

Modélisation du comportement dynamique amortissant d'aubes fan munies de patchs viscoélastiques

M. Couet^{1,2,3}, J.-F. Deü¹, L. Rouleau¹, F. Thouverez², C. Esteves³

¹ LMSSC, CNAM Paris

² LTDS, Ecole Centrale de Lyon

³ Safran Aircraft Engines

Résumé — Parmi les technologies de contrôle vibratoire passif de structures, le patch d'élastomère contraint ou Constrained Layer Damping (CLD) est une technologie dont la robustesse, l'efficacité et l'encombrement réduit ont été démontrés expérimentalement et numériquement. Une méthode de calcul de la réponse dynamique d'un aubage de soufflante de turbomoteur équipée de cette technologie est présentée. Cette méthode est composée d'un calcul statique non-linéaire géométrique sous chargement centrifuge utilisant une loi hyperélastique pour rendre compte du comportement non-linéaire de l'élastomère composant le patch. Un calcul de réponse harmonique linéaire est ensuite réalisé autour de l'état d'équilibre statique en prenant en compte la dépendance fréquentielle des propriétés de l'élastomère. Ce modèle est finalement confronté à des résultats expérimentaux et l'influence du patch sur la dynamique de la structure est mise en évidence.

Mots clés — Aubage fan, Turbomachines, Viscoélasticité, Hyperélasticité, Réduction de modèle.

1 Introduction

Les aubes de soufflante des turbomoteurs sont exposées à des chargement dynamiques importants lors de leur fonctionnement. Ces charges peuvent induire des phénomènes aéroélastiques tels que le flottement ou les vibrations forcées qui peuvent entraîner des dommages dûs à la fatigue et ainsi menacer l'intégrité du moteur. Pour réduire les contraintes de fatigue subies par ces structures, il peut être avantageux d'ajouter une source d'amortissement à l'aube par des traitements actifs [1] ou passifs [2]. Parmi les technologies d'amortissement passif, les patchs d'élastomère contraints se sont avérés être un traitement amortissant efficace, s'appuyant sur les capacités de dissipation d'énergie de ces matériaux viscoélastiques lorsqu'ils sont soumis à des contraintes importantes de cisaillement. Dans la pratique, l'amortissement par couche contrainte (CLD) consiste à ajouter une fine couche d'élastomère sur une partie de la surface de la structure, recouverte d'une fine couche rigide souvent constituée de polymère renforcé de fibres de carbone. Les niveaux de déformations en cisaillement dans la couche d'élastomère sont alors supérieurs aux niveaux dans un patch sans couche de contrainte, ce qui permet d'obtenir un amortissement ajouté significatif pour une masse ajoutée à la structure réduite.

Cependant, l'efficacité de ce type de solution est fortement dépendante de nombreux facteurs tels que la fréquence d'excitation, la température de fonctionnement ou la précontrainte centrifuge. De plus, des comportements non-linéaires dûs aux grands déplacements et au comportement de l'élastomère sont observés sur ce type de structure. Ainsi, une modélisation dynamique adaptée est nécessaire pour prédire l'impact de l'ajout d'un patch d'élastomère sur la dynamique de l'aubage et optimiser les caractéristiques du dispositif dès la conception de l'aubage.

Un modèle par éléments finis est proposé ici pour calculer la réponse dynamique amortie d'un aubage en rotation. Ce modèle est basé sur un calcul de réponse harmonique linéaire autour d'un état précontraint par le chargement centrifuge. Cette précontrainte, associée à une vitesse de rotation constante, est obtenue en résolvant un problème statique non linéaire tenant compte des grands déplacements de la structure et de la non-linéarité matériau de la couche d'élastomère à travers une loi de comportement hyperélastique. De plus, une loi viscoélastique fractionnaire est utilisée pour tenir compte des propriétés matériau qui dépendent de la fréquence et une approche de réduction basée sur la projection multi-modèle est mise en œuvre pour réduire les coûts de calcul. Enfin, une stratégie de maillage est développée pour ajouter

plusieurs couches d'éléments sur la surface de l'aube. Ce modèle est ensuite appliqué à une structure industrielle afin de mettre en évidence l'influence du patch d'élastomère sur la dynamique de la structure, et les résultats numériques sont confrontés à des résultats expérimentaux.

