

Identification de paramètres élastiques hétérogènes

Rémi Haustrate¹, Amélie Fau¹, François Hild¹

¹ LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, {remi.haustrate, amelie.fau, francois.hild} @ens-paris-saclay.fr

Résumé — La démocratisation des méthodes de mesure de champs comme la corrélation d'images numériques a permis le développement de multiples méthodes d'identification pour les propriétés mécaniques des matériaux. L'application de ces méthodes à des matériaux hétérogènes où la distribution n'est pas connue rajoute plusieurs difficultés dont le temps de calcul et les risques de sous-détermination. La méthode d'identification de l'écart à l'équilibre est intéressante pour sa rapidité. Son utilisation combinée à une base réduite pour le champ de paramètres est proposée. Elle est analysée et comparée à d'autres méthodes de la littérature.

Mots clés — identification, problème inverse, hétérogénéité.

1 Introduction

L'identification de paramètres des matériaux profite énormément du développement des méthodes de mesures de champs telles que la corrélation d'images [20, 11, 22]. En effet, ces méthodes permettent d'exploiter des chargements hétérogènes sur les éprouvettes et d'avoir une large quantité de mesures réduisant ainsi l'effet des incertitudes. De nombreuses méthodes permettent d'utiliser ces champs de déplacement mesurés expérimentalement pour identifier des paramètres [1, 15], avec notamment *la méthode de l'écart à l'équilibre* (MEQ) [6, 18] et la méthode des champs virtuels (MCV) [9, 17]. Pour ces deux méthodes, utiliser des mesures de champs est nécessaire. D'autres méthodes d'identification permettent également de mettre à profit les mesures de champs telles que le *recalage de modèles éléments finis* (RMEF) [12] ou encore l'erreur en relation de comportement (ERC) [13, 5, 8]. Enfin, la *corrélation d'images numériques intégrée* [10, 14] identifie des paramètres en utilisant directement les images, en fusionnant les procédures d'identification des paramètres et de corrélation d'images.

Ces méthodes ont été utilisées pour identifier des paramètres hétérogènes [23]. Dans les cas où l'hétérogénéité peut se réduire à un petit nombre de sous-domaines associés à des valeurs différentes de paramètres identifiables a priori, l'identification est similaire à celle utilisée pour des matériaux homogènes. On parlera ici d'hétérogénéité structurée. Quand l'hétérogénéité est non-structurée, la répartition spatiale des valeurs de paramètres est a priori inconnue. Le nombre d'inconnues à identifier augmente drastiquement, ce qui induit différents défis. Les temps de calculs sont allongés, particulièrement pour les méthodes itératives basées sur l'utilisation de gradients. Les effets des incertitudes de mesure sont amplifiés par la diminution du rapport entre le nombre d'inconnues et le nombre de données. Les autres défis sont l'identifiabilité des paramètres et l'imposition de contraintes assurant l'obtention de valeurs thermodynamiquement cohérentes. Des méthodes ont été développées pour réduire les temps de calculs, avec notamment une approche simplifiée mais limitée à l'élasticité basée sur l'ERC [16] et une approche analytique limitée à de l'hétérogénéité de faible contraste [4]. La question de l'identifiabilité a aussi été étudiée [3, 2, 4]. Pour limiter directement le nombre d'inconnues, l'utilisation de maillages grossiers avant des éléments d'ordre plus haut a été proposée nécessitant cependant la projection du champ de déplacement [2].

Dans le contexte d'essais quasi-statiques avec mesures de champs par corrélation d'images, ces travaux présentent l'application de la méthode de l'écart à l'équilibre pour l'identification de paramètres élastiques hétérogènes non-structurés. Chaque identification utilise un seul champ de déplacement. En

plus de la formulation générale, la construction et l'utilisation d'une base réduite provenant d'une hypothèse de corrélation spatiale des propriétés sont présentées. La base réduite permet de limiter la dépendance au maillage de l'identification et de réduire le nombre de paramètres pour éviter les problèmes liés à la sous-détermination. La méthode est testée sur un essai biaxial sur matériau composite. Les choix sont discutés et les performances comparées au RMEF.

