

# Couplage de maillages incompatibles 1D-3D pour la simulation de câbles gommés

V. Poussard<sup>1</sup>, C. Gandiolle<sup>1</sup>, D. Durville<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France {valentin.poussard,camille.gandiolle,damien.durville}@centralesupelec.fr

**Résumé** — Pour certaines applications, les câbles métalliques utilisés comme renforts peuvent se trouver incorporés dans une matrice. Lorsque le câble est pénétré par la matrice, ses propriétés mécaniques globales sont modifiées. D'importants efforts peuvent en particulier apparaître au niveau des espaces entre deux fils proches, ce qui augmente la raideur du câble. Ce travail présente un modèle de simulation de ces câbles en ayant recours à des modèles différents (1D pour les fils et 3D pour la matrice) discrétisés à l'aide de maillages non conformes, en intégrant des éléments de liaison entre la matrice et les fils.

**Mots clés** — Éléments finis, couplage 1D-3D, composites fibrés.

## 1 Introduction

Un câble renfort pour lequel la matrice occupe l'intégralité de l'espace entre les fils est dit pénétré. Les câbles pénétrés présentent des propriétés mécaniques spécifiques par rapport aux câbles nus. En certains endroits, la matrice forme une fine couche entre deux fils proches. Ces espaces sont appelés "ménisques" et peuvent être le siège d'efforts importants, ce qui apporte des difficultés à la simulation numérique. La figure 1 présente une coupe de câble pénétré avec des ménisques plus ou moins épais.

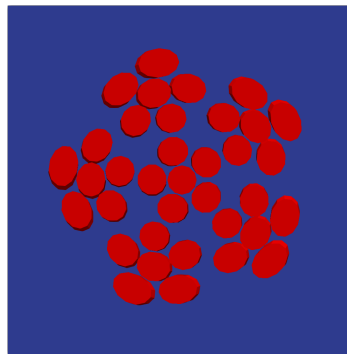


FIGURE 1 – Section de câble pénétré. Les fils sont représentés en rouge et la matrice est représentée en bleu

Ce travail présente un modèle de simulation des câbles pénétrés par éléments finis. Une stratégie de couplage de maillages incompatibles est d'abord détaillée. Un maillage d'éléments poutre 1D à cinématique enrichie est utilisé pour les fils, et un maillage d'éléments 3D est utilisé pour la matrice. Des éléments structurels sont introduits au niveau des ménisques afin de raffiner localement le comportement de la matrice. Des résultats obtenus sur différents cas de chargement sont ensuite présentés.

## 2 Modèle éléments finis

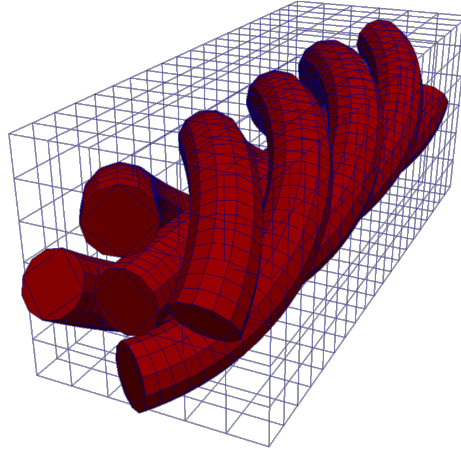


FIGURE 2 – Maillage de câble à cinq fils utilisé pour des tests de traction simple. Les éléments de poutre 1D associés aux fils sont représentés de manière volumique

### 2.1 Maillages incompatibles

Les câbles gommés peuvent comporter plusieurs dizaines de fils arrangés en trajectoires hélicoïdales. Il en résulte une géométrie complexe, rendant difficile leur modélisation par des maillages compatibles d'éléments 3D. Le modèle utilisé ici met en œuvre deux maillages incompatibles superposés, ce qui offre une souplesse importante dans la génération de la géométrie : les fils sont représentés par un maillage d'éléments finis 1D tel que présenté dans [2], et la matrice est représentée par un maillage structuré d'éléments hexaédriques linéaires. Les deux maillages sont superposés et couplés pour constituer l'assemblage final du câble. L'utilisation d'un maillage structuré pour la matrice permet de s'affranchir des difficultés de réalisation de maillages complexes à base d'hexaèdres entre les fils. Le maillage de matrice est pris volontairement grossier par souci d'efficacité, l'objectif premier étant d'avoir une représentation fidèle des fils. Toutefois, une telle taille de discrétisation ne permet pas de capter précisément l'état de contrainte de la matrice au niveau des ménisques, dans la mesure où la taille d'un élément est généralement très supérieure à la taille d'un ménisque, ce qui pose problème pour la modélisation des câbles pénétrés. Des éléments structurels sont alors introduits entre les paires de fils suffisamment proches pour compenser ce manque de raffinement local. Cette démarche est présentée en section 2.5.

