

Méta-modélisation pour la fiabilité de structures en fatigue avec cumul non-linéaire du dommage

V. Rey¹, C. Freyssinet^{1,2}, F. Schoefs¹, T. Moro²

¹ Nantes Université, École Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, F-44000 Nantes, France {valentine.rey,franck.schoefs}@univ-nantes.fr

² Nantes Université, IRT Jules Verne, F-44000 Nantes, France

Résumé — L'estimation de la durée de vie des structures en fatigue est généralement faite par un cumul linéaire du dommage. Dans ce papier, on se propose d'utiliser un modèle d'endommagement à deux échelles pour la fatigue dont les paramètres matériau sont des variables aléatoires calibrées à partir des courbes contraintes-nombre de cycles à rupture (courbes S-N) aléatoires. Cela permettra de considérer à la fois l'influence de l'historique du chargement et la variabilité matériau. Pour contrôler les coûts numériques liés à un calcul incrémental du dommage, deux méta-modélisations par krigeage de l'évolution du dommage sont proposées et appliquées sur un assemblage soudé de plaques.

Mots clés — Fatigue, fiabilité, endommagement, krigeage

1 Introduction

De nombreuses structures sont soumises à des sollicitations cycliques, qu'elles soient mécaniques ou thermiques, qui peuvent provoquer des ruptures par fatigue. En effet, ces sollicitations répétées pendant des milliers de cycles, même de faible amplitude au regard de la limite élastique du matériau, entraînent des micro fissures qui coalescent jusqu'à ce qu'une macro fissure provoque la ruine de la structure. Il est donc primordial, à l'étape de conception, de prendre en compte ce scénario de défaillance en modélisant la fatigue et, une fois la structure déployée, d'assurer un suivi en service par un contrôle de santé adapté.

Néanmoins, plusieurs difficultés existent. Tout d'abord, la rupture par fatigue intervient, pour les structures métalliques qui nous intéressent dans cet article, après plusieurs dizaines de milliers de cycles. De plus, pour certaines structures, ces sollicitations ne sont pas connues au moment de la conception car non déterministes. On peut citer par exemple les efforts dus à la houle ou au vent sur les structures déployées en mer. Dès lors, le coût de calcul associé à la simulation de toute l'histoire du chargement avec prise en compte de sa variabilité est prohibitif. Ensuite, le nombre de cycles causant la rupture d'une éprouvette, même pour des chargements simples uniaxiaux, est sujet à une grande variabilité. C'est cette variabilité que modélisent les courbes S-N (Stress-Numbers of cycle to failure), construites à partir de données expérimentales. Il y a donc de nombreux enjeux liés à la simulation de la fatigue ce qui explique que l'étude en fatigue est généralement limitée à un faible nombre de points de la structure, appelés *hot spot* et définis par les codes standards internationaux [1].

Des méthodes ont été développées pour estimer le dommage et la durée de vie en fatigue en prenant en compte la variabilité matériau. L'une des plus populaires fait l'hypothèse d'un cumul linéaire du dommage [2, 3]. Le chargement est décomposé en cycles de différentes amplitudes et le dommage total est la somme des dommages provoqués par chacune des amplitudes du signal. Cette méthode est facile et rapide mais ne tient pas compte de l'histoire du chargement. Or, la prise en compte de l'histoire du chargement est nécessaire car elle influence la durée de vie de la structure : il n'est pas possible a priori de justifier qu'un cumul linéaire du dommage sous-estime ou sur-estime le dommage [4].

L'objectif de ce papier est de proposer une méthodologie de calcul de probabilité de défaillance d'une structure soumise à un chargement déterministe avec prise en compte de l'aléa matériau et l'historique du chargement. Pour effectuer cette analyse de fiabilité, un méta-modèle de type krigeage est développé. Dans cet article, on se propose d'utiliser le modèle à deux échelles de Lemaître et Doghri [5] pour la fatigue. En effet, ce modèle repose sur la thermodynamique des processus irréversible. Il prend donc en compte l'histoire du chargement et ne se base pas sur un comptage de cycles. Il a l'avantage de pouvoir être utilisé pour un chargement quelconque (non périodique, non proportionnel ou multi-axial)

a contrario des approches globales énergétiques [7] ou des analyses par plan critique [8]. La variabilité matériau est prise en compte en modélisant 4 paramètres de ce modèle par des variables aléatoires. Ce modèle est décrit en section 2. En section 3, la fonction de performance ainsi que les probabilités de défaillance sont définies. Les enjeux de maîtrise des coûts numériques sont exposés. En section 4, la construction et l'exploitation de deux types de méta-modèles de krigeage sont détaillées. On indiquera comment exploiter au maximum les calculs d'évolution du dommage effectués. La section 5 consiste en une application sur un exemple bi-dimensionnel. La section 6 regroupe le bilan et quelques perspectives.

