composante verticale de la position,  $\kappa$  la courbure, et  $\sigma$  le coefficient de tension de surface entre les deux fluides. Les 2 premiers termes peuvent être calculés explicitement. Le dernier terme  $p_i$ , quant à lui, est inconnu *a priori*, et est obtenu en ajoutant une nouvelle équation au système qui traduit l'incompressibilité moyenne de la bulle :

$$\int_{\Gamma_b} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0.$$

On peut appliquer cette pression au moyen d'un multiplicateur de Lagrange. La pression sur la bulle est alors appliquée également sur ces bords :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = p_b \hat{\mathbf{n}} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_b.$$

### 2.3 Adaptation de maillage

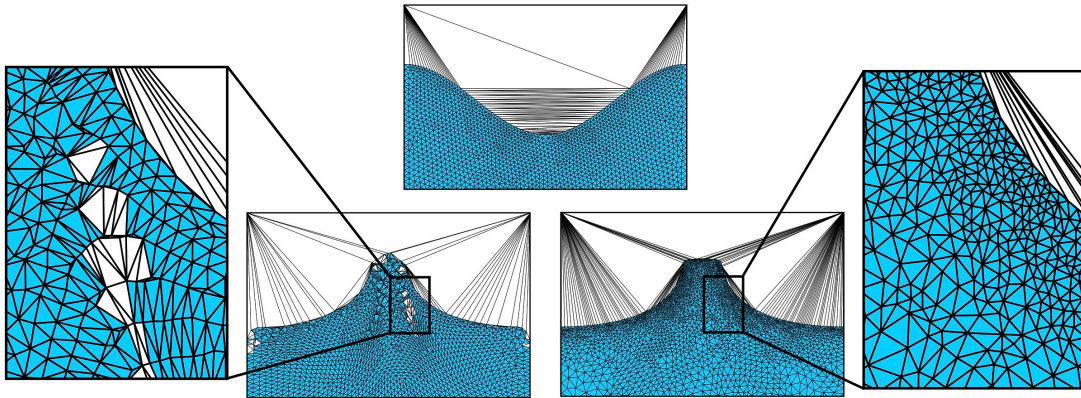


FIGURE 5 – Deux simulations de *sloshing* en PFEM, à gauche sans adaptation de maillage, et à droite avec adaptation.

Etant donné le mouvement des particules, leur structure initialement ordonnée peut très vite devenir désordonnée, ce qui résulte en des maillages de mauvaise qualité. Une mauvaise qualité de maillage a des conséquences néfastes sur les résultats de simulation en PFEM, puisque la détection du domaine se base sur un critère de taille et de qualité. Dans la figure 5, on peut observer que sans adaptation de maillage, certains éléments (ceux en blanc) sont retirés par l'algorithme de détection de domaine, puisque leur qualité devient trop mauvaise : ils ne respectent plus la contrainte (1) de l' $\alpha$ -shape. Dans la figure de droite, la même simulation est effectuée, avec cette fois-ci une adaptation des éléments qui assure un maintien de la qualité du maillage au sein du domaine fluide.

L'algorithme se base sur un concepte bien connu dans la communauté du maillage, le raffinement Delaunay. Nous nous sommes basés sur l'algorithme proposé par Chew[10], dont la philosophie est assez simple. Celui-ci considère en entrée un maillage Delaunay, avec possiblement des bords contraints, ainsi qu'une carte de taille. Nous considérons une carte de taille basée sur la distance à la surface libre. Ce choix est motivé par le fait que la majorité des changements topologiques ont lieu au niveau de la surface libre, il est donc désirable d'avoir un raffinement plus important à ce niveau-là. Il pourrait cependant être désirable de considérer d'autres critères pour la carte de taille, par exemple en se basant sur une estimation d'erreur sur la solution.