2 Modélisation numérique

On considère ici une modélisation éléments finis d'une structure en rotation à vitesse constante autour d'un axe de rotation fixe. L'équilibre statique de la structure sous son chargement centrifuge est obtenu en résolvant le problème statique non-linéaire de l'équation (1) par la méthode de Newton-Raphson [3].

$$(\mathbf{K} - \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_g(\mathbf{U}_0)) \mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_\Omega, \quad (1)$$

où n est le nombre de degrés de liberté, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ désigne la matrice de raideur, $\mathbf{K}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice d'assouplissement centrifuge, $\mathbf{K}_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de rigidification centrifuge due à la prise en compte des grands déplacements, $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ le vecteur des degrés de libertés statiques et $\mathbf{F}_\Omega \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ le vecteur des efforts centrifuges.

Le comportement dynamique linéaire de la structure autour de l'équilibre statique sous chargement centrifuge est ensuite considéré. Le déplacement discrétisé de la structure \mathbf{U} est alors décomposé comme la somme du déplacement statique \mathbf{U}_0 et d'un déplacement dynamique \mathbf{U}_p tel que $\|\mathbf{U}_p\| \ll \|\mathbf{U}_0\|$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_p. \quad (2)$$

Un amortissement hystérétique est introduit tel que :

$$\mathbf{K}^* = (1 + i\eta)\mathbf{K}, \quad (3)$$

avec \mathbf{K}^* la matrice de rigidité complexe et η le coefficient d'amortissement hystérétique global de la structure recalé par rapport à des données d'essai. Alors, la réponse de la structure soumise à un chargement harmonique $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} e^{i\omega t}$ peut être obtenue dans le domaine fréquentiel en résolvant l'équation suivante :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_{\text{tot}}^*) \mathbf{q} = \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (4)$$

où $\mathbf{K}_{\text{tot}}^* = \mathbf{K}^* - \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_g(\mathbf{U}_0)$. A la suite de conclusions tirées de calculs préliminaires sur des structures similaires, l'effet gyroscopique est négligé dans ce problème.

2.1 Réponse statique avec non-linéarité matériau

Dans le cas d'une structure équipée d'un patch amortissant, la couche d'élastomère est soumise à des déformations en cisaillement de l'ordre de plusieurs dizaines de pourcents. Une loi de comportement linéaire n'est alors pas adaptée pour modéliser la réponse statique de l'élastomère à ces niveaux de déformation [4]. De nombreuses lois constitutives hyperélastiques ont été proposées pour modéliser ce type de comportement, telles que le modèle néo-Hookeen, le modèle de Mooney-Rivlin ou encore le modèle d'Arruda-Boyce [7]. Pour chacun de ces modèles (cf. Table 1), un potentiel d'énergie de déformation W est défini à partir des invariants I_1, I_2, I_3 du tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)), I_3 = \det(\mathbf{C}). \quad (5)$$

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} est alors obtenu en différenciant le potentiel W par rapport au tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}. \quad (6)$$

De plus, l'hypothèse d'un comportement quasi-incompressible est considérée ici. Pour cela, les expressions des potentiels présentées dans la Table 1 sont enrichies d'un terme modélisant ce comportement

TABLE 1 – Expressions des potentiels des modèles hyperélastiques utilisés

	Linéaire	Néo-hookéen	Mooney-Rivlin	Arruda-Boyce
W	$\frac{\lambda}{2}(\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu * \text{tr}(\mathbf{E}^2)$	$G(I_1 - 3)$	$A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3)$	$\mu \sum_{i=1}^5 \frac{c_i}{\lambda^{2i-2}(I_1^i - 3^i)}$
R^2	0.95033	0.988	0.991	0.988

quasi-incompressible $W_2 = \frac{K}{2}(I_3 - 1)^2$ avec K le module de compressibilité pouvant être mesuré expérimentalement. Cette représentation a été introduite par Kaliske et Rothert [5] et permet d'obtenir une bonne représentativité du comportement quasi-incompressible de la plupart des élastomères.

Les trois modèles présentés ont l'avantage de fournir une bonne représentativité du comportement statique d'un élastomère chargé jusqu'à plusieurs dizaines de pourcents de déformation avec un nombre restreint de paramètres. Ces paramètres peuvent ainsi être identifiés facilement à partir de données d'essais. L'identification de ces paramètres est présentée en Figure 1 pour un élastomère typique de ce type d'application. Les données d'essais sont issues d'essais de relaxation par palier pour lesquels le comportement en fin de palier est considéré comme stable.

