

# Résolution par résidus pondérés d'une formulation sous forme d'égalité de systèmes vibratoires avec frottement de Coulomb

Mathias Legrand<sup>1</sup>, Christophe Pierre<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mechanical Engineering, McGill University, mathias.legrand@mcgill.ca

<sup>2</sup> Department of Mechanical Engineering, Stevens Institute of Technology, cpierre@stevens.edu

**Résumé** — Une formulation compacte est proposée pour les solutions périodiques d'oscillateurs sujet à du frottement de Coulomb. Les algorithmes existants reposent sur des procédures fréquence-temps alternées et supposent souvent une régularisation ou une pénalisation. Dans ce travail, les conditions de frottement sont exprimées sous forme d'égalités qui sont ensuite satisfaites dans un sens intégral par le biais d'une formulation par résidus pondérés en temps sur une période. La résolution numérique des équations algébriques non linéaires qui en résultent permet d'obtenir des solutions périodiques très précises avec des phases de collage et de glissement claires.

**Mots clés** — Frottement de Coulomb, solutions périodiques, formulation basée sur l'égalité.

## 1 Introduction

Les non-linéarités non lisses de frottement sec et de contact unilatéral sont omniprésentes dans les structures en ingénierie. On pense par exemple aux rotors de turbomachines, qui peuvent être soumis à des contacts intermittents et des frottements [1]. La prédiction de la réponse dynamique des systèmes non lisses est un domaine de recherche de longue date. Les équations du mouvement peuvent être difficiles à résoudre parce que les conditions de contact unilatéral et de frottement sont généralement formulées en tant que problèmes de complémentarité ou d'inclusions différentielles [2, 3]. Le modèle fondamental de l'amortissement par frottement sec est la loi classique de Coulomb où les parties positives/négatives de la force de frottement et les parties positives/négatives de la vitesse relative sont les variables complémentaires. Pendant le glissement, la force de frottement est constante par morceaux selon le signe la vitesse relative des composants frottant, et pendant le collage, elle est une fonction multi-valuée de la vitesse relative pour une vitesse relative nulle.

La recherche de solutions périodiques de systèmes avec frottement remonte aux premiers travaux de Den Hartog [4]. Ces systèmes peuvent être analysés à l'aide de méthodes d'intégration temporelle, et la détection précise des transitions entre les phases de glissement, de collage et de séparation peut nécessiter des schémas avancés de pas de temps ou d'événements [3]. Le contact et le frottement entre les modèles d'éléments finis de corps déformables sont souvent traités à l'aide de la méthode des Lagrangiens augmentés, dans laquelle, à convergence, les multiplicateurs sont les forces de contact [5]. Cependant, les méthodes temporelles nécessitent la simulation coûteuse de la réponse transitoire et les méthodes dans le domaine fréquentiel sont donc souvent mieux adaptées aux problèmes de vibration, la plus courante étant la méthode de l'équilibrage harmonique [6]. Le frottement de Coulomb n'étant pas une non-linéarité polynomiale lisse, la méthode de l'équilibrage harmonique nécessite le calcul des forces non-linéaires dans le domaine temporel à chaque itération de l'algorithme de résolution. Les méthodes multi-harmoniques dans le domaine fréquence-temps comprennent la méthode Alternating Frequency/Time [7], la méthode Hybrid Frequency-Time domain [8] et la méthode Dynamic Lagrangian Frequency Time [9]. Ces méthodes peuvent gérer plusieurs points de frottement et un nombre important d'harmoniques mais peuvent également souffrir de problèmes de convergence ou être limitées à des modèles d'interface de frottement sans masse. En outre, des procédures de "lissage" ou de régularisation sont couramment utilisées pour contourner le caractère multi-valué de la loi de Coulomb. Les fonctions régularisées comprennent la fonction tangente hyperbolique [10], la fonction arctangente [11] ou la fonction linéaire par morceaux [12]. En outre, la masse de l'élément frottant est souvent supposée nulle [13], et la force de frottement devient alors une simple fonction du déplacement relatif avec le degré

de liberté voisin. Cependant, l'hypothèse de l'absence de masse n'est pas physique, puisque le frottement prend bien place entre des structures massiques. Seules quelques études comme [14], qui sont basées sur la méthode Dynamic Lagrangian Frequency/Time, considèrent la loi de Coulomb sans régularisation ni hypothèse d'un amortisseur sans masse.