2 Modèle stochastique d'endommagement à deux échelles pour la fatigue

Dans cette section, on présente le modèle stochastique de l'évolution de l'endommagement. On se place dans l'hypothèse d'une évolution quasi-statique et on considère des petites transformations. Aussi, on utilise le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

2.1 Description du modèle d'endommagement à deux échelles

Ce modèle, proposé dans [5], distingue deux échelles : une échelle macroscopique à laquelle le comportement est élastique linéaire isotrope (module d'Young E et coefficient de Poisson ν) et une échelle microscopique à laquelle le comportement est élasto-plastique endommageable (même module d'Young E et même coefficient de Poisson ν qu'à l'échelle macroscopique). Toutes les grandeurs de l'échelle microscopique sont notées avec un exposant μ . Le dommage évolue au cours du temps sous l'effet du chargement jusqu'à atteindre la valeur D_c critique. On considère que lorsque $D = D_c$ alors la rupture par fatigue intervient au plus tard après quelques cycles de chargement.

Le lien entre les deux échelles est assuré par la loi de localisation de Lin-Taylor :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^\mu = \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1)$$

Ainsi, la déformation microscopique se déduit de la déformation macroscopique. Ici, on ne considère pas l'influence de l'échelle microscopique sur l'échelle macroscopique. A l'échelle microscopique, le comportement est élasto-plastique endommageable avec un écrouissage cinématique de module C . La déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^\mu = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu p} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu e}$ est décomposée en une déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu e}$ et une déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu p}$. La loi élastique s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}}^\mu = (1 - D) \left(\frac{E}{1 - 2\nu} \mathbf{P}^H + \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{P}^D \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu e} \quad (2)$$

où D est le dommage D et \mathbf{P}^D et \mathbf{P}^H les projecteurs déviatoriques et hydrostatiques. La contrainte effective est $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^\mu = \frac{\underline{\underline{\sigma}}^\mu}{(1-D)}$. Le critère utilisé est le suivant :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{P}^D : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^\mu - \underline{\underline{X}}^\mu\| - \sigma_y^\mu \leq 0 \quad (3)$$

avec $\|\cdot\|$ la norme L_2 et avec la limite élastique σ_y^μ . L'évolution de l'écrouissage cinématique et l'évolution de la plasticité sont donnés par :

$$d\underline{\underline{X}}^\mu = \frac{2}{3} C (1 - D) d\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu p} \text{ et } dp^\mu = \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu p}\| \geq 0 \quad (4)$$

Si $p^\mu \leq p_D$, le dommage reste nul. A partir de $p^\mu = p_D$, le dommage évolue ainsi

$$dD^\mu = \left(\frac{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^\mu : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu e}}{2S} \right)^\delta dp^\mu \quad (5)$$

2.2 Description des paramètres matériau

Le modèle considéré doit pouvoir représenter la variabilité du nombre de cycles à rupture observé expérimentalement. Certains paramètres matériau sont donc modélisés comme des variables aléatoires.

E , ν , σ_y^μ et δ sont considérés déterministes de valeurs présentées dans le tableau 1. E et ν sont connus et σ_y^μ est la limite d'endurance. Enfin δ vaut 1 selon [6]. C , S , p_D et D_c sont modélisés comme des variables aléatoires dont les distributions ont été identifiées à partir de courbes S-N construites à partir des résultats expérimentaux pour des assemblage soudés en T. Cette calibration bayésienne a été réalisée par une méthode Monte Carlo Markov Chain (MCMC) [4]. Les distributions identifiées sont données en figure 1. On remarque que $C \sim \mathcal{U}(0, 0.5)$ et $p_D \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Seuls D_c et S sont corrélés.