2 Méthode de l'écart à l'équilibre avec base réduite

La méthode de l'écart à l'équilibre a été utilisée pour l'identification de champs de contraste élastique ou d'endommagement [6] puis, dans sa version reconditionnée, pour identifier une loi d'endommagement [18]. Elle a pour principal avantage d'être formulable comme un problème de minimisation de moindres carrés linéaires, ce qui permet, en l'absence de contraintes sur les inconnues, de résoudre le problème directement. La condition pour avoir cette linéarité est d'utiliser un modèle de comportement linéaire ou un modèle où les non-linéarités dépendent uniquement du déplacement.

Le problème d'identification est traité numériquement par la méthode des éléments finis. Le problème d'élasticité, avec équilibre statique et les déplacements imposés, s'écrit alors sous la forme suivante

$$\begin{cases} \mathbb{K}(\mathbf{p})\mathbf{u} + \mathbb{A}^T\lambda = \mathbf{f} \\ \mathbb{A}\mathbf{u} = \mathbb{A}\mathbf{u}_d. \end{cases} \quad (1)$$

où les propriétés des matériaux recherchées sont contenues dans le vecteur \mathbf{p} , la matrice de rigidité est notée \mathbb{K} , le vecteur représentant le champ de déplacement sur le maillage élément finis \mathbf{u} . Le vecteur \mathbf{f} représente les forces appliquées au solide, et le vecteur \mathbf{u}_d un champ de déplacement cinématiquement admissible. Le vecteur λ contient les multiplicateurs de Lagrange imposant les conditions aux limites en déplacements. La matrice \mathbb{A} est telle que $\mathbb{A}\mathbf{u}$ soit égale au vecteur contenant les déplacements aux positions où il est imposé.

L'objectif de l'identification est de trouver les paramètres du matériau, c'est-à-dire le vecteur \mathbf{p} . L'écart à l'équilibre vise à identifier les paramètres \mathbf{p} tels que les équations d'équilibre soient respectées au mieux en supposant que le déplacement est connu (car mesuré). En utilisant une approche globale de la corrélation d'images, le déplacement mesuré \mathbf{u}_{mes} est directement basé sur une discrétisation par éléments finis. Les efforts appliqués sur les nœuds où des conditions en déplacement sont imposées ne sont pas connus, les équations d'équilibre sur ces nœuds ne peuvent donc pas être totalement calculées et sont exclues. La fonction-coût à minimiser pour l'écart à l'équilibre est

$$\|\mathbb{D}(\mathbb{K}(\mathbf{p})\mathbf{u}_{mes} - \mathbf{f})\|^2 \quad (2)$$

avec \mathbb{D} une matrice de projection qui permet d'exclure les équations d'équilibre incomplètes telle que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbb{D} \cdot \mathbb{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

La minimisation de la fonction-coût définie par l'équation (2) a pour défaut d'être très sensible à l'incertitude sur la mesure de déplacement. Le reconditionnement de l'écart à l'équilibre permet de diminuer cette sensibilité [18, 19]. La nouvelle fonction-coût est obtenue en multipliant le résidu d'équilibre par l'inverse de la matrice de rigidité d'un matériau homogène (ou dans le cas de l'endommagement d'un matériau non endommagé), noté \mathbb{S}_0 . Cette matrice de souplesse se calcule en utilisant les mêmes conditions aux limites que pour l'équation (1) mais avec les déplacements aux nœuds associés à des conditions de Dirichlet imposées à zéro. La fonction-coût à minimiser pour la méthode de l'écart à l'équilibre reconditionné (MEQR) est

$$\|\mathbb{S}_0(\mathbb{K}(\mathbf{p})\mathbf{u}_{mes} - \mathbf{f})\|_{\mathbb{C}_u}^2. \quad (4)$$

L'analyse de la procédure de corrélation d'images permet d'obtenir la matrice de covariance \mathbb{C}_u liée à l'incertitude des déplacements mesurés [11]. Elle dépend du maillage et des images utilisées. Il est alors possible d'utiliser ces informations dans la minimisation en remplaçant la norme classique par une

norme adaptée (équation (5)). La MEQR est formulée comme la minimisation d'un déplacement résiduel en utilisant la norme pondérée suivante

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{C}_u^{-1}}^2 := \mathbf{x}^T \mathbb{C}_u^{-1} \mathbf{x}. \quad (5)$$

La minimisation de la fonction-coût définie par l'équation (4) revient à un problème de moindres carrés linéaire si la matrice de rigidité \mathbb{K} est linéaire par rapport à \mathbf{p} . Cette propriété est avantageuse par rapport à d'autres méthodes où le vecteur dont on minimise la norme est non-linéaire (comme le RMEF par exemple). Cependant, ceci impose une minimisation sous contrainte pour que la solution $\mathbf{p} = 0$ soit rejetée en l'absence de données d'effort.