### 2.2 Modélisation des fils

La cinématique des fils est celle d'une poutre dont la section est décrite par la position de son centre et par deux vecteurs directeurs dont la norme et l'orientation varient. Il s'agit donc d'un modèle à neuf degrés de liberté, plus riche que des modèles de poutre conventionnels, et s'affranchissant de l'usage de rotations.

### 2.3 Modélisation de la matrice

La matrice est généralement constituée d'un élastomère pouvant subir de grandes déformations. Il a été choisi de la modéliser par un matériau hyperélastique, décrit par une densité d'énergie polynomiale d'ordre  $n$  :

$$w = \sum_{i,j=0}^n C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \frac{1}{D_1} (J - 1)^2$$

où  $\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$  désignent respectivement les premier et deuxième invariants du tenseur de Cauchy-Green,  $J$  désigne le jacobien de la transformation, et  $C_{ij}$  et  $D_1$  sont des paramètres propres au matériau.

Le matériau de la matrice est généralement considéré comme quasi-incompressible, avec une valeur de  $\frac{1}{D_1}$  élevée. L'intégration de l'incompressibilité bénéficie d'un traitement particulier (pénalisation de la

valeur moyenne sur l'élément calculée aux 8 points de Gauss). Un contrôle des modes de déformation en sablier similaire à celui décrit dans [3] a par ailleurs été implémenté afin d'améliorer la stabilité du calcul.

## 2.4 Couplage fils-matrice

Les fils et la matrice sont modélisés par deux maillages séparés. Ceux-ci sont superposés et non conformes dans la mesure où ils n'ont pas de nœuds en commun. Afin d'assurer la continuité des déplacements entre la surface des fils et la matrice, une méthode de couplage doit donc être utilisée.

Plusieurs approches existent pour le couplage de maillages 1D-3D non conformes. Dans [4], une méthode de mortier est par exemple utilisée : le couplage est assuré en imposant l'égalité des déplacements des fibres et de la matrice sur la ligne moyenne des fibres par des multiplicateurs de Lagrange.

Dans un câble gommé, la continuité des déplacements se fait à l'interface fils-matrice, c'est-à-dire à la surface des fils. Par conséquent, assurer le couplage sur la ligne moyenne plutôt que sur la surface des fils peut être une source d'erreur. C'est en particulier le cas pour les câbles métalliques, dont le diamètre des fils unitaires est du même ordre de grandeur que le diamètre du câble. On choisit par conséquent de réaliser le couplage à la surface des fils.

Une méthode de collocation est utilisée pour le couplage : des éléments de couplage ponctuels  $E_i^{F-M}$  sont répartis uniformément sur la surface des fils pris dans la matrice. Un schéma de ces éléments de couplage est proposé en figure 3. Ces éléments relient la particule de fil  $\xi_i^F$  et la particule de matrice  $\xi_i^M$  situées au même endroit dans la configuration initiale, la position de cette seconde particule étant obtenue par interpolation :

$$E_i^{F-M} = (\xi_i^F, \xi_i^M) \mid x^0(\xi_i^F) = x^0(\xi_i^M) = A_i$$

Pour coupler ces deux particules, on introduit une liaison élastique pénalisant leur déplacement relatif. Le travail virtuel associé s'écrit :

$$w_{F-M} = K_{F-M} (x^F(\xi^F) - x^M(\xi^M), v^F(\xi^F) - v^M(\xi^M))$$

avec :

- $K_{F-M}$  le coefficient de pénalisation pour un élément de couplage
- $x^F, x^M$  les positions actuelles respectives des particules de fil et de matrice :

$$x = x^0 + u$$

avec  $u$  le déplacement de la particule

- $\xi^F, \xi^M$  les positions de référence respectives des particules de fibre et de matrice
- $v^F, v^M$  les déplacements virtuels respectifs des particules de fibre et de matrice