Dans le domaine des méthodes numériques pour la mécanique du contact des systèmes dynamiques non lisses [15, 3, 16], il est possible de convertir les inclusions différentielles décrivant les conditions de contact en un ensemble équivalent d'égalités non lisses. Celles-ci sont exprimées comme l'ensemble de niveau zéro de certaines fonctions dont l'existence a été démontrée pour les problèmes de contact avec frottement [17, 18, 19]. Cette approche a été récemment utilisée pour les solutions périodiques d'une barre unidimensionnelle avec un contact de Signorini [20].

Dans cet article, la formulation implicite du frottement de Coulomb est mise en œuvre au sein de la méthode de l'équilibrage harmonique. La loi de Coulomb est écrite sous forme d'égalité non lisse et les équations du mouvement sont satisfaites au sens intégral par le biais de résidus pondérés. Un système à deux degrés de liberté avec une interface de frottement unidimensionnelle est considéré. Des réponses périodiques sont obtenues en utilisant une procédure de Ritz-Galerkin et en résolvant numériquement les équations algébriques non-linéaires résultantes à l'aide d'un solveur non-linéaire basé sur une méthode de région de confiance. L'alternance temps-fréquence est remplacée par le calcul d'une intégrale sur une période du mouvement. Aucune hypothèse simplificatrice comme l'absence de masse à l'interface de contact ou la régularisation de la loi de frottement n'est nécessaire. Les réponses périodiques calculées prennent en compte des transitions collement-glisement complexes, convergent lorsque le nombre d'harmoniques augmente, et leur précision est validée par une intégration temporelle.

## 2 Frottement de Coulomb sous forme d'égalité

Pour le modèle de base du frottement unidimensionnel illustré sur Figure 1 (avec  $N > 0$ ), la loi classique de Coulomb sur le frottement s'énonce

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 & \implies |r| \leq \mu N \\ \dot{u} \neq 0 & \implies |r| = \mu N \text{ and } \exists \alpha \geq 0 | r = -\alpha \dot{u} \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement. Dans le plan  $(\dot{u}, r)$ , l'ensemble des points admissibles correspondant aux conditions de collage et de glissement de la masse dans (1) peut être représenté classiquement comme indiqué sur la Figure 1. La relation entre  $r$  et  $\dot{u}$ , que l'on note  $r(\dot{u})$ , est multivoque puisque l'ensemble des valeurs de  $r$  lorsque  $\dot{u} = 0$  ne se réduit pas à un seul point. On peut transformer (1) en une égalité

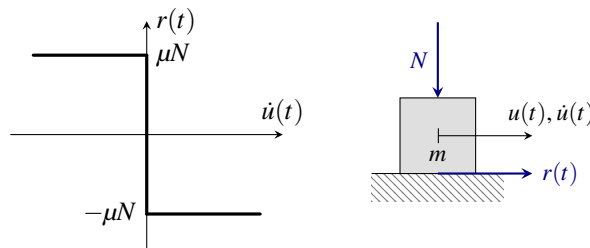


FIGURE 1 – Les conditions du frottement de Coulomb.

équivalente non lisse [18, 19, 3, 21] en considérant la fonction bi-dimensionnelle

$$\Psi(\dot{u}, r) = \dot{u} + \min(0, \rho(r + \mu N) - \dot{u}) + \max(0, \rho(r - \mu N) - \dot{u}) \quad (2)$$

où  $\rho > 0$  est un paramètre de normalisation choisi pour faciliter les calculs. De manière équivalente :

$$\Psi(\dot{u}, r) = \begin{cases} \rho(r - \mu N) & \text{si } \rho(r + \mu N) - \dot{u} > 0 \text{ et } \rho(r - \mu N) - \dot{u} > 0, \\ \dot{u} & \text{si } \rho(r + \mu N) - \dot{u} > 0 \text{ et } \rho(r - \mu N) - \dot{u} < 0, \\ \rho(r + \mu N) & \text{si } \rho(r + \mu N) - \dot{u} < 0 \text{ et } \rho(r - \mu N) - \dot{u} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Notons que la condition “ $\rho(r + \mu N) - \dot{u} < 0$  et  $\rho(r - \mu N) - \dot{u} > 0$ ” ne peut être satisfaite parce qu’elle implique  $2\rho\mu N < 0$  qui est impossible. En définissant l’ensemble de niveau zéro (ou ligne de niveau zéro)  $\Psi_0$  de  $\Psi(\dot{u}, r)$  comme  $\Psi_0 \equiv \{(\dot{u}, r) \mid \Psi(\dot{u}, r) = 0\}$ , on déduit de (3) ce qui suit :

$$\begin{aligned} \Psi(\dot{u}, r) = 0 \implies & \quad r = +\mu N \text{ et } \dot{u} \leq 0 && \text{(glissement négatif)} \\ & \text{or } \dot{u} = 0 \text{ et } -\mu N \leq r \leq \mu N && \text{(collage)} \\ & \text{or } r = -\mu N \text{ et } \dot{u} \geq 0 && \text{(glissement positif)} \end{aligned} \quad (4)$$

qui peut s’écrire comme

$$\Psi_0 = \underbrace{(-\infty, 0] \times \{\mu N\}}_{\text{glissement négatif}} \cup \underbrace{\{0\} \times [-\mu N, \mu N]}_{\text{collage}} \cup \underbrace{[0, +\infty[ \times \{-\mu N\}}_{\text{glissement positif}}. \quad (5)$$