Utiliser cette formulation pour identifier un champ de contraste de module d'Young est équivalent aux travaux précédents cherchant à identifier des champs d'endommagement isotrope [6, 18]. En discrétisant le champ de module d'Young avec une valeur par élément et un maillage d'éléments quadrangulaires (Q4), il est possible d'obtenir un problème surdéterminé. Avec un maillage triangulaire (T3), le problème devient très souvent sous-déterminé. C'est pourquoi il est proposé d'identifier les propriétés hétérogènes sur une base réduite, permettant de contrôler le nombre de degrés de liberté. Celle-ci est construite en se basant sur l'hypothèse que plus deux points sont proches, plus leurs propriétés sont corrélées. La base est ensuite construite à partir d'une expansion de Karhunen-Loève du noyau d'auto-corrélation [21]. Les modes de cette base réduite sont ordonnés quantitativement en fonction de leurs valeurs propres, ce qui permet d'avoir en premier les modes représentant de faibles fluctuations. La base est tronquée en fonction de la taille minimale des hétérogénéités que l'on souhaite identifier. La figure 1 présente un exemple de trois modes. Le mode 10 présente plus d'oscillations que les modes 4 et 1.

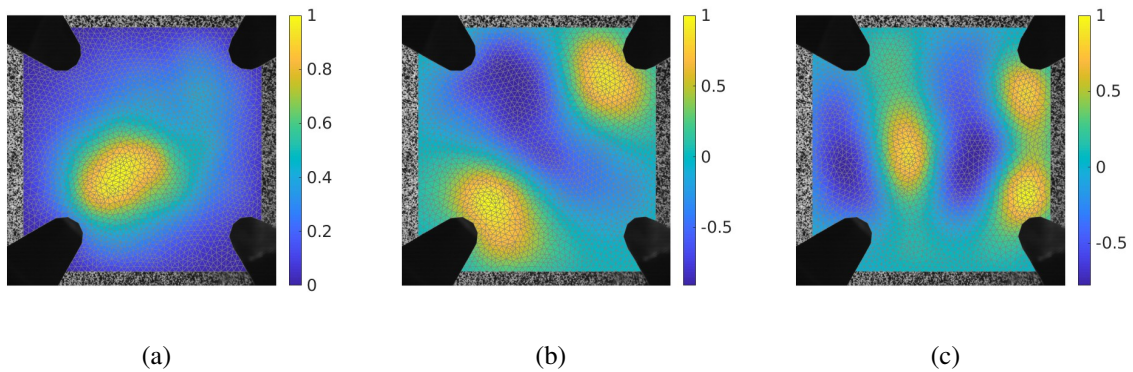
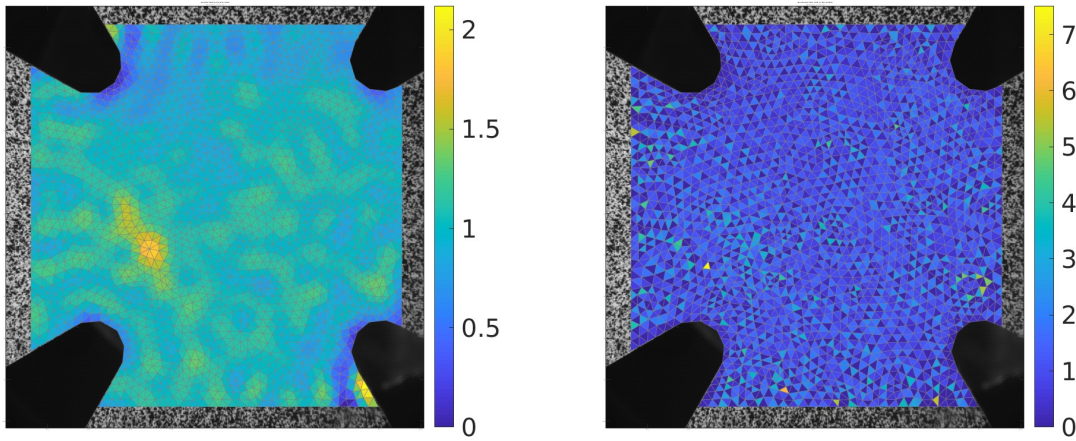


