

Simulation non-linéaire des instabilités par frottement dans un système de freinage aéronautique avec confrontation calcul-essai

X. Fagan^{1,2}, J.-J. Sinou¹, S. Besset¹, L. Jézéquel¹, A. Hamdi²

¹ LTDS, École Centrale de Lyon

xavier.fagan@ec-lyon.fr, jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr, sebastien.besset@ec-lyon.fr, louis.jezequel@ec-lyon.fr

² Safran Landing Systems

abdelbasset.hamdi@safrangroup.com

Abstract — Les freins aéronautiques sont caractérisés par des instabilités vibratoires de nature complexe, pouvant entraîner des problèmes de tenue mécanique. Un modèle réduit utilisant des méthodes de synthèse modale a été mis en place et permet de réaliser des analyses de stabilité et des simulations temporelles avec une ou plusieurs non-linéarités. Une méthode de confrontation aux essais est proposée pour juger la cohérence des simulations temporelles par rapport à des essais existants.

Mots clés — instabilités vibratoires, réduction de modèle, synthèse modale, comparaison calcul-essai.

1 Introduction

La plupart des systèmes de freinages sont sujets à une ou plusieurs instabilités vibratoires. Ces phénomènes sont en général parasites et ne sont pas souhaitables au cours du freinage. C'est pour cette raison qu'une grande quantité d'études ont été menées pour en comprendre l'origine et pour identifier des solutions permettant de les éliminer ou de les atténuer.

Plusieurs types de modèles peuvent être utilisés pour étudier les instabilités par frottement. Les modèles minimaux sont efficaces pour expliquer les mécanismes à l'origine de l'instabilité. Quelques degrés de liberté suffisent pour obtenir des modes instables [11]. La simplicité de ces modèles donne la possibilité de réaliser des études approfondies, par exemple avec des approches énergétiques [4]. Ces modèles de taille très réduite peuvent aussi refléter le comportement d'un système industriel et améliorent sa compréhension [6]. Des dispositifs expérimentaux sont aussi envisageables : des bancs de test sont conçus pour mettre en évidence des phénomènes spécifiques ou pour contrôler les paramètres qui caractérisent l'apparition de l'instabilité [1],[17],[3]. Ils offrent des moyens de contrôle et de mesure supérieurs aux systèmes de freinage industriels. On peut aussi utiliser des modèles industriels : ils sont généralement proches du système réel, mais leur complexité et leur taille sont un défi pour approfondir les études. C'est dans ce contexte que les méthodes de réduction de modèle deviennent intéressantes, car le nombre de degrés de liberté peut être réduit de quelques ordres de grandeur, tout en conservant une précision satisfaisante concernant les instabilités à étudier. Elles sont adaptées aux problèmes fortement non-linéaires, par exemple les contact frottants [9] ou la dynamique des chocs [10]. En général une première réduction des modes internes (par exemple Craig-Bampton ou Craig-McNeal) est effectuée. Concernant la réduction des modes d'interface, parmi les méthodes existantes nous pouvons citer l'hyper-réduction [14],[15] ou la double synthèse modale [2]. Cette dernière a un coût de calcul faible et donne des résultats intéressants avec un faible nombre de modes [7].

Concernant la caractérisation des instabilités par frottement, deux approches complémentaires existent. La première consiste à linéariser le système autour d'un point d'équilibre glissant, puis à en extraire les modes propres et les valeurs propres. On parle de Complex Eigenvalue Analysis (ou CEA). La partie réelle des valeurs propres permet de prédire la stabilité du mode associé. C'est une méthode rapide, donc elle peut être associée à des méthodes d'optimisation de la structure du frein [20]. Cependant, il a été constaté que cette méthode parfois ne traduit pas le comportement observé en essai, avec des modes instables qui ont été prédits comme étant stables par la CEA [18]. En effet, la CEA est une méthode locale décrivant le déclenchement de l'instabilité. D'autres indices ont été proposés pour déterminer le degré d'instabilité des modes afin d'améliorer les prédictions de la CEA [5]. La seconde méthode con-

siste à effectuer des simulations temporelles non-linéaires. Cette méthode permet d'obtenir des données temporelles pouvant être directement comparées aux essais, cependant elle s'accompagne de temps de calcul élevés. En effet, il s'agit de résoudre un système non-linéaire à chaque pas de temps. Ces deux approches peuvent donner des résultats contradictoires entre elles, cela même sur des systèmes analytiques à faible nombre de degrés de liberté [12]. Il est donc intéressant d'utiliser ces deux outils à bon escient pour pallier aux défauts de chaque méthode prise séparément, notamment dans le cas non-linéaire [16].