Par conséquent,  $\Psi_0$  décrit exactement l’ensemble de frottement de Coulomb défini par (1) et indiqué sur la Figure 1, et l’égalité non lisse

$$\dot{u} + \min(0, \rho(r + \mu N) - \dot{u}) + \max(0, \rho(r - \mu N) - \dot{u}) = 0 \quad (6)$$

est donc une autre version de la loi de Coulomb. La Figure 2 illustre  $\Psi(\dot{u}, r)$  et  $\Psi_0$ . Dans les trois cas de (3),  $\Psi(\dot{u}, r)$  se réduit à deux surfaces planes de pente  $\rho$  dans la direction  $r$  et à une surface plane de pente unitaire dans la direction  $\dot{u}$ .

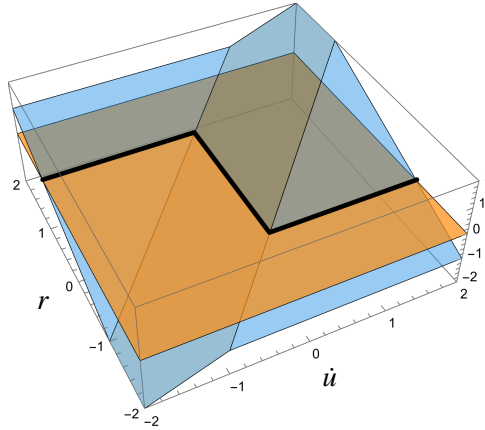


FIGURE 2 – Description implicite exacte de la loi de frottement de Coulomb unidimensionnelle, pour  $\Psi(\dot{u}, r)$  défini par (2), avec  $\rho = 1$ . L’intersection de la surface représentée par la fonction (de niveau)  $\Psi(\dot{u}, r)$  [bleu] avec le plan de niveau zéro [orange] donne l’ensemble de niveau zéro correspondant  $\Psi_0$  [ligne noire continue] défini par (5), pour  $\mu N = 1$ .

### 3 Résidus pondérés et solutions périodiques

Sur la base de la description implicite du frottement présentée ci-dessus, on présente ici une formulation faible associée à une projection de Ritz-Galerkin pour trouver les solutions périodiques. Le système à deux degrés de liberté avec un frottement unidimensionnel illustré sur Figure 3 est examiné.

En utilisant l’ensemble de niveau zéro de la fonction (2) appliquée au deuxième degré de liberté, les équations du mouvement s’écrivent

$$\Psi_1(x_1, x_2, r) = m_1 \ddot{x}_1 + (d_1 + d_2) \dot{x}_1 - d_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 - f_1 = 0 \quad (7a)$$

$$\Psi_2(x_1, x_2, r) = m_2 \ddot{x}_2 + d_2 \dot{x}_2 - d_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 - f_2 - r = 0 \quad (7b)$$

$$\Psi_r(\dot{x}_2, r) = \dot{x}_2 + \min(0, \rho(r + \mu N) - \dot{x}_2) + \max(0, \rho(r - \mu N) - \dot{x}_2) = 0 \quad (7c)$$

qui constitue un ensemble d’équations algébriques différentielles [21] avec  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $r(t)$  comme inconnues.

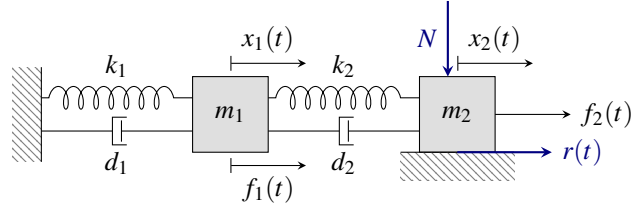


FIGURE 3 – Système masse-ressort à deux degrés de liberté avec frottement de Coulomb sur le deuxième degré de liberté.