FIGURE 1 – Modes 1 (a), 4 (b) et 10 (c) de la base réduite d'identification de champ de contraste élastique

3 Application

La méthode est appliquée pour identifier des champs de rigidité. Aucune donnée de force n'étant utilisée, les champs sont identifiés à un facteur multiplicatif près. Toutes les méthodes testées, MEQ, MEQR et RMEF, fonctionnent parfaitement pour des cas virtuels parfaits (sans bruit). Une expérience de traction équi-biaxiale sur un composite [7, 6] est utilisée pour tester la méthode d'identification avec des données réelles. Une série de 12 images de l'éprouvette acquises à des intervalles de chargement réguliers (entre 0 kN à 11 kN) sont analysées. La rupture de l'éprouvette est intervenue pour un effort de 11.1 kN par fissuration du composite.

L'effet de la base réduite est illustré sur la figure 2. La figure 2(a) montre le contraste identifié avec la MEQR et la base réduite pour l'image associée à $F = 6$ kN. On observe notamment de l'endommagement aux zones d'amorçage de fissures se propageant par la suite. A titre de comparaison, le champ de contraste identifié sans la base réduite est montré sur la figure 2(b). La recherche d'une valeur de module d'Young par élément fournit un champ d'élasticité en damier avec des alternances entre des éléments de rigidité nulle et non nulle. La sous-détermination du problème d'identification combinée aux incertitudes de mesure et éventuelles erreurs de modèle crée ce genre de problèmes numériques.



(a)

(b)

FIGURE 2 – Champ de contraste d'élasticité, avant la rupture ($F = 6$ kN) obtenu avec la MEQ en utilisant la base réduite (a) et la base éléments finis (b) pour le champ de propriétés.

L'identification du champ de contraste de rigidité a été réalisée pour toutes les images par diverses méthodes. La méthode d'écart à l'équilibre est utilisée avec et sans reconditionnement, ainsi qu'avec une base complète considérant une valeur différente par élément ou une base réduite. La méthode par RMEF est appliquée uniquement avec la base réduite pour des raisons de temps de calcul. Les résultats peuvent être comparés pour chaque image à l'aide des résidus en déplacements noté χ^2

$$\chi^2(\underline{\mathbf{p}}) = \|\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{p}}) - \underline{\mathbf{u}}_{mes}\|_{\mathbb{C}_u^{-1}}^2, \quad (6)$$

c'est-à-dire la différence entre les déplacement mesurés et simulés avec les paramètres identifiés. L'erreur d'identification peut également être évaluée par un résidu en niveaux de gris défini à partir de la moyenne des erreurs quadratiques entre l'image de référence f et l'image déformée g corrigée par le champ de déplacement simulé

$$\text{rms}(\underline{\mathbf{p}}) = \sqrt{\frac{1}{N_{pix}} \sum_{i=1}^{N_{pix}} (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{p}}, \mathbf{x}))^2}. \quad (7)$$

Les évolutions des résidus en déplacement et en niveaux de gris pour les 11 images analysées sont présentées dans la figure 3. Ces résultats montrent que la base réduite est bénéfique pour l'identification. En effet, elle empêche l'apparition de motifs en damiers causés par l'incertitude de mesure. Le reconditionnement apparaît aussi comme un ingrédient indispensable à l'identification. Mise à part l'image 11, qui comporte une fissuration importante, les identifications de champs de propriétés hétérogènes sans reconditionnement sont moins précises qu'une simulation supposant le milieu homogène. Enfin, la méthode par RMEF est toujours plus précise que les autres car celle-ci minimise directement le résidu en déplacements χ (équation (6)). Toutefois, cette performance est associée à un fort coût en temps de calcul, celui-ci étant multiplié par des valeurs variant entre 100 et 1000 par rapport à la MEQR. Le temps de calcul est de quelques minutes pour le RMEF au lieu d'environ 1 seconde pour la MEQR. Le pire des cas est celui de l'image 11 pour lequel, le calcul par RMEF nécessite 33 minutes contre moins d'une seconde avec la MEQR.