Lorsque des essais sont disponibles, il est intéressant de réaliser des simulations temporelles pouvant directement être comparées à ces données. Cela peut se faire à travers les Operational Deflection Shapes (ou ODS). Une ODS est définie comme étant la déformation d'une structure à un instant donné et/ou à une fréquence donnée [8]. Elle peut donc être de nature temporelle ou fréquentielle. Il s'agit d'un outil fondamental pour quantifier la corrélation calcul/essai : elle permet de relier les grandeurs temporelles mesurées en essais aux simulations modales (par exemple avec la CEA) ou aux simulations temporelles.

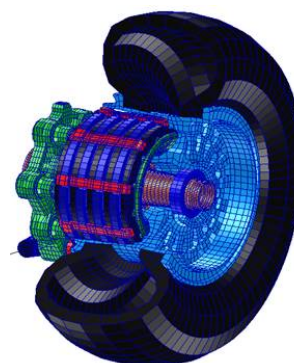
Le présent travail propose de modéliser un frein aéronautique pour étudier des problématiques d'instabilité par frottement. Pour cela, la mise en place d'un modèle réduit est présentée. Ensuite, des non-linéarités sont introduites de manière analytique. Pour terminer, une approche simple de comparaison calcul-essai est décrite. L'objectif est de pouvoir quantifier la similarité entre ces deux jeux de données, afin de statuer sur la représentativité de la simulation temporelle. Cela permettra d'identifier les non-linéarités qui jouent un rôle important dans le système expérimental.

2 Présentation du cas d'étude

2.1 Frein aéronautique



(a) Frein monté sur avion.



(b) Modèle éléments finis.

Figure 1: Frein aéronautique.

Des images d'un frein proche de celui étudié sont données sur la figure 1. Il s'agit d'un empilement de disques, avec une alternance rotors-stators. Les rotors sont solidaires du pneu, les stators sont solidaires du train d'atterrissage. L'ensemble des disques est appelé "puits de chaleur". Lors du freinage, des pistons placés au bout du puits de chaleurs appliquent un effort sur le premier disque, ce qui force le contact entre les disques. Cela permet de convertir l'énergie cinétique de l'avion en énergie thermique par friction, ce qui ralentit l'appareil.

2.2 Modélisation du frein

La figure 2 indique l'ensemble des modèles utilisés et le type de sorties que l'on peut calculer. A partir de la géométrie du frein, un modèle éléments finis linéaire est établi sur Ansys Workbench. Ensuite, des étapes de réduction de modèle permettent d'extraire les matrices de masse et de raideur. Une fois le modèle linéaire validé, il est possible d'incorporer des non-linéarités. Le modèle réduit est ensuite utilisé pour réaliser des études de stabilité et des intégrations temporelles.

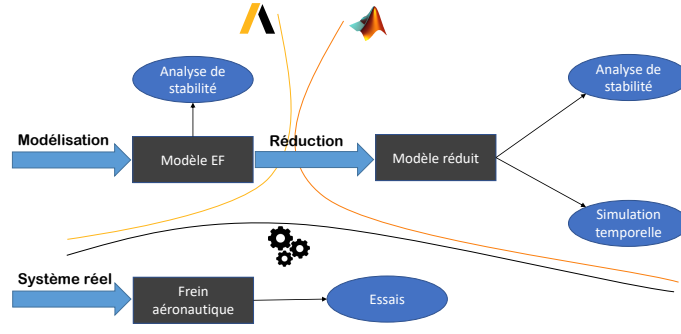


Figure 2: Schéma représentant les modèles et les observables disponibles.

2.2.1 Réduction de modèle

L'objectif de la modélisation est de pouvoir effectuer des simulations temporelles non-linéaires, il est donc fondamental de minimiser la taille du modèle pour limiter les temps de calcul. Pour cela, des étapes de réduction sont mises en place à partir du modèle éléments finis du frein. La méthode de Craig-Bampton est appliquée au modèle. Afin de valider cette première réduction, le modèle réduit est comparé au modèle éléments finis à travers une analyse de stabilité. Les résultats sont donnés dans la figure 5a.