Pour une excitation harmonique de fréquence  $\omega$ , on cherche les solutions de période  $T = 2\pi/\omega$  au sens des résidus pondérés. Toutes les inconnues sont discrétisées en les développant sur une base tronquée de fonctions de forme périodiques  $T$  avec  $N_\phi$  éléments,  $\{\phi_k(t)\}_{k=1,\dots,N_\phi}$ . Dans cet article les fonctions de Fourier sont sélectionnées, mais d'autres fonctions peuvent être envisagées. En raison de la symétrie de la non-linéarité de Coulomb, il n'y a pas de contribution des harmoniques pairs ou des termes constants aux solutions périodiques. Ainsi, pour une approximation avec  $N_\phi$  fonctions de Fourier, où  $N_\phi$  est pair sans perte de généralité, il y a un nombre égal d'harmoniques cosinus et sinus impairs allant de 1 à  $N_\phi - 1$ , et les fonctions de forme prennent la forme

$$\{\phi_k(t)\}_{k=1,\dots,N_\phi} = \{\cos \omega t, \sin \omega t, \dots, \cos(2k-1)\omega t, \sin(2k-1)\omega t, \dots, \cos(N_\phi-1)\omega t, \sin(N_\phi-1)\omega t\} \quad (8)$$

et les fonctions inconnues sont développées comme suit :

$$x_1(t) \approx x_{1h}(t) = \sum_{k=1}^{N_\phi/2} [x_{1_{2k-1}} \cos(2k-1)\omega t + x_{1_{2k}} \sin(2k-1)\omega t], \quad (9a)$$

$$x_2(t) \approx x_{2h}(t) = \sum_{k=1}^{N_\phi/2} [x_{2_{2k-1}} \cos(2k-1)\omega t + x_{2_{2k}} \sin(2k-1)\omega t], \quad (9b)$$

$$r(t) \approx r_h(t) = \sum_{k=1}^{N_\phi/2} [r_{2k-1} \cos(2k-1)\omega t + r_{2k} \sin(2k-1)\omega t]. \quad (9c)$$

Les fonctions  $x_{1h}(t)$ ,  $x_{2h}(t)$  et  $r_h(t)$  sont les approximations d'ordre  $N_\phi$  des fonctions inconnues, telles que les  $3N_\phi$  coefficients  $x_{1k}$ ,  $x_{2k}$  et  $r_k$  deviennent les inconnues du problème discrétisé. On suppose que les excitations externes sont de la forme  $f_1(t) = f_{11} \cos \omega t$  et  $f_2(t) = 0$ . Les vecteurs des coefficients de Fourier sont définis par  $\mathbf{x}_1 = [x_{11}, \dots, x_{1_{N_\phi}}]^\top$ ,  $\mathbf{x}_2 = [x_{21}, \dots, x_{2_{N_\phi}}]^\top$ , et  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_{N_\phi}]^\top$ , et celui la force externe par  $\mathbf{f}_1 = [f_{11}, 0, \dots, 0]^\top$ .

Ensuite, les développements (9) et éventuellement leurs dérivées terme à terme sont substitués dans les deux équations du mouvement et la condition d'égalité du frottement, ce qui donne

$$\Psi_1(x_{1h}, x_{2h}, r_h) = m_1 \ddot{x}_{1h} + (d_1 + d_2) \dot{x}_{1h} - d_2 \dot{x}_{2h} + (k_1 + k_2) x_{1h} - k_2 x_{2h} - f_1 \quad (10a)$$

$$\Psi_2(x_{1h}, x_{2h}, r_h) = m_2 \ddot{x}_{2h} + d_2 \dot{x}_{2h} - d_2 \dot{x}_{1h} + k_2 x_{2h} - k_2 x_{1h} - f_2 - r_h \quad (10b)$$

$$\Psi_r(\dot{x}_{2h}, r_h) = \dot{x}_{2h} + \min(0, \rho(r_h + \mu N) - \dot{x}_{2h}) + \max(0, \rho(r_h - \mu N) - \dot{x}_{2h}) \quad (10c)$$

dans lesquelles  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  et  $\Psi_r$  sont les résidus de l'approximation d'ordre  $N_\phi$ . Une projection de Ritz-Galerkin est effectuée en exigeant que les résidus soient orthogonaux à l'ensemble des fonctions de forme, comme suit

$$\int_0^T \phi_k(t) \Psi_1(x_{1h}(t), x_{2h}(t), r_h(t)) dt = 0 \quad k = 1, \dots, N_\phi \quad (11a)$$

$$\int_0^T \phi_k(t) \Psi_2(x_{1h}(t), x_{2h}(t), r_h(t)) dt = 0 \quad k = 1, \dots, N_\phi \quad (11b)$$

$$\int_0^T \phi_k(t) \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) dt = 0 \quad k = 1, \dots, N_\phi. \quad (11c)$$