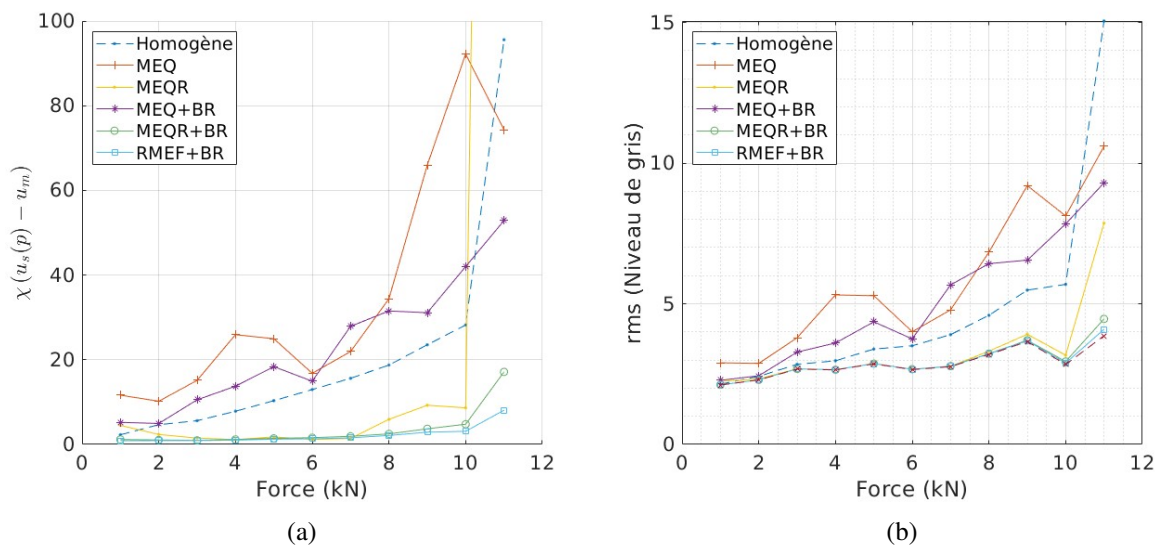


FIGURE 3 – Résidus globaux de déplacement (équation (6)) (a) et d’images (équation (7)) (b) avec les méthodes de l’écart à l’équilibre (MEQ), l’écart à l’équilibre reconditionné (MEQR), le recalage de modèles éléments finis (RMEF) et sans identification en supposant le matériau homogène. L’usage de la base réduite est indiqué par "+BR".

4 Conclusion

L’identification de champs de propriétés hétérogènes, pour des cas où aucune information sur la structure des hétérogénéités n’est disponible a priori, induit de multiples défis. En se basant sur la méthode de l’écart à l’équilibre, il est possible de formuler une méthode d’identification de champs de propriétés élastiques qui est relativement rapide et sans augmentation importante des résidus en comparaison à au *recalage de modèles éléments finis*.

L’optimisation d’une fonction-coût quadratique permet d’utiliser des algorithmes complexes pouvant gérer les contraintes efficacement. Le temps de calcul est largement inférieur à celui nécessaire pour des calculs par la méthode RMEF pour des approximations très proches entre les deux méthodes. L’identification de propriétés hétérogènes de structure inconnue peut facilement créer des problèmes sous-déterminés empêchant l’identification. L’utilisation d’une base réduite provenant de l’hypothèse d’un noyau de corrélation permet de résoudre le problème de sous-détermination tout en réduisant l’effet de la discrétisation sur l’identification avec pour seule limite d’empêcher les variations très rapides des propriétés. De plus, l’effet de l’incertitude de mesure sur le champ de déplacement est en partie filtré par l’utilisation de cette base réduite.

Certains défis restent encore à traiter, notamment le faible rapport du nombre de données au nombre d’inconnues. Pour ce point spécifique, l’utilisation d’une régularisation temporelle est une piste permettant de réduire le problème en traitant l’ensemble de la série d’images simultanément au lieu de les considérer indépendamment.

Références

- [1] Avril S., Bonnet M., Bretelle A.S., Grédiac M., Hild F., Ienny P., Latourte F., Lemosse D., Pagano S., Pagnacco E., and Pierron F. *Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements*. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402, 2008. ISSN 0014-4851, 1741-2765.
- [2] Bal G., Bellis C., Imperiale S., and Monard F. *Reconstruction of constitutive parameters in isotropic linear elasticity from noisy full-field measurements*. *Inverse Problems*, 30(12) :125004, 2014. ISSN 0266-5611. Publisher : IOP Publishing.
- [3] Barbone P.E., Rivas C.E., Harari I., Albocher U., Oberai A.A., and Zhang Y. *Adjoint-weighted variational formulation for the direct solution of inverse problems of general linear elasticity with full interior data*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(13) :1713–1736, 2010. ISSN 1097-0207. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2760>.