Concernant les disques, une étape de synthèse modale permet de décrire leur comportement dans la gamme de fréquence d'étude à travers un nombre réduit de Degrés De Liberté (DDL). Pour appliquer la synthèse modale, les DDL du modèle réduit sont séparés en : DDL physiques u_0 , DDL issus de la réduction de Craig-Bampton u_q et DDL d'interface u_i . Les interfaces sont définies par les surfaces de contact entre les disques. Les DDL réduits seront notés v . L'équation du mouvement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{0q} & \mathbf{M}_{0i} \\ \mathbf{M}_{q0} & \mathbf{M}_{qq} & \mathbf{M}_{qi} \\ \mathbf{M}_{i0} & \mathbf{M}_{iq} & \mathbf{M}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{u}_q \\ \ddot{u}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{0}_{0q} & \mathbf{K}_{0i} \\ \mathbf{0}_{q0} & \mathbf{K}_{qq} & \mathbf{0}_{qi} \\ \mathbf{K}_{i0} & \mathbf{0}_{iq} & \mathbf{K}_{ii}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_q \\ u_i \end{pmatrix} = 0$$

Les matrices nulles par bloc dans la matrice de raideur sont dues à la réduction de Craig-Bampton. Les termes de frottement sont contenus dans $\mathbf{K}_{ii}(\mu)$, cette dernière n'est donc pas symétrique si $\mu \neq 0$. De manière analogue à la réduction de Craig-Bampton, la synthèse modale comporte deux étapes. La première est la troncature des modes d'interfaces. Les modes d'interface sont données par :

$$\begin{cases} (\mathbf{K}_{ii}(\mu) - \omega^2 \mathbf{M}_{ii}) \phi_D = 0 \\ \phi_G (\mathbf{K}_{ii}(\mu) - \omega^2 \mathbf{M}_{ii}) = 0 \end{cases}$$

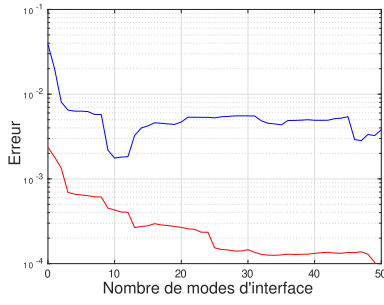
Dans la phase de synthèse modale, il est possible de choisir un coefficient de frottement différent de celui présent dans le modèle. Ici le choix $\mu = 0$ est fait, donc la matrice $\mathbf{K}_{ii}(\mu)$ est symétrique et $\phi_D = \phi_G = \phi$. La matrice des modes propres ϕ est ensuite tronquée : seul un nombre n de modes sera conservé dans une nouvelle matrice notée ϕ_n . La deuxième étape est un relèvement statique. Pour cela on écrit la dernière ligne de l'équation de mouvement pour $\omega = 0$: $u_i = -(\mathbf{K}_{ii}(\mu))^{-1} \mathbf{K}_{i0} u_0$. Ces deux étapes sont ensuite combinées pour obtenir une relation entre u_i et v :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_q \\ u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -(\mathbf{K}_{ii}(\mu))^{-1} \mathbf{K}_{i0} & 0 & \phi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_q \\ v \end{pmatrix} \quad (1)$$

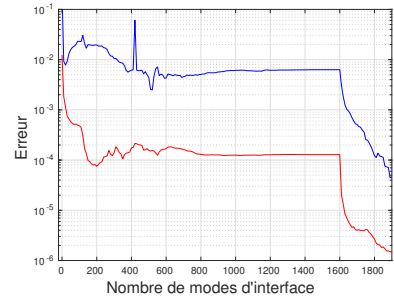
La matrice de passage exprimée dans l'équation (1) permet de passer de la base de départ à la base réduite. La figure 3 montre l'efficacité de cette méthode : les 40 premiers modes du frein sont représentés correctement en choisissant seulement quelques modes d'interface. Dans le cas des disques déformables, la réduction est extrêmement efficace dans l'optique de réaliser des simulations temporelles.