Pour chaque modèle, on définit le coefficient de détermination R^2 comme

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i^k (\sigma_{\text{exp}_i} - \sigma_{\text{num}_i})^2}{\sum_i^k (\sigma_{\text{exp}_i} - \sigma_{\text{moy}})^2}, \quad (7)$$

avec k le nombre de points expérimentaux, σ_{exp_i} la contrainte nominale normalisée expérimentale i , σ_{num_i} la contrainte nominale normalisée numérique obtenue avec la loi hyperélastique et σ_{moy} la contrainte nominale normalisée expérimentale moyenne. Cette valeur est une mesure de la qualité du modèle sur le jeu de données utilisé [6]. Les coefficients de détermination de chaque loi regroupés dans la Table 1 montrent que le modèle de Mooney-Rivlin fournit la meilleure approximation sur la plage étudiée avec seulement 2 paramètres. C'est donc ce modèle qui sera choisi pour représenter la loi de comportement de l'élastomère dans le calcul statique non-linéaire par la suite. Ce modèle est ensuite linéarisé autour de l'état d'équilibre statique pour le calcul harmonique, sous l'hypothèse de déformations dynamiques de faible amplitude.

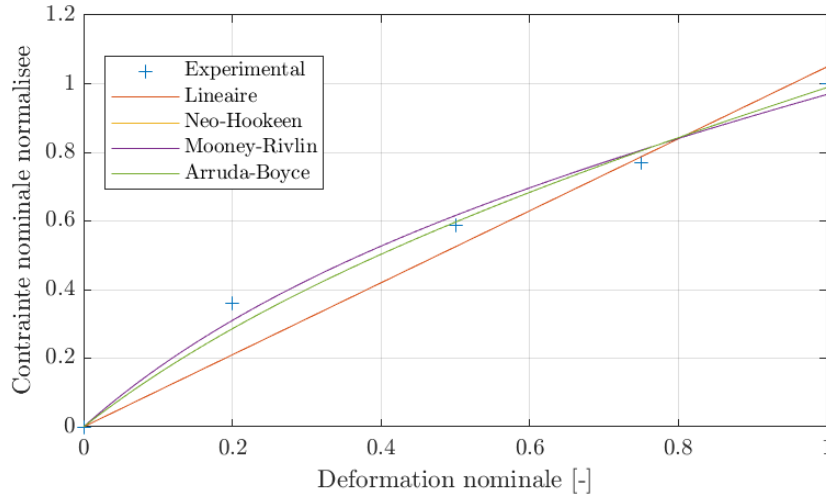


FIGURE 1 – Identification des paramètres des 3 lois hyperélastiques considérées sur les données d'essais de l'élastomère chargé

2.2 Réduction du problème par méthode de projection multi-modèle

Les temps de calcul harmonique peuvent rapidement devenir prohibitifs sur des structures industrielles comprenant plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté. Une méthode de réduction de modèle est donc nécessaire. Cependant, la dépendance fréquentielle des propriétés de l'élastomère rend

une méthode classique de projection sur base modale inappropriée. De nombreuses méthodes ont été proposées pour pallier à ce problème dans la littérature telles que l'utilisation de bases POD [8] ou l'enrichissement de bases modales [9].

Parmi ces techniques d'enrichissement de base modale, la méthode de projection sur base multi-modale est choisie ici pour réduire le problème en raison de son efficacité prouvée sur ce type d'applications et de sa facilité d'implémentation. Elle permet de réduire un problème dynamique avec des matériaux viscoélastiques par projection sur une base représentative de la dynamique de ce problème de taille p avec $p \ll n$. Pour construire la base de projection adaptée au calcul de la réponse harmonique de la structure sur la plage de fréquence $[f_{min}; f_{max}]$, on réalise une première analyse modale linéaire avec les propriétés du matériau viscoélastique évaluées à f_{min} , puis une seconde avec les propriétés du matériau évaluées à f_{max} . Les deux bases de vecteurs propres sont ensuite tronquées pour ne conserver que les $p/2$ vecteurs propres associés aux fréquences propres les plus faibles de chaque base et orthogonalisées par un procédé de Gram-Schmidt. Une pratique commune pour déterminer p consiste à prendre dans la base tous les modes dont la fréquence propre est inférieure à $2f_{max}$. L'équation (4) est alors projetée sur la base réduit et peut s'exprimer sous la forme :

$$\left(-\omega^2 \hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{tot}}^*\right) \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}, \quad (8)$$

avec $\hat{\bullet} = \mathbf{T}^T \bullet \mathbf{T}$ les matrices réduites du problème et $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$ le vecteur des inconnues réduites.