E	ν	σ_y^μ	δ
$2.1 \cdot 10^{11}$ Pa	0.3	41.703 MPa	1

TABLE 1 – Valeurs de E , ν , σ_y^μ et δ

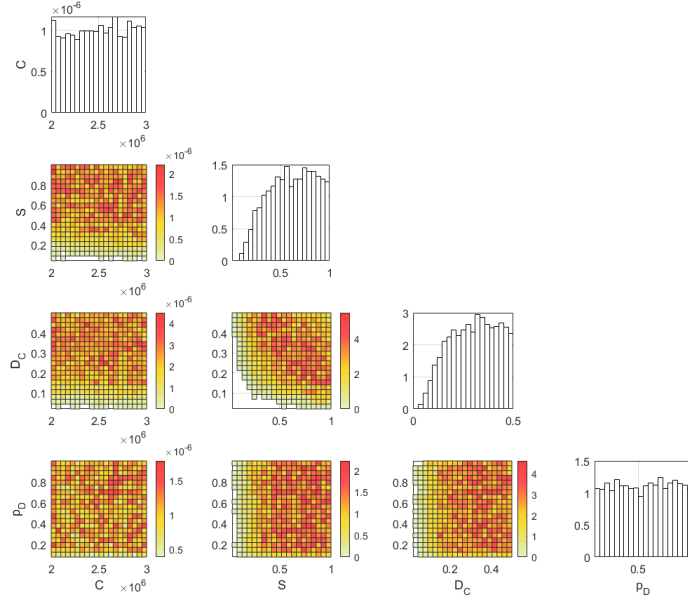


FIGURE 1 – Distributions marginales et jointes de C , S , p_D et D_c

3 Fiabilité des structures en fatigue

Dans cette section, on présente tout d'abord la fonction de performance utilisée pour l'étude fiabiliste de la fatigue. On définit ensuite les probabilités de défaillance instantanée et cumulée. Soit X le vecteur regroupant l'ensemble des variables aléatoires C , S , p_D et D_c et f la distribution jointe de X .

3.1 Fonction de performance et probabilités de défaillance

Puisqu'on considère que lorsque $D = D_c$ alors la rupture par fatigue intervient au plus tard après quelques cycles de chargement, la fonction de performance est définie par $G(X, t) = D_c - D(t)$. A un instant t , le domaine de sûreté est défini par $G(X, t) > 0$ et le domaine de défaillance par $G(X, t) \leq 0$. Cette fonction de défaillance est monotone décroissante. En effet, le dommage ne peut pas décroître. La probabilité de défaillance à l'instant t , aussi appelée probabilité de défaillance instantanée est :

$$P_f(t) = \int_{G(X,t) \leq 0} f(x) dx \quad (6)$$

La probabilité de défaillance cumulée est, elle, définie pour un intervalle de temps $[0; T]$:

$$P_{fc}([0; T]) = \text{Prob}(\exists \tau \in [0; T], G(X, \tau) \leq 0) \quad (7)$$

La fonction de performance choisie étant monotone, on a $P_{fc}([0; T]) = P_f(T)$.

3.2 Enjeux numériques de l'analyse de fiabilité

La fonction de performance G n'étant pas une fonction explicite des variables aléatoires C , S , p_D et D_c , il est impossible de calculer analytiquement la probabilité de défaillance instantanée. Dès lors, une approximation de la fonction de performance G ou de l'état-limite $G = 0$ est généralement construite. C'est grâce à cette approximation que la probabilité de défaillance instantanée est alors évaluée directement ou estimée via la méthode Monte Carlo.

Plusieurs familles de méthodes existent pour construire cette approximation. Dans le cadre de la fiabilité dépendant du temps, on peut citer les méthodes Phi2 [9] qui approximent l'état limite par une fonction linéaire ou quadratique et estiment des franchissements entre domaine de sûreté et de défaillance. Ces méthodes sont peu coûteuses mais c'est au prix d'hypothèses fortes sur la forme de la fonction de performance. Certaines méthodes ne font d'hypothèses a priori sur la forme de la fonction de performance. On peut citer les méta-modèles de type krigeage [10] ou le chaos polynomial [11]. Les méta-modèles de krigeage sont très populaires dans le domaine de la fiabilité car ils sont simples à construire et peuvent être enrichis facilement. Dans [12], les auteurs ont proposé la construction d'un méta-modèle pour l'étude de la défaillance par fatigue basé sur un cumul linéaire du dommage.