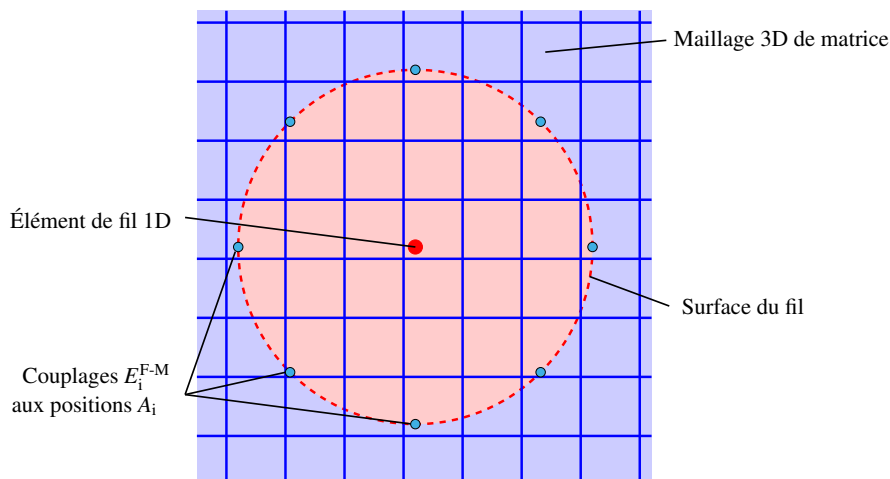


FIGURE 3 – Représentation du couplage fils-matrice dans une section de fil

Du fait de la superposition des fils et de la matrice, certains éléments du maillage de la matrice se trouvent aux mêmes positions que les fils. Afin de ne pas prendre en compte ces deux contributions à la fois, on attribue une raideur nulle aux éléments de matrice situés intégralement dans un fil.

## 2.5 Traitement des ménisques

Au niveau des fines couches de matrice entre les fils, le maillage est trop grossier et ne permet pas de représenter fidèlement les mécanismes à cette échelle. À ces endroits, de grandes déformations ont lieu engendrant des efforts importants qui agissent sur la raideur globale du câble. Une modélisation précise du comportement de la matrice est donc importante dans ces zones. Pour représenter ce raidissement des ménisques sous l'effet des déformations subies, des éléments structuraux 1D sont introduits [1].

Un élément de ménisque agit comme un ressort dans trois directions, comme représenté sur la figure 4. Ces raideurs sont *a priori* différentes et non linéaires.

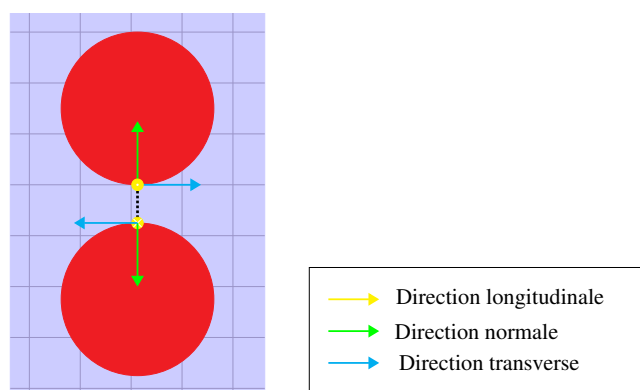


FIGURE 4 – Directions associées à un ménisque

Plusieurs ménisques peuvent être créés sur la longueur d'un fil, comme représenté en figure 5. Chaque ménisque est donc associé à une longueur de fil.

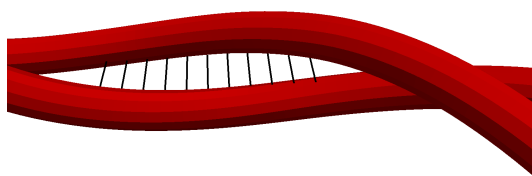


FIGURE 5 – Visualisation de ménisques créés entre des fils voisins

Le comportement des ménisques est déterminé en amont par des calculs éléments finis 3D réalisés avec Abaqus sur des géométries de matrice seule. Il dépend *a priori* de l'épaisseur du ménisque, du rayon des fils et de la direction considérée. La figure 6 présente les résultats d'un calcul réalisé pour déterminer la réponse d'un ménisque dans la direction normale aux fils.