Ensuite, une fois l'intérieur du domaine fluide défini par l' $\alpha$ -shape, des noeuds sont ajoutés successivement dans la triangulation, tout en respectant les bords du domaine. L'insertion des noeuds se fait au centre du cercle circonscrit des éléments qui ne respectent pas la carte de taille ou un critère de qualité. A chaque insertion, on met à jour la triangulation afin de maintenir le maillage Delaunay à tout instant. Le fait d'insérer des noeuds au centre du cercle circonscrit garantit que l'on évite la création d'éléments plats, c'est-à-dire des éléments avec un faible rapport entre leur rayon de inscrit et circonscrit. De plus, il a été démontré par Shewchuck[11] que l'algorithme de Chew garantit qu'aucun élément ne possède

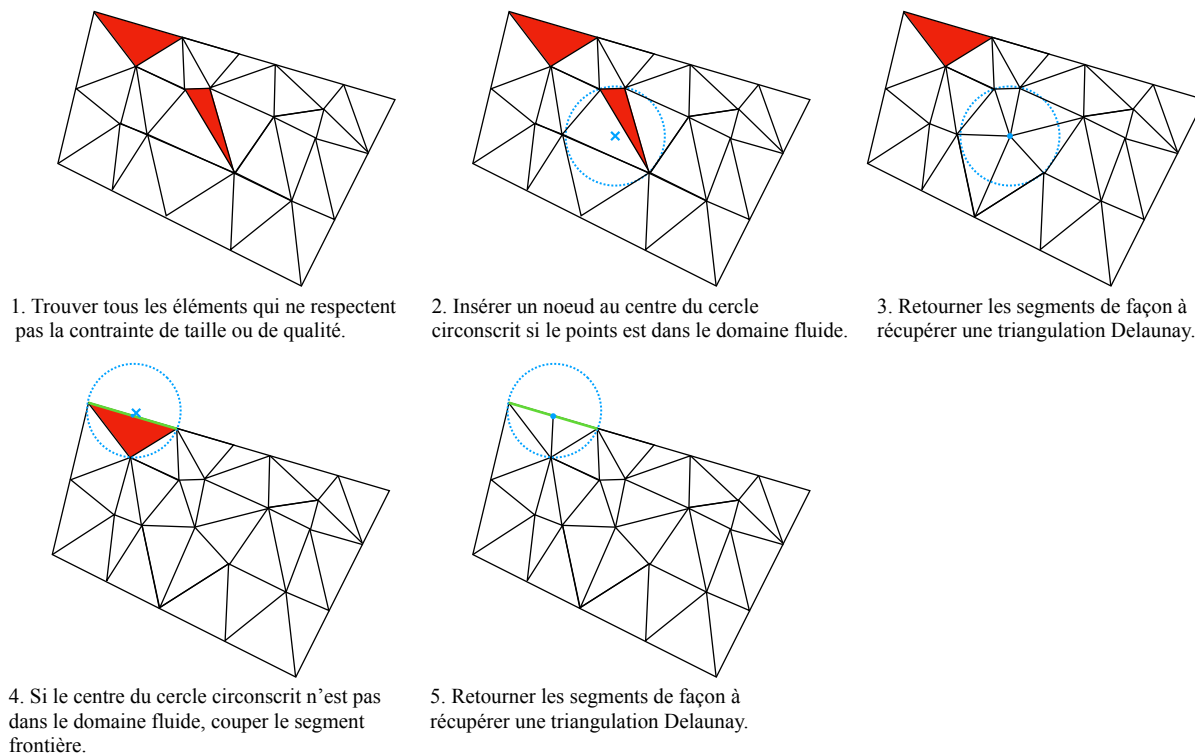


FIGURE 6 – Algorithme de raffinement Delaunay pour l’insertion de noeuds.

d’angle inférieur à  $26,5^\circ$ . L’algorithme de raffinement est résumé dans la figure 6.

### 3 Résultats

Un résultat de rupture de barrage (*dam break*) est présenté ici, et d’autres résultats seront présentés lors de la conférence. La rupture de barrage est un problème classique pour les simulations avec surfaces libres. Dans ce cas test, une colonne d’eau est initialement au repos entre 3 murs. Ensuite, l’un des murs verticaux est subitement retiré, provoquant la chute de la colonne d’eau. Un écoulement se développe alors le long du sol, jusqu’à atteindre un nouveau mur. L’écoulement devient très vite chaotique, avec de nombreux changements topologiques tels que des éclaboussures, des collisions, des retournements de vagues et l’apparition de bulles. Dans la situation présentée ci-dessous, une fine couche est initialement présente le long du sol, ce qui altère considérablement l’écoulement par rapport au *dam break* classique (voir figure 1). Quelques résultats visuels de la simulation sont présentés dans la figure 7. Le temps est adimensionné sur base de la hauteur initiale de la colonne d’eau ( $T = t\sqrt{g/H}$ , avec  $H = 0.6$  m).