Dans ce papier, on se propose de construire un méta-modèle de type krigeage à partir du modèle décrit en section 2.1 qui prend en compte l'historique de chargement. La structure étudiée est discrétisée à l'aide de la méthode des éléments finis. L'intervalle temporel est également discrétisé avec un pas de temps Δt . A l'échelle macroscopique, un problème élastique est résolu. Le dommage n'est calculé qu'en un unique *hot spot* qui correspond au point de Gauss d'un élément du maillage. L'évolution de la plasticité et du dommage à l'échelle microscopique est fait par un algorithme de retour radial après discrétisation des équations d'évolution présentées en section 2.1.

4 Méta-modélisation du dommage et estimation de la probabilité de défaillance

Dans cette section, on présente tout d'abord brièvement les deux types de méta-modèles de krigeage qui sont considérés : le krigeage ordinaire et le krigeage à gradient. Le lecteur curieux pourra se référer à [13]. On indique ensuite brièvement comme le méta-modèle construit est exploité pour estimer une probabilité de défaillance. Enfin, on détaille comment l'apprentissage, c'est-à-dire l'enrichissement du méta-modèle par des évaluations du modèle à deux échelles, est effectué. Le calcul du dommage étant incrémental, on cherche à profiter au maximum des calculs coûteux réalisés et on propose donc 3 stratégies d'enrichissement multiple.

4.1 Approximation du dommage par krigeage

Le dommage D dépend du temps t mais également des variables aléatoires p_D , S et C . On cherche à construire une approximation $\hat{D}(t, p_D, C, S)$ de D . La méthode d'approximation par krigeage consiste à dire que \hat{D} est la réalisation d'un processus gaussien s'écrivant ainsi :

$$Q(\underline{u}) = \alpha(\underline{u}) + Z(\underline{u}) \quad (8)$$

Avec $\alpha(\underline{u})$ une quantité déterministe inconnue, $Z(\underline{u})$ un processus gaussien de moyenne nulle et \underline{u} l'argument du processus. Dans notre cas, \underline{u} regroupe les variables (t, p_D, C, S) . Cette estimation est construite à partir d'un nombre restreint d'évaluations de la fonction $D(t, p_D, C, S)$ en n_{obs} points d'observation. Ces observations sont regroupées dans un vecteur \underline{D}_{obs} . Le méta-modèle est écrit comme une combinaison linéaire de ces observations, ainsi

$$\hat{D}(\underline{u}) = \underline{w}(\underline{u}) \cdot \underline{D}_{obs} \quad (9)$$

On exige ensuite que \hat{D} soit le meilleur prédicteur linéaire non biaisé ce qui mène à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Q(\underline{u}) - \hat{D}(\underline{u})) &= 0 \\ \underline{w} &= \operatorname{argmin} \mathbb{E}((Q(\underline{u}) - \hat{D}(\underline{u}))^2) \end{aligned} \quad (10)$$

avec \mathbb{E} l'espérance. Finalement, construire \hat{D} se reformule en un problème de minimisation sous contrainte. La forme de la structure de covariance de Z étant (le plus souvent) inconnue, une fonction de covariance

doit être choisie. Ici, on choisit une fonction de type gaussienne anisotrope (id est, la longueur de corrélation n'est pas la même pour toutes les variables). Les longueurs de corrélation et la variance du processus gaussien sont alors deux hyperparamètres qu'il faut déterminer avant de pouvoir effectuer la construction de l'approximation \hat{D} . Ici, ils sont calculés en maximisant la fonction de vraisemblance. Le krigeage fournit, en plus d'une estimation \hat{D} , une expression de la variance σ_D^2 qui peut guider l'apprentissage.