Dans ce système non linéaire de  $3N_\phi$  équations algébriques avec  $3N_\phi$  inconnues, (11a) et (11b) régissent la dynamique des masses 1 et 2, respectivement, et sont donc linéaires en  $x_{1h}$ ,  $x_{2h}$  et  $r_h$ . La non-linéarité

est limitée à l'équation (11c), qui est non-lisse en  $\dot{x}_{2h}$  et  $r_h$ . A partir de (11), on obtient le système suivant d'équations non linéaires couplées :

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \quad (12a)$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 - \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (12b)$$

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (12c)$$

avec  $\mathbf{A}_{11} = (k_1 + k_2)\mathbf{I} + (d_1 + d_2)\mathbf{D} - m_1\Omega^2$ ,  $\mathbf{A}_{12} = -k_2\mathbf{I} - d_2\mathbf{D} = \mathbf{A}_{21}$ ,  $\mathbf{A}_{22} = k_2\mathbf{I} + d_2\mathbf{D} - m_2\Omega^2$ , la matrice identité  $\mathbf{I}$  de taille appropriée, et les matrices diagonales par bloc<sup>1</sup>

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{Diag}_{k=1, \dots, N_\phi/2} \begin{bmatrix} 0 & (2k-1)\omega \\ -(2k-1)\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \mathbf{B}\mathbf{Diag}_{k=1, \dots, N_\phi/2} \begin{bmatrix} (2k-1)\omega & 0 \\ 0 & (2k-1)\omega \end{bmatrix}. \quad (13)$$

De plus, les composantes de  $\mathbf{g}_r$  définies dans (12c) s'écrivent

$$g_{r_{2k-1}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) \cos(2k-1)\omega t \, dt = 0, \quad k = 1, \dots, N_\phi/2 \quad (14a)$$

$$g_{r_{2k}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{r}) = \int_0^T \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) \sin(2k-1)\omega t \, dt = 0, \quad k = 1, \dots, N_\phi/2. \quad (14b)$$

Equations (12a) and (12b) peuvent être résolues par substitution, en éliminant  $\mathbf{x}_1$  et en écrivant  $\mathbf{x}_2$  comme une relation affine de  $\mathbf{r}$ , ce qui donne un ensemble réduit de  $N_\phi$  équations non-lisses avec  $\mathbf{r}$  comme seule inconnue :

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}_2(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_2(\mathbf{r}) = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}(\mathbf{r} + \mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{f}_1) \quad (15)$$

Ce système d'équations non linéaires est résolu à l'aide de la commande `fsolve` dans MATLAB<sup>®</sup>, qui est basée sur une procédure de région de confiance de type "dogleg", avec une tolérance de  $10^{-6}$ . Les intégrales impliquant des termes non-lisses dans l'équation (14) sont calculées numériquement par un schéma de quadrature classique via la commande `integral` de MATLAB<sup>®</sup> et une tolérance de  $10^{-6}$ . La précision des solutions périodiques obtenues par la formulation des résidus pondérés dépend donc uniquement du choix des fonctions de base  $\phi_k$  et de leur nombre  $N_\phi$ .

## Jacobien par morceaux des termes non-linéaires

L'algorithme de résolution nécessite le calcul du jacobien des forces non-linéaires à chaque itération, grâce à une approximation numérique par différences finies. Cela peut conduire à des calculs intensifs et ralentir la convergence, surtout quand le nombre d'harmoniques est élevé. Pour réduire les temps de calcul, dans le cas du frottement le jacobien peut être écrit sous forme analytique linéaire par morceaux, qui correspondent aux différents états du système.

Le jacobien de la fonction non-lisse  $\mathbf{g}$  des composantes harmoniques de la force de frottement  $\mathbf{r}$  dans (15) est noté par  $\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{g}_r$ . A partir de (11c), ses éléments sont les suivants :

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{g}_r)_{ij} = \frac{\partial g_{ri}}{\partial r_j} = \int_0^T \phi_i(t) \frac{\partial}{\partial r_j} \Psi_r(\dot{x}_{2h}(t), r_h(t)) \, dt \quad i, j = 1, \dots, N_\phi \quad (16)$$

où  $\Psi_r$  est défini par (7c). La dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial r_j} = \frac{\partial \Psi_r}{\partial \dot{x}_2} \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial r_j} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_j} \quad (17)$$