2.2.2 Description des non-linéarités de contact

Dans le cas linéaire, le contact entre les disques est défini ainsi : les disques sont rigides et représentés par un point placé au centre de chaque disque. Les déplacements relatifs entre deux disques en contact



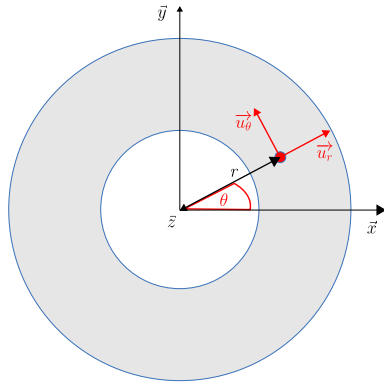
(a) Avec disques rigides. $n_{max} = 54$.



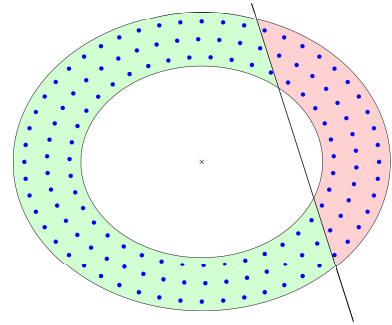
(b) Avec disques déformables. $n_{max} = 1920$.

Figure 3: Erreur sur les 40 premiers modes en fonction de n , pour une synthèse modale réelle. La fréquence est indiquée en rouge et la partie réelle en bleu.

sont notés D , les rotations R .



(a) Modélisation intégrale.



(b) Modélisation discrète avec un décollement partiel (en rouge).

Figure 4: Modélisation du contact.

La distance axiale entre deux points en vis-à-vis sur deux disques en contact est donnée par : $d(r, \theta) = D_z + r \sin \theta R_x - r \cos \theta R_y$. En introduisant la raideur surfacique K , l'effort normal et l'effort tangentiel par unité de surface sont obtenus respectivement par $N(r, \theta) = Kd(r, \theta)$ et $T(r, \theta) = \mu N(r, \theta)$. Il est possible de calculer les forces et les moments dans les trois directions par intégration sur toute la surface de contact (figure 4a). Dans la suite seul l'effort axial sera présenté, mais la même démarche s'applique aux efforts et aux couples dans les trois directions. L'effort axial s'écrit :

$$F_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R_i}^{R_e} Kd(r, \theta) r dr d\theta \quad (2)$$

Les deux non-linéarités présentées sont relatives au contact entre les disques. La première, notée NL1, provient d'essais de compression du puits de chaleur. Les essais ont montré une bonne correspondance avec une loi polynomiale d'ordre 3, donc une raideur cubique est considérée pour la modélisation. Pour cela, on remplace l'expression (2) par :

$$F_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R_i}^{R_e} (K_1 d(r, \theta) + K_2 d^2(r, \theta) + K_3 d^3(r, \theta)) r dr d\theta$$

La deuxième, notée NL2, concerne le décollement entre les disques. En effet, avec la modélisation du contact par pénalisation l'effort n'est jamais nul, même lorsque la distance entre les disques est positive. Pour tenir compte du décollement on utilise plutôt une description discrète de la surface de contact à travers N ressorts. Un exemple est donné dans la figure 4b. Pour chaque point du maillage, l'effort correspondant sera non nul seulement si la distance entre le point et son vis-à-vis est négative.

$$F_z = \sum_{i=1}^N \delta_i K d(r_i, \theta_i) \quad \text{Avec :} \quad \forall i \in [1; N], \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } d(r_i, \theta_i) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.2.3 Analyse de stabilité

L'analyse de stabilité consiste à linéariser le système autour d'un point d'équilibre glissant, puis de calculer les modes propres et valeurs propres associées. A partir de l'équation du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{x} + \mathbf{C}\dot{x} + \mathbf{K}x = F(x) \quad (3)$$