### 4 Conclusion

La méthode PFEM est une méthode particulièrement intéressante pour la simulation de fluides en présence de surfaces libres. Dans ces situations, la géométrie du domaine peut varier très fortement, et il est donc nécessaire d’avoir une méthode qui prend en compte ces changements topologiques de façon efficace. La PFEM a été développée pour cette raison. En effet, à l’aide d’une méthode de détection de la forme d’un nuage de points, cette méthode permet de traquer de façon efficace l’évolution de la surface libre. Cependant, cette méthode repose sur la qualité du maillage pour détecter le domaine. Il est donc primordial de se soucier constamment de la qualité des éléments dans le fluide.

C’est pourquoi un algorithme d’adaptation de maillage a été développé. Celui-ci assure que la qualité des éléments au sein du domaine défini par l’ $\alpha$ -shape est suffisamment bonne, afin de maintenir une représentation cohérente à tout instant du domaine et de ses bords. A travers quelques exemples, nous avons

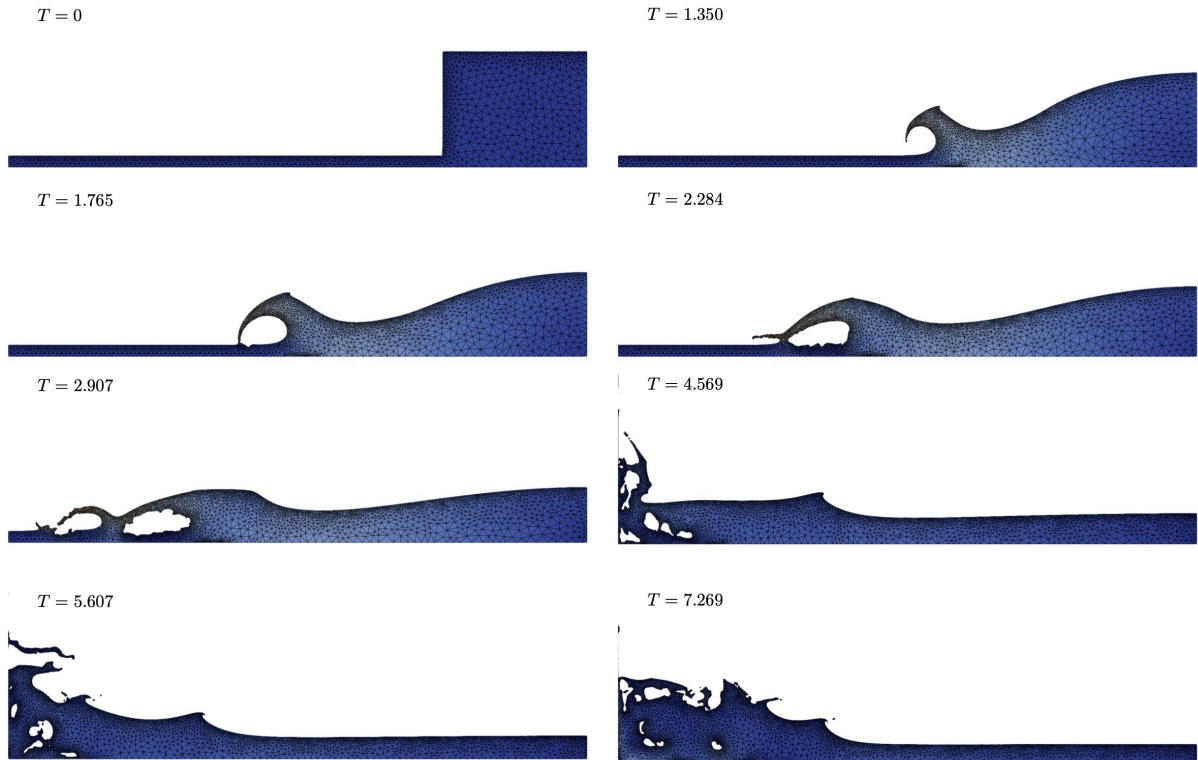


FIGURE 7 – Quelques images de la simulation de rupture de barrage.

démontré l'amélioration de la détection du domaine par rapport à l'approche classique. Des résultats plus quantitatifs, entre autres concernant la conservation de la masse, seront présentés lors de la conférence. La prochaine étape, qui est en cours de développement, est de généraliser l'algorithme pour des simulations en 3D. La figure 8 présente quelques images d'une simulation de *vortex-in-a-box*, un champ de vitesse analytique circulaire appliqué sur une sphère, qui la transforme en un filament de plus en plus étroit. A l'aide du raffinement des éléments de surface ainsi que des éléments volumiques, une représentation précise du domaine est préservée. Nous nous attendons à présenter des résultats préliminaires de simulations fluides 3D à la conférence.