2.3 Réponse dynamique avec matériau viscoélastique

Un modèle viscoélastique fractionnaire [10] est introduit dans le problème harmonique pour modéliser la dépendance fréquentielle des propriétés de l'élastomère. Ce type de modèle permet d'approximer le module de cisaillement de l'élastomère par

$$G^*(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}, \quad (9)$$

avec G_0 et G_∞ les modules asymptotiques, τ le temps de relaxation et α une constante telle que $0 \leq \alpha \leq 1$. Ce modèle fournit ainsi une bonne approximation du comportement dynamique des matériaux viscoélastiques avec seulement cinq paramètres, qui sont identifiés à partir des données d'essais DMA (Dynamic Mechanical Analysis) [11]. Le modèle ainsi identifié permet de rendre compte de la dépendance à la température des propriétés des matériaux viscoélastiques.

On distingue alors dans la matrice de raideur complexe $\mathbf{K}_{\text{tot}}^*$ de l'équation (8) la partie viscoélastique dont les matrices sont indicées \bullet_v de la partie élastique indicée \bullet_e . La dépendance fréquentielle de la partie viscoélastique peut alors être factorisée hors de la matrice de raideur complexe. Cette dernière s'exprime alors

$$\mathbf{K}_{\text{tot}}^*(\omega, T) = \mathbf{K}_e^* + \mathbf{K}_{g_e} - \mathbf{K}_{c_e} + G^*(\omega, T) (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{g_v}) - \mathbf{K}_{c_v} \quad (10)$$

Cette formulation permet ainsi de ne pas recalculer la matrice à chaque pas de temps mais simplement de l'actualiser par un facteur multiplicatif afin de réduire les temps de calcul.

3 Application à une structure réelle

Dans cette section, une aube fan industrielle est considérée. Cette aube est représentative des géométries actuelles des aubes fan de turbomoteurs de dernière génération. Cette structure, représentée en Figure 2, est discrétisée en 396 588 degrés de liberté par des éléments finis hexaédriques à 20 nœuds et encastree sur le pied d'aube (nœuds verts en Figure 2).

L'aube est constituée d'un matériau composite tissé 3D orthotrope dont les orientations des directions principales sont définies localement sur chaque élément par rapport au repère global à l'aide d'une transformation par les angles de Tait-Bryan. Différents matériaux sont définis sur la structure pour tenir compte des variations des propriétés du composite dans la pièce, et un amortissement structural avec un taux d'amortissement $\xi = 0.17\%$ est pris en compte. Les propriétés du composite tissé 3D sont considérées dans cette étude comme indépendantes de la température et de la fréquence d'excitation.

Les lois viscoélastique fractionnaire et hyperélastique de Mooney-Rivlin présentées précédemment sont utilisées pour modéliser le comportement de l'élastomère dans le patch. Le matériau choisi pour la couche de contrainte est un composite stratifié orthotrope.

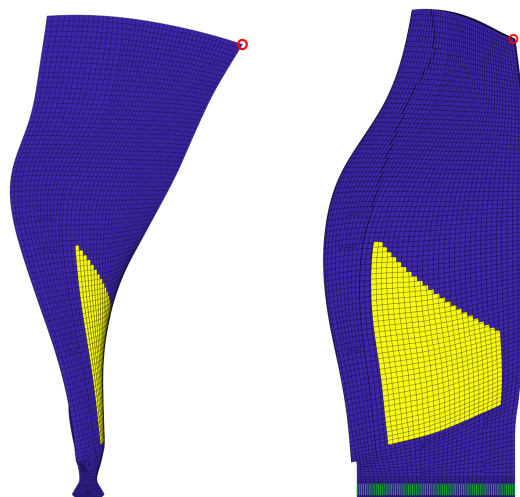


FIGURE 2 – Aube (en bleu) avec patch d'élastomère contraint (en jaune), les nœuds encastrés (en vert) et le nœud d'application de la force unitaire (en rouge)

3.1 Stratégie de maillage du patch

Afin de modéliser le patch d'élastomère sur la structure, une méthode numérique est développée pour ajouter de manière efficace plusieurs couches d'éléments finis sur une partie de la surface de l'aube sans utiliser un logiciel de maillage externe. Il est ainsi possible de tester plusieurs géométries de patch sans modifier le maillage industriel existant de l'aube.