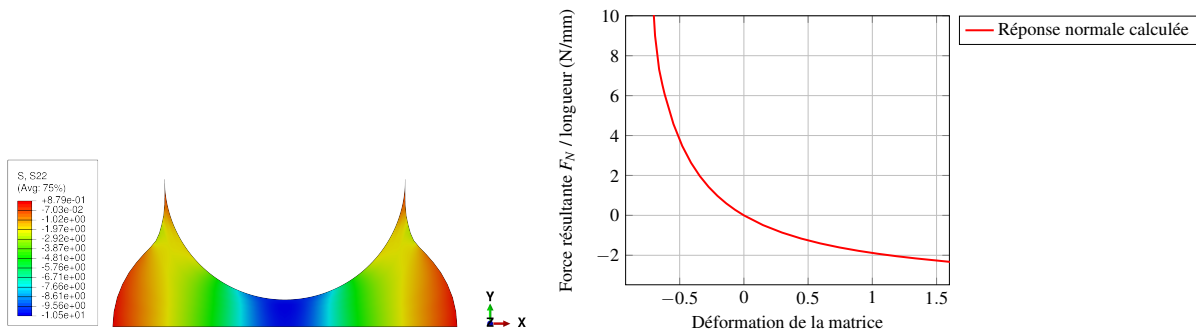


FIGURE 6 – Déformée et réponse en force-déformation d'un modèle en éléments finis 3D utilisé pour déterminer le comportement normal d'un ménisque. Seul un demi-ménisque est modélisé du fait de la symétrie de la géométrie et des efforts. La contrainte normale  $S_{22}$  (MPa) est affichée

### 3 Exemples

Des cas de chargement simples sont utilisés pour la validation du modèle. Des résultats de simulations obtenus sur des cas de chargement plus complexes (indentation) seront présentés et comparés à des résultats expérimentaux. Plusieurs géométries de câbles seront étudiées, en allant jusqu'à des câbles constitués de plusieurs dizaines de fils.

#### 3.1 Flexion simple d'une poutre composite

Un cas de flexion simple a été étudié pour évaluer la convergence spatiale du modèle. Une poutre de section circulaire est couplée à une matrice parallélépipédique. L'extrémité gauche de la poutre est encastree, et la flexion est appliquée par déplacement de l'extrémité droite. La déformée obtenue est représentée en figure 7.

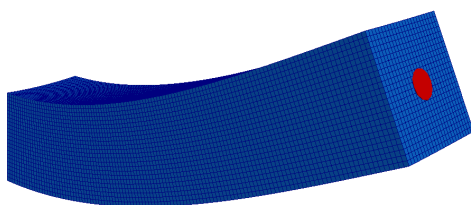


FIGURE 7 – Déformée obtenue par flexion simple d'une poutre composite

On étudie la convergence spatiale du maillage en faisant varier la taille des éléments de matrice  $h_{matrice}$ . La taille des éléments de poutre est prise telle que  $h_{poutre} = 2.5h_{matrice}$ . La solution  $u$  obtenue est comparée à une solution de référence  $u^{ref}$  obtenue par un modèle en éléments finis 3D avec maillages compatibles. La convergence est évaluée en calculant la norme  $L^2$  de l'erreur en déplacement  $e = u - u^{ref}$  le long de la ligne moyenne de la poutre  $\Gamma$  :

$$\|e\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Gamma} (u - u^{ref})^2 dl}$$

Le graphe de convergence est tracé en figure 8.