4.2 Approximation du dommage par co-krigeage à gradient

Le dommage étant évalué de manière incrémental, nous disposons d'une approximation de la dérivée du dommage par rapport au temps $\frac{\Delta D}{\Delta t}$ en plus de la valeur du dommage $D(t_k)$ au temps t_k . Le co-krigeage à gradient [14] permet d'exploiter cette information supplémentaire pour construire une estimation de meilleure qualité. Considérons les processus gaussiens suivants :

$$\begin{aligned} Q(\underline{u}) &= \alpha_0(\underline{u}) + Z_0(\underline{u}) \\ \frac{\partial Q(\underline{u})}{\partial t} &= \alpha_1(\underline{u}) + Z_1(\underline{u}) \end{aligned} \quad (11)$$

où α_0 et α_1 sont deux grandeurs déterministes inconnues et $Z_0(\underline{u})$ et $Z_1(\underline{u})$ deux processus gaussiens de moyenne nulle. On choisit ici que $\alpha_1(\underline{u}) = \frac{\partial \alpha_0(\underline{u})}{\partial t}$. Le méta-modèle s'écrit comme une combinaison linéaire de toutes les observations (valeurs regroupées dans \underline{D}_{obs} et les gradients regroupés dans $\underline{\Delta D}_{obs}$) :

$$\hat{D}(\underline{u}) = \underline{w}_0(\underline{u}) \cdot \underline{D}_{obs} + \underline{w}_1(\underline{u}) \cdot \underline{\Delta D}_{obs} \quad (12)$$

Comme pour le krigeage, on cherche à ce que \hat{D} soit le meilleur prédicteur non biaisé. La construction des matrices de covariance est plus coûteuse dans le cas du co-krigeage à gradients à cause des covariances croisées entre Z_0 et Z_1 . Dans ce papier, on considérera des fonctions de covariance gaussiennes anisotropes. Les hyperparamètres sont estimés par optimisation de la fonction de vraisemblance.

4.3 Evaluation de la probabilité de défaillance instantanée

Une fois un méta-modèle \hat{D} de D construit, la probabilité de défaillance instantanée $P_f(t)$ est estimée par la méthode de Monte Carlo sur une population Ω_{MC} de taille n_{MC} (regroupant les réalisations des 4 variables aléatoires C , S , p_D et D_c) et pour n_{temps} valeurs de t regroupées dans Ω_t . Cette estimation introduit une erreur due à la taille finie de la population. Cette erreur peut être contrôlée en utilisant notamment le coefficient de variation défini par $\sqrt{\frac{P_f}{n_{MC}(1-P_f)}}$.

4.4 Apprentissage

Notons $\hat{G} = D_c - \hat{D}$ l'approximation de la fonction de performance obtenue grâce au méta-modèle \hat{D} du dommage. Puisque l'objectif est d'estimer des probabilités de défaillance, il est important que l'approximation \hat{G} soit précise près de l'état limite, id est là où $\hat{G} \simeq 0$. Dès lors, on choisit d'utiliser la fonction d'apprentissage U classique en fiabilité [15] définie par $U(\underline{u}) = \frac{\hat{G}(\underline{u})}{\sigma_D}$. Le critère d'arrêt d'apprentissage se formule ainsi [15] : tant que moins de 99% des points de $\Omega_{MC} \times \Omega_t$ vérifient $U \geq 1$, alors l'apprentissage continue.

Si le critère est vérifié, le point où doit avoir lieu l'observation pour enrichir le méta-modèle est défini par $(t^*, S^*, C^*, p_D^*) = \text{argmin}(U)$. Le dommage $D(t^*)$ est donc calculé pour les réalisations des variables aléatoires S^* , C^* , p_D^* . L'apprentissage unique consiste à ajouter aux observations la valeur $D(t^*)$. Ce calcul est coûteux mais apporte beaucoup d'information. En effet, $D(t^*)$ a été calculé pour tous les temps t de l'intervalle discrétisé $[0; t^*]$ pour la réalisation (S^*, C^*, p_D^*) . On propose donc un apprentissage multiple uniforme qui consiste à utiliser n_{ajout} valeurs du dommage D réparties uniformément sur l'intervalle discrétisé $[0; t^*]$ pour la réalisation (S^*, C^*, p_D^*) .