Une fois la forme du patch choisie, un groupe contenant tous les nœuds de la portion de surface du maillage sur lequel le patch est fixé (en rouge sur la Figure 3) est défini. Pour chaque élément de la surface sélectionnée, la normale à la surface de l'élément est calculée et des nouveaux nœuds faisant face aux nœuds existants sont créés dans la direction de la normale à une distance égale à l'épaisseur du patch. Des éléments hexaédriques à 20 nœuds sont alors créés entre ces nouveaux nœuds et les nœuds existants. Cette opération peut alors être répétée plusieurs fois pour créer plusieurs couches d'éléments représentant un patch multicouche ou bien la couche de contrainte.

Le patch présenté en Figure 2 est composé d'une couche d'élastomère de 0,3 mm d'épaisseur modélisée

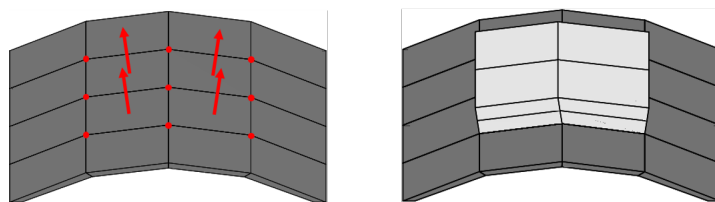


FIGURE 3 – Ajout d'éléments sur un cas simple

par 1 couche d'éléments et d'une couche de contrainte de 0.7 mm d'épaisseur modélisée par 2 couches d'éléments. Il est choisi pour être représentatif des designs de patch précédemment utilisés dans ce type d'application. L'optimisation de la géométrie du patch sera le sujet de futurs travaux.

3.2 Influence du patch sur la dynamique de l'aube

La modélisation présentée précédemment est utilisée pour calculer la réponse harmonique de l'aube sous chargement centrifuge avec et sans patch afin de montrer l'influence de l'ajout du patch sur la dynamique de la structure. Un chargement centrifuge équivalent à 70% de la vitesse de rotation nominale de l'aube est appliqué et la réponse statique de l'aube à ce chargement est calculée. Un chargement

ponctuel unitaire orthoradial dynamique est ensuite appliqué en tête du bord de fuite (nœud rouge en Figure 2). La réponse de la structure sur ce même degré de liberté est calculée sur une plage de fréquence comprise entre 0 et 200 Hz avec un pas de 0.1 Hz. Les résultats sont regroupés en Figure 4.

Afin de permettre des comparaisons quantitatives, les fréquences propres et les amortissements modaux