- [4] Bellis C. *Converting strain maps into elasticity maps for materials with small contrast*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 98 :411–428, 2017. ISSN 00225096.
- [5] Calloch S., Dureisseix D., and Hild F. *Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d'essais et de calculs*. Technologies et Formations, 100 :36, 2002.
- [6] Claire D., Hild F., and Roux S. *A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 61(2) :189–208, 2004. ISSN 0029-5981, 1097-0207.
- [7] Collin F., Hild F., and Berthaud Y. *Visualisation par analyse d'images de la répartition des déformations et de l'amorçage dans un matériau composite*. 1998.
- [8] Geymonat G., Hild F., and Pagano S. *Identification of elastic parameters by displacement field measurement*. Comptes Rendus Mécanique, 330(6) :403–408, 2002. ISSN 1631-0721.
- [9] Grédiac M. *Principe des travaux virtuels et identification*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 309, 1989.
- [10] Hild F. and Roux S. *Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties - a Review*. Strain, 42(2) :69–80, 2006. ISSN 00392103, 14751305.
- [11] Hild F. and Roux S. *Digital Image Correlation*. In *Optical methods for solid mechanics. A full-field approach*, pp. 183–228. P. Rastogi and E. Hack, eds. Wiley-VCH, Weinheim (Germany), 2012.
- [12] Kavanagh K.T. and Clough R.W. *Finite element applications in the characterization of elastic solids*. International Journal of Solids and Structures, 7(1) :11–23, 1971. ISSN 0020-7683.
- [13] Ladevèze P., Reynier M., and Maia N.M.M. *Error localization for updating FE models using frequency response function*. 1994.
- [14] Leclerc H., Périé J.N., Roux S., and Hild F. *Integrated Digital Image Correlation for the Identification of Mechanical Properties*. In W. Philips and A. Gagalowicz, editors, *Computer Vision/Computer Graphics Collaboration Techniques*, volume 5496, pp. 161–171. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-642-01810-7 978-3-642-01811-4. Series Title : Lecture Notes in Computer Science.
- [15] Martins J.M.P., Andrade-Campos A., and Thuillier S. *Comparison of inverse identification strategies for constitutive mechanical models using full-field measurements*. International Journal of Mechanical Sciences, 145 :330–345, 2018. ISSN 0020-7403.
- [16] Moussawi A., Lubineau G., Florentin E., and Blaysat B. *The constitutive compatibility method for identification of material parameters based on full-field measurements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 265 :1–14, 2013. ISSN 00457825.
- [17] Pierron F. and Grédiac M. *The Virtual Fields Method*. Springer New York, New York, NY, 2012. ISBN 978-1-4614-1823-8 978-1-4614-1824-5.
- [18] Roux S. and Hild F. *Digital Image Mechanical Identification (DIMI)*. Experimental Mechanics, 48(4) :495–508, 2008. ISSN 1741-2765.
- [19] Roux S. and Hild F. *Optimal procedure for the identification of constitutive parameters from experimentally measured displacement fields*. International Journal of Solids and Structures, 184 :14–23, 2020. ISSN 00207683.
- [20] Schreier H., Orteu J.J., and Sutton M.A. *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements : Basic Concepts, Theory and Applications*. Springer US, Boston, MA, 2009. ISBN 978-0-387-78746-6 978-0-387-78747-3.
- [21] Sudret B. *Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report*. p. 189, 2000.
- [22] Sutton M.A. *Computer Vision-Based, Noncontacting Deformation Measurements in Mechanics : A Generational Transformation*. Applied Mechanics Reviews, 65(050802), 2013. ISSN 0003-6900.
- [23] Turpin L., Roux S., Bénézech J., Couégnat G., King A., Caty O., Denneulin S., and Martin E. *Quantitative thermomechanical characterisation of 3D-woven SiC/SiC composites from in-situ tomographic and thermographic imaging*. Composite Structures, 307 :116626, 2023. ISSN 02638223.