De plus, lorsque $p < p_D$, le dommage D est nul, seule la plasticité évolue et seule la variable C aléatoire intervient car p_D , S et s pilotent l'évolution du dommage. L'évolution de la plasticité étant calculée uniquement à l'échelle microscopique (sans équilibre mécanique global à vérifier), on peut démontrer la propriété suivante :

Proposition 1 Si on connaît les incréments $d\underline{\underline{X}}$ et $d\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu p}$ pour une valeur de C , alors les incréments $d\underline{\underline{\tilde{X}}}$ et $d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{\mu p}$ pour une valeur $\tilde{C} \neq C$ peuvent se calculer ainsi :

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{\mu p} &= \frac{3E + 2(1 + \nu)C}{3E + 2(1 + \nu)\tilde{C}} d\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mu p} \\ d\underline{\underline{\tilde{X}}} &= \frac{\tilde{C}}{C} \frac{3E + 2(1 + \nu)C}{3E + 2(1 + \nu)\tilde{C}} d\underline{\underline{X}} \end{aligned} \quad (13)$$

Ainsi, à partir d'un calcul d'une évolution de plasticité jusqu'à $p = \max(p_D) = 1$, il est possible de calculer à moindre coût l'évolution de la plasticité, tant que le dommage reste nul, pour toutes les réalisations des variables aléatoires. Dès lors, on peut connaître le sous-ensemble $\Omega_{D=0} \subset (\Omega_{MC} \times \Omega_t)$ pour lequel le dommage est nul.

Ainsi, on connaît donc la valeur du dommage pour tous les points de $\Omega_{D=0} \cup ((S^*, C^*, p_D^*) \times [0; t^*])$. On propose les deux stratégies supplémentaires suivantes :

- On utilise n_{ajout} valeurs du dommage D aux points de $\Omega_{D=0} \cup ((S^*, C^*, p_D^*) \times [0; t^*])$ situés le plus loin des points déjà utilisés pour le meta-modèle est la plus faible. On utilise une distance euclidienne pour cette mesure.
- On utilise n_{ajout} valeurs du dommage D aux points de $\Omega_{D=0} \cup ((S^*, C^*, p_D^*) \times [0; t^*])$ correspondant aux minimum locaux de U sur cet ensemble

5 Application sur un cas d'étude

5.1 Description de la structure et résultat de référence

Considérons une plaque rectangulaire de longueur $L = 2\text{m}$ et de largeur $l = 0.5\text{m}$ représentée sur la figure 2 (gauche). Ceci est la modélisation d'un assemblage soudé en T entre deux plaques. Une condition de Dirichlet homogène est imposée en $x = 0$. Un effort $F(t)$ dans la direction verticale est imposé en $x = L$. Les autres bords sont libres d'effort. On utilise le modèle d'endommagement à deux échelles présenté en section 2.1 avec les paramètres matériaux et variables aléatoires rappelés dans la section 2.2. Le maillage éléments finis est composé d'éléments quadrangulaires avec une interpolation linéaire. Le *hot spot* étudié est situé proche de la condition de Dirichlet. Aussi, seul un élément endommageable est considéré et est illustré en noir sur la figure 2 (gauche). L'évolution élastoplastique endommageable sur cet élément est calculée à l'aide d'un algorithme de retour radial sur l'intervalle de temps $[0; t_{fin}] = [0; 10600\text{s}]$ discrétisé à l'aide d'un pas de temps $\Delta t = 0.005\text{s}$. Afin de représenter un chargement cyclique avec quelques irrégularités, on génère $F(t)$ comme la réalisation d'un processus gaussien avec une corrélation de Matern. On donne en figure 2 (droite) l'évolution de la contrainte équivalente de Von Mises macroscopique au *hot spot* sur un extrait de l'intervalle temporel.

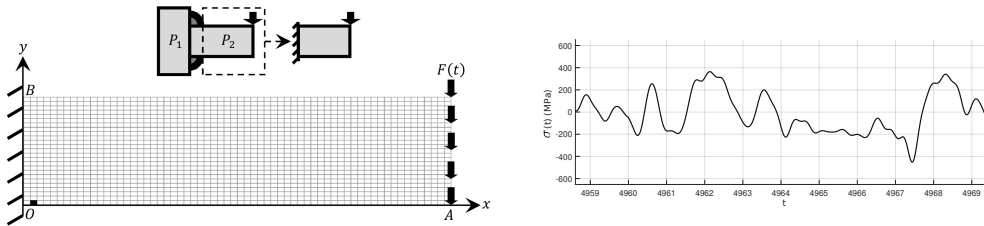


FIGURE 2 – Structure étudiée et maillage utilisé (gauche) - extrait de la contrainte locale (droite)