dans laquelle les termes par morceaux s'écrivent

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial \dot{x}_2} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial r} = \begin{cases} \rho & \text{if } \rho(r(t) + \mu N) - \dot{x}_2(t) > 0 \text{ et } \rho(r(t) - \mu N) - \dot{x}_2(t) > 0 \\ 0 & \text{if } \rho(r(t) + \mu N) - \dot{x}_2(t) > 0 \text{ et } \rho(r(t) - \mu N) - \dot{x}_2(t) < 0 \\ \rho & \text{if } \rho(r(t) + \mu N) - \dot{x}_2(t) < 0 \text{ et } \rho(r(t) - \mu N) - \dot{x}_2(t) < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Enfin,  $\partial r / \partial r_j = \phi_j$  et  $\partial \dot{x}_2 / \partial r_j$  sont calculés à partir du développement de  $\dot{x}_2$  dans (9b), après y avoir substitué l'expression de  $\mathbf{x}_2(\mathbf{r})$  donnée par (15). Le jacobien (16) est donc calculé à l'aide d'un schéma de quadrature, dans lequel les conditions dépendant du temps dans (18) sont testées à chaque pas de temps  $t_i$  du schéma de quadrature. Le jacobien est alors fourni au solveur non-linéaire basé sur la méthode de région de confiance.

1. Les matrices  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\Omega^2$  sont fonctions de la fréquence de forçage  $\omega$ .

## 4 Résultats et analyse

On considère la réponse périodique du système de la Figure 3 pour les valeurs de paramètres  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $\mu = 0,9$ ,  $d_1 = d_2 = 0,02$ , et  $f_1(t) = 20\cos\omega t$  et  $f_2(t) = 0$ . Les Figures 4 and 5 montrent des réponses temporelles typiques. On y voit l'évolution sur une période du déplacement et de la vitesse des deux degrés de liberté et de la force de frottement. Cette dernière est également représentée en fonction de la vitesse de l'amortisseur de frottement, afin de vérifier que le modèle de Coulomb de la Figure 1 est bien pris en compte. Pour assurer la précision des solutions,  $N_\phi = 160$  harmoniques de Fourier sont pris en compte. Dans tous les cas considérés, l'algorithme non linéaire converge en quelques itérations.

La Figure 4 montre la réponse du système pour une fréquence de la force extérieure proche de la résonance principale du système. Le premier degré de liberté et celui du frotteur présentent tous deux

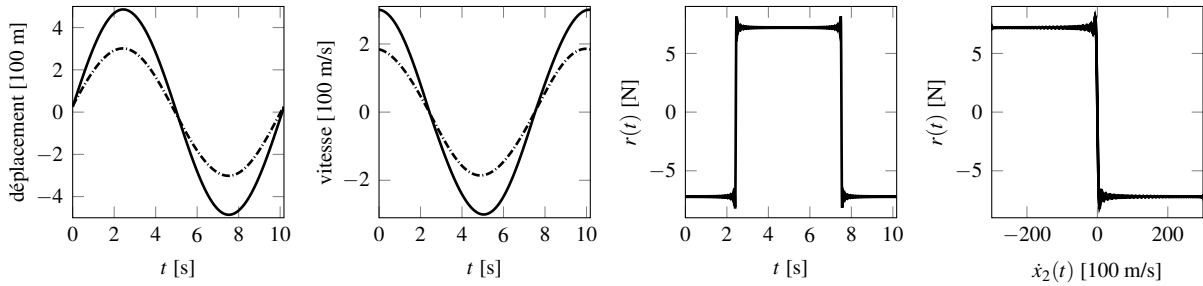


FIGURE 4 – Réponse pour une fréquence de forçage proche de la résonance principale linéaire avec  $N = 8$ ,  $\omega = 0,617$  et  $N_\phi = 160$ . Frotteur [—] et premier degré de liberté [---].

une oscillation de type mono-harmonique, de sorte que l'amortisseur subit une phase avant et une phase arrière de glissement de durées égales, sa vitesse s'annulant uniquement lorsque la masse change de direction. L'évolution temporelle de la force de frottement  $r(t)$  confirme la nature exclusivement glissante du mouvement, puisqu'elle reste pratiquement constante pendant chaque phase avant et arrière, subissant une discontinuité de  $r = -\mu N = -7,2$  à  $r = \mu N = 7,2$  lors de la transition du mouvement avant au mouvement arrière, et vice-versa. Dans ce cas de réponse de glissement proche d'une résonance, la forme rectangulaire de la force de frottement, y compris les discontinuités, est très bien représentée. De plus, le tracé de la force de frottement  $r$  en fonction de  $\dot{x}_2$  montre que la loi de frottement de Coulomb est reproduite avec précision. Dans les tracés de la force de frottement en fonction du temps et en fonction de  $\dot{x}_2$ , on notera de petites oscillations juste avant et après chaque saut entre les deux phases de glissement, ce qui est dû au phénomène classique de Gibbs aux points de discontinuité.