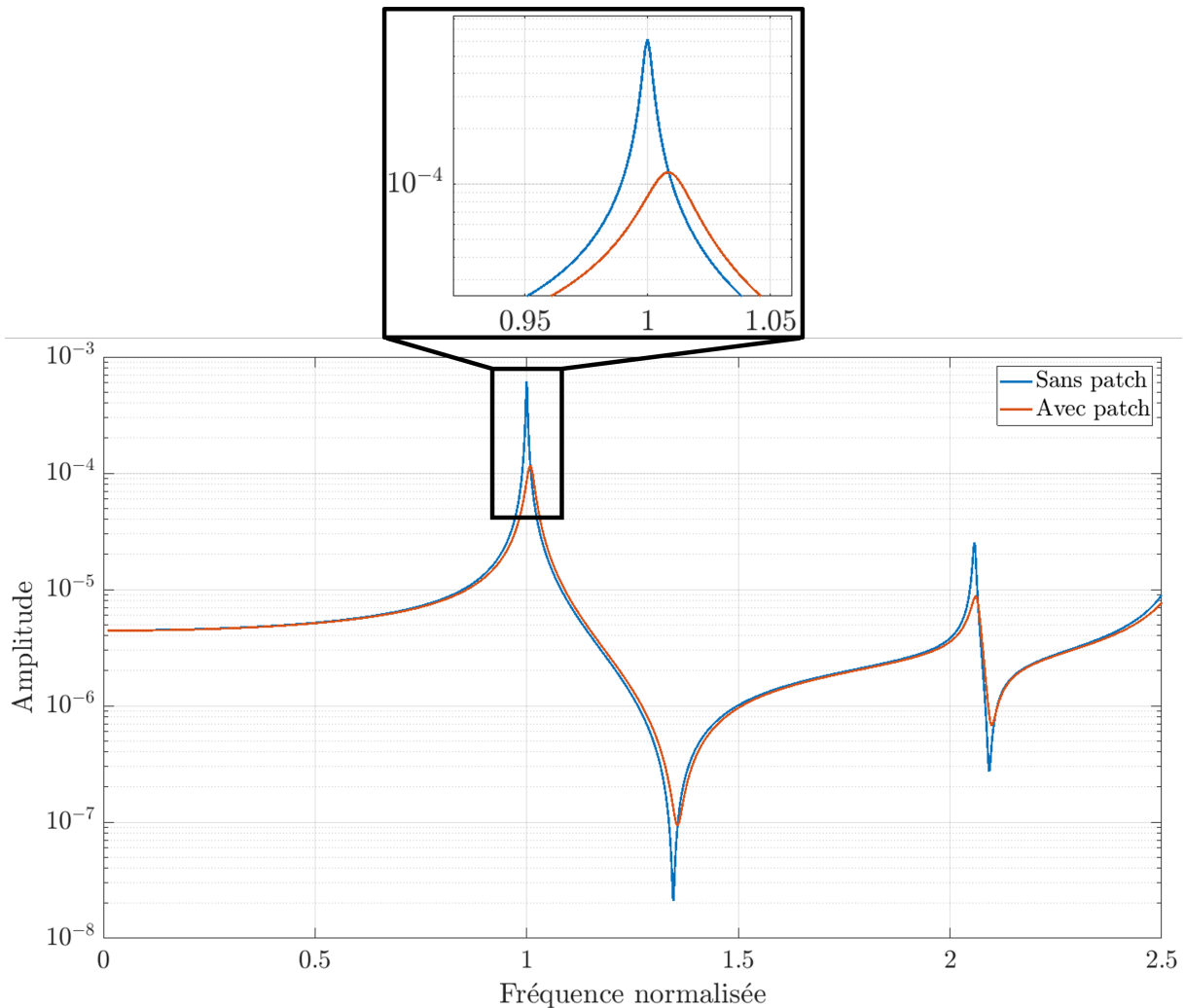


FIGURE 4 – FRF sur le degré de liberté excité de la structure sans patch (en bleu) et avec patch (en rouge) autour de l'équilibre statique sous chargement centrifuge à 70% de la vitesse nominale

des deux premiers modes excités sur la plage de fréquence étudiée sont extraits à l'aide d'une méthode d'identification spectrale et rassemblés dans la Table 2.

TABLE 2 – Fréquences propres normalisées et amortissements modaux de l'aube avec et sans patch identifiés sur la FRF numérique

Sans patch		Avec patch			
f_0	ξ [%]	Valeur	f_0 Variation	Valeur	ξ [%] Variation
1	0.17	1.009	+0.9%	0.30	+76%
2.058	0.17	2.060	+0.1%	0.24	+41%

Comme mis en évidence dans la littérature, on observe une légère augmentation des fréquences propres de la structure avec l'ajout du patch. Même si cet effet reste limité il doit être précisément prédit pour diriger les futures phases de conception. Ensuite, on peut observer une nette augmentation de l'amortissement modal pour les modes présents sur la plage de fréquence étudiée. Cependant, cette augmentation n'est pas identique pour tous les modes, ce qui semble indiquer que ce patch est optimisé pour amortir

certain modes plutôt que d'autres. Cette efficacité à amortir un mode dépend de nombreux facteurs tels que la taille, la position, le nombre de patches ou encore les matériaux utilisés. Ainsi, ce modèle pourra être utilisé dans de futurs travaux pour obtenir les valeurs optimales de ces paramètres pour maximiser l'efficacité du patch.

3.3 Comparaison expérimentale

Une campagne d'essais sur la même aube industrielle que celle présentée dans la partie précédente a été réalisée au LTDS (Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes). Deux configurations différentes ont été testées, l'une avec un jeu d'aubes sans patch et l'autre avec un jeu d'aubes avec patch. Les données expérimentales extraites de cette campagne d'essais sont ici comparées aux résultats numériques fournis par le modèle présenté ci-dessus pour valider ce dernier.