Une population de Monte Carlo regroupant $n_{MC} = 5000$ matériaux, c'est-à-dire n_{MC} réalisations de (S, C, p_D, D_c) a été générée. L'évolution du dommage a été calculée pour chacun de ces matériaux et n_{MC} trajectoires ont été obtenues. Elles permettent d'estimer la probabilité de défaillance instantanée $P_{ref}(t)$ pour $n_{temps} = 100$ valeurs de t réparties uniformément dans $[0; t_{fin}]$. Cette probabilité de défaillance est tracée en figure 3. Le coût total de cette simulation est de 1740 minutes (1 jour et 5 heures).

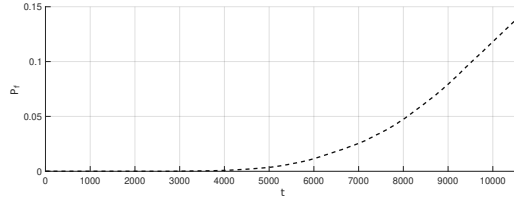


FIGURE 3 – Probabilité de défaillance instantanée en fonction du temps estimée par Monte Carlo

5.2 Construction et exploitation du méta-modèle

Le dommage est tout d'abord évalué en $n_{obs} = 150$ points d'observation correspondant à une grille de 5 temps uniformément répartis sur $[0; t_{fin}]$ et 30 triplets de (p_D, S, C) obtenus par *Latin Hypercube Sampling* et *rejection sampling* de façon à suivre les distributions présentées en section 2.2. Ces observations sont regroupées dans un vecteur \underline{D}_{obs} . On conserve également la dérivée du dommage par rapport au temps pour le co-krigeage à gradient. Le méta-modèle \hat{D} est alors construit par krigeage ou co-krigeage à gradients. L'apprentissage est ensuite réalisé comme décrit en section 4.4. Quatre stratégies sont considérées : apprentissage unique (ajout d'une observations à la fois) et les 3 stratégies d'apprentissage multiples avec $n_{ajout} = 5$. Afin d'éviter que l'apprentissage ne prenne jamais fin, on ajoute un nombre d'itérations d'apprentissage maximum $iter_{max} = 140$. Une fois le critère d'arrêt d'apprentissage atteint, le méta-modèle est exploité pour le calcul de la probabilité de défaillance (voir section 4.3).

On présente les résultats obtenus dans les tableaux 2 pour l'approche par krigeage et 3 pour l'approche par co-krigeage à gradient en terme de coûts de calcul et de précision via l'erreur suivante

$$\eta = \frac{1}{n_{temps}} \sum_{k=1}^{n_{temps}} |P_{ref}(t_k) - P_{est}(t_k)|.$$

	Apprentissage unique	Apprentissage uniforme	Apprentissage géométrique	Apprentissage aux minimums locaux
Itérations	68	66	58	29
Coût observations (min)	32.0	31.2	29.4	25.5
Coût métamodélisation (min)	9.1	31.6	23.5	3.7
Coût total (min)	41.1	62.8	52.9	29.2
η	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$5.03 \cdot 10^{-4}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2 – Coûts et erreur obtenus pour chacune des stratégies d'apprentissage appliquées à un estimateur construit par krigeage

	Apprentissage unique	Apprentissage uniforme	Apprentissage géométrique	Apprentissage aux minimums locaux
Itérations	140	140	140	140
Coût observations (min)	37.8	43.8	41.95	39.5
Coût métamodélisation (min)	37.0	214.6	156.9	157.3
Coût total (min)	76.0	263.9	203.8	202.3
η	$4.34 \cdot 10^{-3}$	$2.03 \cdot 10^{-3}$	$9.21 \cdot 10^{-4}$	$9.52 \cdot 10^{-4}$

TABLE 3 – Coût et erreur obtenus pour chacune des stratégies d'apprentissage appliquées à un estimateur construit par krigeage à gradient

On observe que pour le krigeage à gradient, l'apprentissage ne s'arrête que lorsque le nombre d'itération maximal est atteint. Il en résulte un coût d'observations plus élevé que pour un krigeage simple. Le coût de construction du méta-modèle krigeage à gradient est également par nature plus élevé que le krigeage simple. On observe également que, dans l'ensemble, le cokrigeage à gradient permet d'obtenir une plus petite erreur que le krigeage simple.