La Figure 5 montre une réponse plus riche, avec quatre phases de collage et quatre phases de glissement au sein d'une période, pour une fréquence proche d'une résonance sous-harmonique 1:2 et pour  $N = 10$ . On remarque la valeur constante de  $x_2$  et la valeur nulle de  $\dot{x}_2$  pendant les phases de collage, ainsi que la

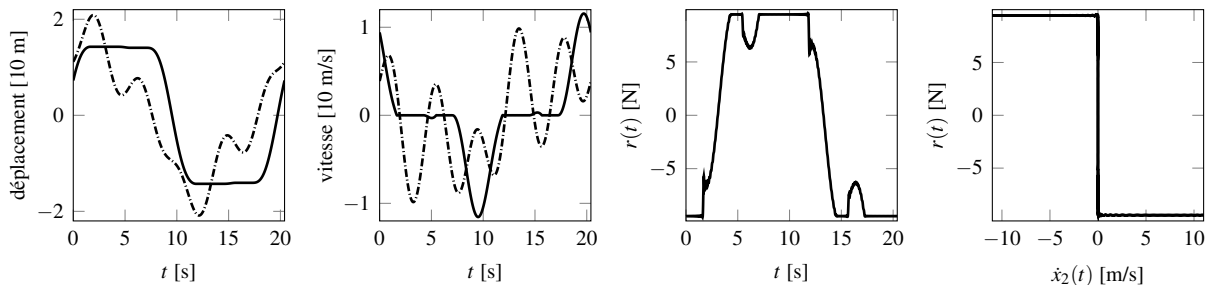


FIGURE 5 – Réponse pour une fréquence de forçage proche d'une résonance sous-harmonique 1:2 linéaire avec  $N = 10,5$ ,  $\omega = 0,308$  et  $N_\phi = 160$ . Frotteur [—] et premier degré de liberté [---].

valeur constante  $|r| = \mu N$  de la force de frottement pendant les phases de glissement. La courbe montrant  $r$  en fonction de  $t$  montre les variations abruptes de la force de frottement lors des transitions du glissement au collage.

Dans le but de valider la solution obtenue par la méthode de Ritz-Galerkin, on réalise une intégration

numérique dans le domaine temporel de (7) à l'aide d'un schéma d'intégration implicite d'Euler. Cette méthode est choisie car elle permet de traiter de façon efficace les transitions de phase des systèmes non réguliers. Le pas de temps considéré est très petit, soit  $h = 10^{-4}$ , avec environ  $2 \times 10^5$  pas de temps par période. La Figure 6 montre que la solution obtenue par la méthode fréquentielle et celle par la méthode

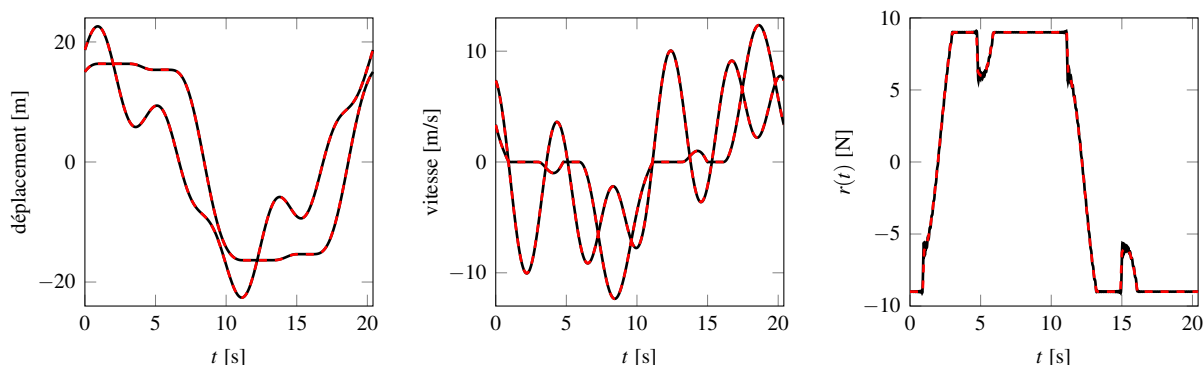


FIGURE 6 – Comparaison des solutions formulées dans les domaines temporels et fréquentiels. Méthode de Ritz-Galerkin avec  $N_\phi = 160$  [—] et méthode d'Euler implicite ( $h = 10^{-4}$ ) [- - -] pour  $N = 10$  et  $\omega = 0,308$ . A gauche : déplacements  $x_1$  et  $x_2$ . Milieu : vitesses  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$ . A droite : force de frottement  $r$ .

temporelle sont pratiquement identiques. Dans les courbes, on remarque que les oscillations dues aux harmoniques supérieures des déplacements et des vitesses sont bien prises en compte, de même que le fait que le frotteur ait un déplacement constant et une vitesse nulle pendant les phases de collage. Les discontinuités de la force de frottement lors des transitions entre le glissement et le collage sont également reproduites avec précision, ainsi que le fait que la force de frottement soit constante pendant les phases de glissement. Ces résultats démontrent la validité de la formulation du frottement basée sur l'égalité ainsi que la convergence de la méthode de résolution proposée.