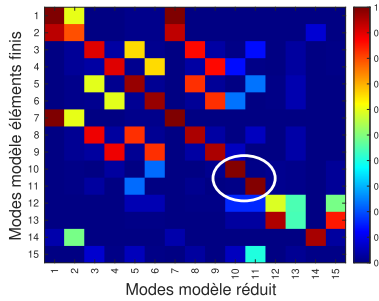
On calcule le point x_{eq} satisfaisant la condition d'équilibre :

$$\mathbf{K}x_{eq} - F(x_{eq}) = 0$$

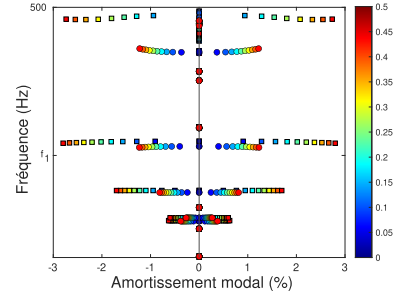
En considérant une perturbation autour du point d'équilibre $\bar{x} = x_{eq} + \varepsilon$, on obtient :

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{x}} + \mathbf{C}\dot{\bar{x}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J})\bar{x} = 0$$

\mathbf{J} est la jacobienne de F calculée en $x = x_{eq}$. Le calcul des vecteurs propres et des valeurs propres du système précédent permet ensuite de connaître les modes de la structure autour du point d'équilibre glissant identifié. L'analyse de stabilité est utilisée ici afin de valider le modèle réduit par comparaison au modèle éléments finis, ou encore pour vérifier la validité de certaines hypothèses. Un exemple en est l'influence de la déformation des disques sur les modes instable, ce que l'on observe sur la figure 5b.



(a) MAC pour validation du modèle réduit.



(b) Diagramme de stabilité. Les carrés représentent les disques rigides, les cercles les disques déformables, la couleur le coefficient de frottement.

Figure 5: Exemples d'utilisation de l'analyse de stabilité.

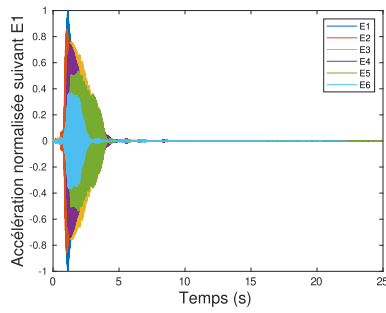
2.2.4 Simulation temporelle

Le but de la simulation temporelle est d'intégrer l'équation (3) entre un instant initial et un instant final. Une discrétisation temporelle est effectuée afin de trouver une solution. A partir du point d'équilibre perturbé \bar{x} , la résolution se fait de manière incrémentale en évaluant l'équation (3) pour $t_n = t_0 + nh$. Le schéma d'intégration choisi détermine la relation de récurrence entre l'état n et l'état $n + 1$.

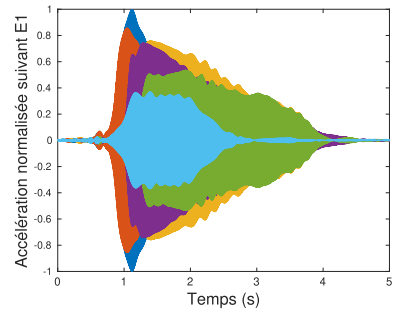
2.3 Données temporelles

Pour un frein donné, une ou plusieurs campagnes de freinage sont disponibles. Celles-ci contiennent une grande quantité de freinages réalisés dans différentes conditions. Parmi les capteurs installés, nous avons quelques accéléromètres dont le placement est jugé adéquat pour décrire l'instabilité vibratoire. Dans la figure 6 sont présentées les données d'un accéléromètre pour les 6 essais ayant enregistré les vibrations les plus élevées. Ces essais sont numérotés E1 à E6. On observe une certaine variabilité parmi ces derniers, notamment en ce qui concerne l'amplitude des vibrations ou la durée de l'instabilité. La dispersion sur la fréquence est beaucoup plus faible, la valeur moyenne est notée f_1 .

En ce qui concerne la simulation, deux résultats sont obtenus en considérant les deux non-linéarités décrites précédemment. On peut les observer dans la figure 7. Les spectrogrammes sont également indiqués, avec la fondamentale et les harmoniques 2 et 3. Le paramétrage du modèle réduit est constant, donc la dynamique est différente de celle observée en essai : en simulation, l'instabilité apparaît, fait saturer les niveaux puis se maintient à un régime permanent, alors qu'en essai l'instabilité n'est présente que de manière transitoire, aux instants où les vibrations sont les plus fortes.