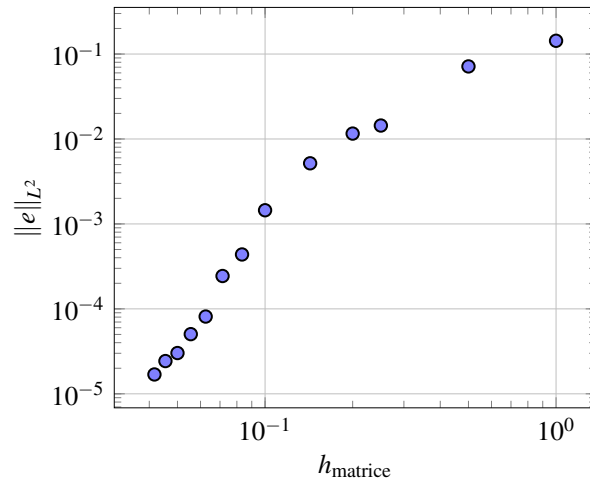


FIGURE 8 – Convergence spatiale pour le cas de flexion simple

### 3.2 Indentation

Des cas d'indentation par un cylindre ont été simulés pour répondre à des problématiques industrielles. La figure 9 présente un câble de 24 fils tendu et indenté verticalement par un cylindre. Les extrémités du câble sont pilotées en effort constant, l'indenteur est piloté en déplacement vertical vers le bas pour réaliser l'indentation.

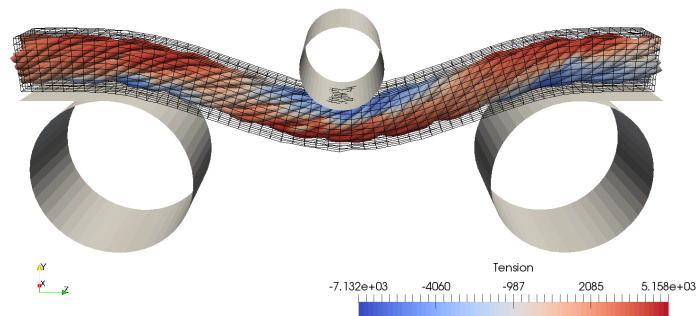


FIGURE 9 – Déformée obtenue par indentation. La tension dans les fils unitaires (N) est affichée

La figure 10 présente le même câble soumis à un chargement d'auto-indentation, utilisé expérimentalement pour tester la résistance à l'indentation. L'indenteur est fixe, et les extrémités du câble sont pilotées en déplacement vers le bas afin d'engager le câble dans les deux poulies latérales et de lui appliquer un effort transverse.

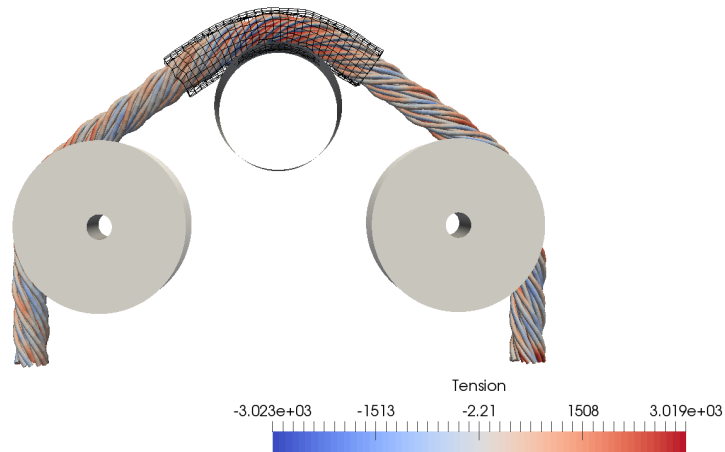


FIGURE 10 – Déformée obtenue par auto-indentation d'un câble. La tension dans les fils unitaires (N) est affichée

## 4 Conclusion

Ce travail a présenté un modèle en éléments finis avec maillages incompatibles 1D-3D pour la simulation de câbles gommés. Un maillage 1D est utilisé pour modéliser les fils du câble, et un maillage 3D superposé est utilisé pour modéliser la matrice. Les deux maillages sont couplés par pénalisation. Ce modèle a été utilisé pour simuler des géométries de câbles variées sous différents cas de chargement.

## Références

- [1] M. Bonneric, V. Aubin, D. Durville *Finite element simulation of a steel cable-rubber composite under bending loading : influence of rubber penetration on the stress distribution in wires*, International Journal of Solids and Structures, 2018
- [2] D. Durville *Modélisation du comportement mécanique de câbles métalliques*, Revue européenne des éléments finis, 9-22, 1998.
- [3] R. Hutter, P. Hora, P. Niederer *Total hourglass control for hyperelastic materials*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 991-1010, 2000.
- [4] I. Steinbrecher, M. Mayr, M. J. Grill, J. Kremheller, C. Meier, A. Popp *A mortar-type finite element approach for embedding 1D beams into 3D solid volumes*, Computational Mechanics, 1377-1398, 2020.