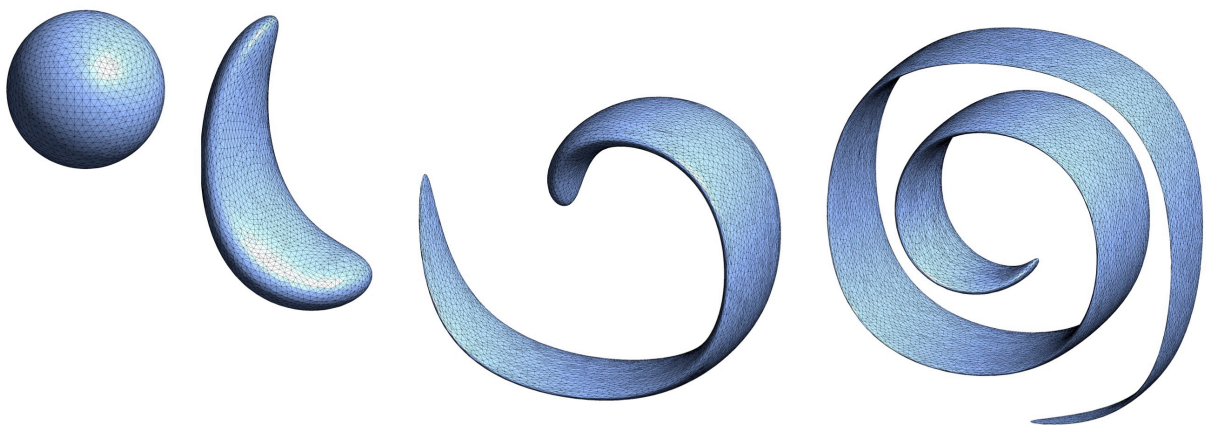


FIGURE 8 – Simulation de *vortex-in-a-box* en 3D.

## Références

- [1] Eugenio Oñate, Sergio R Idelsohn, Facundo Del Pin, and Romain Aubry. The particle finite element method—an overview. *International Journal of Computational Methods*, 1(02) :267–307, 2004.
- [2] Tayfun E Tezduyar. Interface-tracking and interface-capturing techniques for finite element computation of moving boundaries and interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(23-24) :2983–3000, 2006.
- [3] Sergio R Idelsohn, Eugenio Oñate, and F Del Pin. The particle finite element method : a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International journal for numerical methods in engineering*, 61(7) :964–989, 2004.
- [4] Marco-Lucio Cerquaglia, David Thomas, Romain Boman, Vincent Terrapon, and J-P Ponthot. A fully partitioned lagrangian framework for fsi problems characterized by free surfaces, large solid deformations and displacements, and strong added-mass effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 348 :409–442, 2019.
- [5] Alessandro Franci, Massimiliano Cremonesi, Umberto Perego, Giovanni Crosta, and Eugenio Oñate. 3d simulation of vajont disaster. part 1 : Numerical formulation and validation. *Engineering Geology*, 279 :105854, 2020.
- [6] Eugenio Oñate, Alessandro Franci, and Josep M Carbonell. A particle finite element method for analysis of industrial forming processes. *Computational Mechanics*, 54 :85–107, 2014.
- [7] Herbert Edelsbrunner, David Kirkpatrick, and Raimund Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on information theory*, 29(4) :551–559, 1983.
- [8] Matthieu Constant, Frédéric Dubois, Jonathan Lambrechts, and Vincent Legat. Implementation of an unresolved stabilised fem–dem model to solve immersed granular flows. *Computational Particle Mechanics*, 6 :213–226, 2019.
- [9] Thomas JR Hughes, Leopoldo P Franca, and Marc Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. circumventing the babuška-brezzi condition : A stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1) :85–99, 1986.
- [10] L Paul Chew. Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces. In *Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry*, pages 274–280, 1993.
- [11] Jonathan Richard Shewchuk. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational geometry*, 22(1-3) :21–74, 2002.