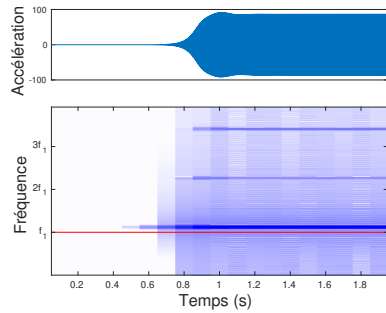


(a) Freinages complets.

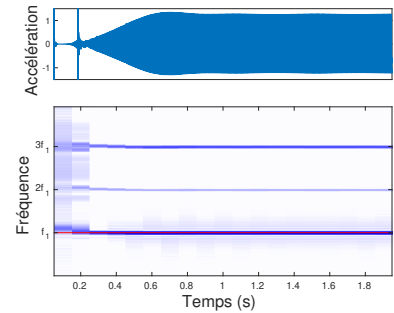


(b) Zoom sur les instants à forte vibration.

Figure 6: Quelques freinages issus d'une campagne de test Safran Landing Systems.



(a) NL1.



(b) NL2.

Figure 7: Simulations temporelles et spectrogrammes pour le DDL 1.

Pour commencer, la présence de l'instabilité est vérifiée par la fréquence caractéristique des courbes issues de la simulation. De plus, l'amplitude des vibrations est utilisée pour vérifier si les niveaux simulés sont réalistes. A partir de la figure 7, on constate que NL2 est plus proche des essais en ce qui concerne l'amplitude des accélérations et la fréquence propre de l'instabilité. L'objectif dans la suite est d'observer quelle instabilité simulée est la plus proche de celle mesurée en essai.

3 Comparaison entre calcul et essai

3.1 Principe

Le principe de la comparaison est ici de qualifier simplement et rapidement les écarts entre une quantité issue de simulation et une quantité issue d'essai. Ici il s'agit des simulations temporelles et des signaux mesurés par les accéléromètres. Les deux types de grandeur sont de même nature. Puisque la CEA est également accessible avec le modèle réduit, deux processus sont présentés : la projection sur base modale et la comparaison à proprement parler.

3.2 Projection sur les modes complexes

Cette première étape consiste à projeter une donnée temporelle sur une base modale. Cela peut par exemple s'appliquer à une simulation non-linéaire, pour observer si des modes stables participent à la forme de l'instabilité. Pour réaliser cela, il est nécessaire d'extraire l'ODS à partir des essais. La méthode retenue est la suivante : on calcule la FFT du signal temporel par intervalles, puis on extrait le terme correspondant à la fréquence d'instabilité. Une fois cela fait pour toutes les composantes, on obtient l'ODS de la simulation temporelle pour la fréquence f_0 . Pour finir, un MAC (Modal Assurance Criterion) entre la FFT et la base modale est réalisé. La figure 8a résume le principe d'extraction de l'ODS. Pour s'assurer de la bonne mise en place de la méthode, celle-ci est appliquée à une simulation non-linéaire. Pour cela on s'inspire de la méthode présentée dans [13]. La grandeur temporelle est projetée sur la base des modes propres calculée par CEA. La figure 8b montre le résultat de la projection sur le mode instable. Quatre phases sont identifiées : perturbation de l'équilibre, amplification de l'instabilité en

régime linéaire, saturation due à la non-linéarité, atteinte d'un régime permanent. C'est cette dernière phase qui sera utilisée pour la comparaison aux essais. On remarque que la projection donne un résultat inférieur à 1 en régime permanent.

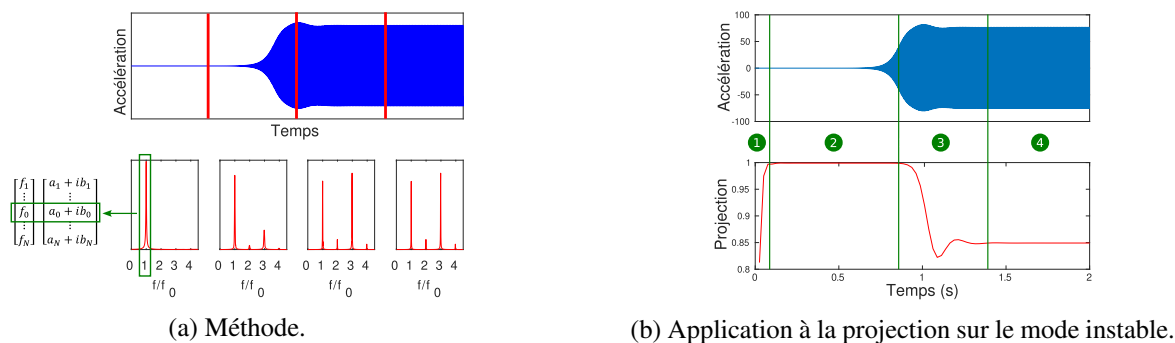


Figure 8: Extraction de l'ODS.