Pour le krigeage simple, d'après le tableau 2, l'apprentissage uniforme est celui qui mène à la meilleure estimation de la probabilité de défaillance. La stratégie la moins coûteuse est celle des minimums locaux. Pour le co-krigeage à gradient, d'après le tableau 3, l'apprentissage géométrique est celui qui mène à la meilleure estimation de la probabilité de défaillance. La stratégie la moins coûteuse est celle de l'apprentissage unique, ce qui s'explique par la nature du co-krigeage à gradient.

De manière générale, toutes les stratégies de méta-modélisation permettent de réduire le temps de calcul par rapport à une approche de référence d'un facteur au moins 8.

6 Conclusion

On a proposé dans cet article deux stratégies de méta-modélisation du dommage avec 4 types d'enrichissement pour le calcul de probabilité de défaillance avec prise en compte de l'aléa matériau et de l'historique du chargement. La méta-modélisation permet de réduire grandement les coûts numériques. Le co-krigeage à gradient est un peu plus précis que le krigeage mais nettement plus coûteux. A court terme, il est nécessaire de proposer une technique permettant d'adapter la taille de la population de Monte Carlo. En effet, cette population doit être suffisamment importante pour éviter des biais statistiques dans l'estimation de faibles probabilités de défaillance, surtout au début de l'intervalle temporel. Les futurs travaux concerneront la prise en compte de l'aléa dans le chargement qui sera modélisée comme un processus gaussien. On cherchera également à considérer plusieurs *hots spots* simultanément.

Références

- [1] *RP-C203 : Fatigue of offshore steel structures*, 2014
- [2] A. Miner, *Cumulative Damage in Fatigue*, Journal of applied mechanics, ASME, A159-A164, 2021.
- [3] X. Pitoiset, *Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*, thèse de doctorat, Université de Bruxelles, 2001
- [4] C. Freyssinet, V. Rey, F. Schoefs, T. Moro. *Bayesian calibration of a non linear damage model of steel structures with random material property : sensitivity analysis and reliability assessment*, Engineering Structures, Elsevier, accepté, 2023.
- [5] J. Lemaitre, I. Doghri. *Damage 90 : a post processor for crack initiation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 197-232, 1994.
- [6] R. Desmorat, J. Lemaître. *Handbook of Materials Behavior Models*, Elsevier, 525-535, 2001.
- [7] A. Banville, T. Palin-Luc, S. Lassere, *A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion*, International Journal of fatigue, Elsevier, 755-769, 2003.
- [8] K. Van, B. Griveau. *On a new multiaxial fatigue limit criterion- Theory and application*, Biaxial and multiaxial fatigue(A 90-16739 05-39). London, Mechanical Engineering Publications, 479-496, 1989.
- [9] C. Andrieu-Renaud, B. Sudret, M. Lemaire, *The phi2 method : a way to compute time-variant reliability*, Reliability Engineering and System Safety, Elsevier, 75-86, 2004.
- [10] D.G. Krige, *A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the witwatersrand*. Mémoire de D.E.A., University of the Witwatersrand, 1951.
- [11] L. Hawchar, C.P. El Soueidy, F. Schoefs, *Principal component analysis and polynomial chaos expansion for time-variant reliability problems*, Reliability Engineering and System Safety, Elsevier, 406-416, 2017.
- [12] Q. Huchet, C. Mattrand, P. Beaurepaire, N. Relun, N. Gayton, *AK-DA : An efficient method for the fatigue assessment of wind turbine structures*. Wind Energy, Wiley, 638-652, 2009.
- [13] C.E. Rasmussen, C.K.I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*, The MIT Press, Adaptive Computation and Machine Learning, Cambridge, MA, USA, 2006
- [14] M.D. Morris, T. J. Mitchell, D. Ylvisaker; *Bayesian desing and analysis of computer experiments : use of derivatives in surface prediction*, Technometrics, Taylor and Francis, 243-255, 1993.
- [15] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, and N. Relun. *A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models*, Reliability Engineering System Safety, Elsevier, 232-240, 2013