## 5 Conclusions

On a présenté la résolution par résidus pondérés d'une formulation sous forme d'égalité pour les solutions périodiques de systèmes vibratoires avec frottement de Coulomb. La méthode est compacte et efficace, permettant d'intégrer aux équations du mouvement une condition non-régulière sous forme d'égalité qui peut alors être traitée numériquement de la même manière que celles-ci. La formulation n'a pas recours aux allers-retours entre les domaines fréquentiels et temporels requis par les méthodes actuelles à chaque itération de l'algorithme de résolution. Elle n'implique pas non plus de tests potentiellement compliqués sur l'état du système (glissant ou collant) et des corrections sous-jacentes. La méthode est générale pour les systèmes vibratoires avec frottement et pourrait, en théorie, être appliquée à toute loi non-régulière formulée sous forme d'égalité. Dans tous les cas considérés, la résolution ne souffre d'aucun problème de convergence et n'a pas besoin de faire appel à un lissage de la loi de frottement. Sa précision est uniquement dictée par le choix de la base de fonctions dans la procédure de Ritz-Galerkin et du nombre de ces fonctions.

## Références

- [1] A. A. Ferri. Friction damping and isolation systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117(B):196–206, 1995.
- [2] P. Flores, R. Leine, and C. Glocker. Modeling and analysis of rigid multibody systems with translational clearance joints based on the nonsmooth dynamics approach. In Krzysztof Arczewski, Wojciech Blajer, Janusz Fraczek, and Marek Wojtyra, editors, *Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications*, pages 107–130. Springer, 2011.
- [3] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems*. Springer, 2008.
- [4] J. P. Den Hartog. Forced vibrations with combined coulomb and viscous friction. *Journal of Fluids Engineering*, 53(2):107–115, 1931.

- [5] T. A. Laursen and J. C. Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation-frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(20):3451–3485, 1993.
- [6] M. Krack and J. Gross. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer International Publishing, 2019.
- [7] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, 1989.
- [8] O. Poudou and C. Pierre. Hybrid frequency-time domain methods for the analysis of complex structural systems with dry friction damping. In *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. AIAA, 2003.
- [9] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, and L. Jézéquel. A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1):201–219, 2003.
- [10] D. Laxalde, L. Salles, L. Blanc, and F. Thouverez. Non-linear modal analysis for bladed disks with friction contact interfaces. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air: Structures and Dynamics, Parts A and B*, volume 5, pages 457–467. ASME, 2008.
- [11] S. He, S. Cho, and R. Singh. Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 309(3-5):843–851, 2008.
- [12] M. Berthillier, C. Dupont, R. Mondal, and J.-J. Barrau. Blades forced response analysis with friction dampers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120(2):468–474, 1998.
- [13] M. Mitra and B. Epureanu. Dynamic modeling and projection-based reduction methods for bladed disks with nonlinear frictional and intermittent contact interfaces. *Applied Mechanics Reviews*, 71(5), 2019.
- [14] S. Quaegebeur, B. Chouvion, and F. Thouverez. Nonlinear dynamic analysis of three-dimensional bladed-disks with frictional contact interfaces based on cyclic reduction strategies. *International Journal of Solids and Structures*, 236-237:111277, 2022.
- [15] J.-J. Moreau. An introduction to unilateral dynamics. In *Novel Approaches in Civil Engineering*. Springer, 2004.
- [16] V. Acary, M. Brémond, and O. Huber. On solving contact problems with coulomb friction: formulations and numerical comparisons. In *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics*, pages 375–457. Springer, 2018.
- [17] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3):353–375, 1991.
- [18] L. Xuewen, A.K. Soh, and C. Wanji. A new non-smooth model for three dimensional frictional contact problems. *Computational Mechanics*, 26(6):528–535, 2000.
- [19] G. Stadler. Semismooth Newton and augmented Lagrangian methods for a simplified friction problem. *SIAM Journal on Optimization*, 15(1):39–62, 2004.
- [20] T. Lu and M. Legrand. Nonsmooth modal analysis via the boundary element method for one-dimensional bar systems. *Nonlinear Dynamics*, 107(1):227–246, 2021.
- [21] R. Leine and H. Nijmeijer. *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*, volume 18 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer, 2013.