3.3 Corrélation entre simulations et essais

La méthode d'extraction des ODS décrite précédemment est appliquée aux simulations temporelles et aux essais. Le MAC entre les deux est ensuite calculé. Pour un essai et une simulation donnés, le résultat de la figure 9a est obtenu. La zone où la vibration est maximale en essai correspond à la zone où le MAC calcul-essai est maximal. Sur l'exemple 9b, la corrélation est tracée pour la simulation linéaire, pour NL1 et pour NL2. Seul le dernier segment de chaque simulation est utilisé, car il correspond au régime permanent. La zone où l'instabilité est présente en essai correspond à des variations limitées sur les courbes de corrélation. NL1 donne une corrélation largement meilleure que NL2, et ce pour tous les essais utilisés dans l'étude. En comparant la simulation linéaire et NL1, on constate que NL1 a une meilleure corrélation en début d'instabilité, alors que la simulation linéaire est meilleure en fin d'instabilité.

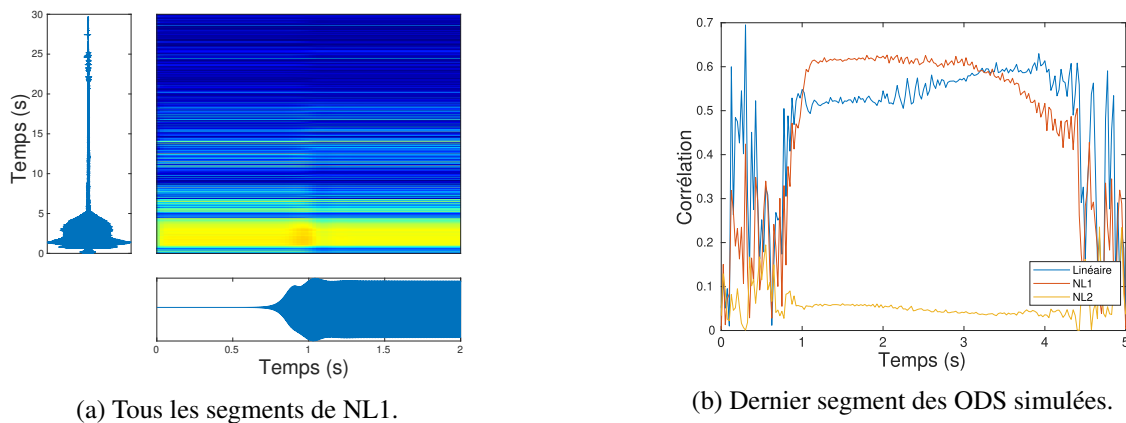


Figure 9: Comparaison entre calculs et essais pour le freinage E4.

4 Conclusion

Le modèle réduit de frein aéronautique et la méthode pour l'obtenir ont été présentés. Ce modèle a été utilisé pour réaliser des analyses de stabilité et des simulations temporelles. Deux non-linéarités de contact ont été introduites afin de montrer une méthode simple de confrontation aux essais. A l'issue de l'étude, un observable tenant compte de la similarité de forme entre les données temporelles simulées et provenant d'essai est proposé. Son utilisation permettra de qualifier l'apport de chaque non-linéarité présente dans le frein aéronautique, afin d'aller vers des simulations plus proches du phénomène réel. Dans la suite, des simulations non-linéaires avec des combinaisons de non-linéarités seront testées pour

mettre en évidence les effets croisés. En effet, on sait que plusieurs effets non-linéaires se manifestent lors du freinage, certains pouvant influencer la forme de la déformée. De plus, chaque essai a été réalisé à des conditions différentes (consigne en pression / décélération, évolution de $\mu(t)$), il faudra donc en tenir compte lors des comparaisons.

Références

- [1] A. Akay, O. Giannini, F. Massi, A. Sestieri. *Disc brake squeal characterization through simplified test rigs*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 23, Issue 8, Pages 2590-2607, 2009.
- [2] S. Besset and J-J. Sinou. *Modal reduction of brake squeal systems using complex interface modes*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 85, Pages 896–911, 2017.
- [3] D. Bigoni, O. N. Kirillov, D. Misseroni, G. Noselli, M. Tommasini. *Flutter and divergence instability in the Pflüger column: Experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 116, Pages 99-116, 2018.
- [4] C. Bloch, M. Treimer, G. Müller. *Linear and nonlinear energy analysis of a minimal model for brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, Volume 508, 2021.
- [5] J. Brunetti, F. Massi, W. D’Ambrogio, Y. Berthier. *A new instability index for unstable mode selection in squeal prediction by complex eigenvalue analysis*, Journal of Sound and Vibration, Volume 377, Pages 106-122, 2016.
- [6] F. Chevillot, J-J. Sinou, N. Hardouin. *Nonlinear transient vibrations and coexistences of multi instabilities caused by friction in an aircraft braking system*, Journal of Sound and Vibration, American Society of Mechanical Engineers, Volume 328(4-5), Pages 555-574, 2009.
- [7] G. Corradi, J.-J. Sinou, S. Besset. *Performances of the double modal synthesis for the prediction of the transient self-sustained vibration and squeal noise*, Applied Acoustics, Volume 175, 2021.
- [8] O. Dossing. *Structural stroboscopy-measurement of operational deflection shapes*, Sound and Vibration Magazine, 1, Pages 18-24, 1988.
- [9] O. Fazio, S. Nacivet, J.-J. Sinou. *Reduction strategy for a brake system with local frictional non-linearities – Application for the prediction of unstable vibration modes*, Applied Acoustics, Pages 12-24, 2015.
- [10] J. Fehr, P. Holzwarth, P. Eberhard. *Interface and model reduction for efficient explicit simulations - a case study with nonlinear vehicle crash models*, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 22:4, Pages 380-396, 2016.
- [11] J. Hultén. *Brake Squeal - A Self-Exciting Mechanism with Constant Friction*, SAE Technical Paper 932965, 1993.
- [12] N. Liu, H. Ouyang. *Friction-induced vibration considering multiple types of nonlinearities*, Nonlinear Dynamics, 102, Pages 2057–2075, 2020.
- [13] A. Loyer. *Etude numérique et expérimentale du crissement des systèmes de freinage ferroviaires*, PhD thesis, Ecole Centrale Lyon, Français.
- [14] R. Penas Ferreira. *Modèles d’articulations dissipatives en dynamique multi-corps*, PhD thesis, HESAM Université, 2021.
- [15] D. Scheffold, C. Bach, F. Duddeck, G. Müller, M. Buchschmid. *Vibration Frequency Optimization of Jointed Structures with Contact Nonlinearities using Hyper-Reduction*, IFAC-PapersOnLine, Volume 51, Issue 2, Pages 843-848, 2018.
- [16] J-J. Sinou. *Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal – On the need to consider both stability and non-linear analysis*, Mechanics Research Communications, 37, Pages 96–105, 2010.
- [17] J-J. Sinou, D. Lenoir, S. Besset, F. Gillot. *Squeal analysis based on the laboratory experimental bench “Friction-Induced Vibration and noise at École Centrale de Lyon” (FIVE@ECL)*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 119, Pages 561-588, 2019.
- [18] G. Spelsberg-Korspeter, P. Hagedorn. *Complex Eigenvalue Analysis and Brake Squeal: Traps, Shortcomings and their Removal*, SAE International Journal of Passenger Cars-Mechanical Systems 5(4), 2012.
- [19] G. Vermot des Roches. *Frequency and time simulation of squeal instabilities. application to the design of industrial automotive brakes*, PhD Thesis, Ecole Centrale Paris, 2011.
- [20] A. Wagner, G. Spelsberg-Korspeter, P. Hagedorn. *Structural optimization of an asymmetric automotive brake disc with cooling channels to avoid squeal*, Journal of Sound and Vibration, Volume 333, Issue 7, Pages 1888-1898, 2014.