Tout d'abord, une analyse modale expérimentale est menée sur chacune des 18 aubes de la roue aubagée sans patch. L'aube est encastrée en pied dans un mors fixé à un bâti et une excitation est fournie par un patch piézoélectrique positionné en surface de l'aube sous la forme d'un balayage sinus. Les fréquences des trois premiers modes propres de la structure obtenues par des mesures au vibromètre laser et moyennées sur les 18 aubes sont présentées dans la Table 3. Ces fréquences propres expérimentales sont comparées aux fréquences propres des 3 premiers modes de l'aube obtenues numériquement. La corrélation sur ces trois premiers modes propres est très satisfaisante, ce qui permet de valider la modélisation de la structure fixe sans patch.

Les amortissements modaux des deux premiers modes propres de l'aube avec patch viscoélastique ont

TABLE 3 – Fréquences propres normalisées expérimentales et numériques des trois premiers modes propres de l'aube encastrée sans patch

	Essai sur mors encastré	Calcul numérique	Écart
Mode 1	1	0.987	-1.33%
Mode 2	2.492	2.509	0.69%
Mode 3	3.640	3.589	-1.41%

été mesurés sur la structure encastrée sur son mors, mais cette fois-ci avec le mors suspendu en conditions libres. On considère que ce changement de conditions aux limites influence peu les amortissements modaux mesurés en essais. Ainsi, ces derniers sont comparés aux amortissements modaux identifiés sur une FRF numérique de l'aube encastrée en pied obtenue avec le modèle présenté précédemment. Les résultats numériques et expérimentaux sont présentés dans la Table 4.

Cet amortissement modal est donc la somme de l'amortissement structural de l'aube et de l'amortissement ajouté par le patch. Ainsi, si on considère un amortissement structural avec un taux d'amortissement $\xi = 0.17$, l'amortissement total de la structure est multiplié par 1.75 pour le premier mode par l'ajout du patch, et 1.41 pour le second mode. Il y a donc un net impact du patch, qui semble plutôt efficace sur les premiers modes propres de la structure. De plus, il est à noter que la corrélation calcul/essai sur les valeurs des amortissements modaux étudiés ici est excellente. Cela valide ainsi la modélisation du patch viscoélastique et les lois matériau identifiées pour modéliser son comportement. Des essais complémentaires sur davantage de modes propres de la structure sont prévus pour enrichir ces comparaisons, et des comparaisons à des essais sur une roue aubagée complète en rotation à sa vitesse nominale sous vide d'air feront l'objet de futurs travaux pour valider la modélisation de l'effet du chargement centrifuge sur la dynamique de la structure.

4 Conclusion

Les aubages fan de turbomachines équipés de patches viscoélastiques montrent des gains en amortissements importants sans modification significative de la tenue mécanique de la structure. La loi viscoélastique fractionnaire et la loi de comportement hyperélastique de Mooney-Rivlin utilisées permettent

TABLE 4 – Amortissements modaux expérimentaux et numériques des deux premiers modes propres de l’aube encastrée avec patch

	Essai sur mors encastré	Calcul numérique
Mode 1	0.32%	0.30%
Mode 2	0.23%	0.24%

de rendre compte des propriétés statiques et dynamiques des élastomères employés. De plus, l’utilisation d’une méthode de projection multi-modale permet de réaliser les calculs sur des maillages industriels à moindre coût et suffisamment précis. Ainsi, la méthode de calcul développée permet de modéliser efficacement les structures étudiées et ouvre la voie à l’optimisation de patch viscoélastiques sur des structures industrielles.

5 Remerciements

Les auteurs souhaiteraient remercier Safran Aircraft Engines pour le soutien financier à la thèse CIFRE dont ces travaux font partie, et pour avoir permis de publier ces résultats. Les auteurs remercient également Claude Gibert et Kévin Billon pour leur assistance sur la réalisation et l’exploitation des essais réalisés au LTDS.

Références

- [1] A. Sénéchal, O. Thomas, J.-F. Deü. *Optimization of Shunted Piezoelectric Patches for Vibration Reduction of Complex Structures : Application to a Turbojet Fan Blade*, 22nd International Conference on Design Theory and Methodology, Volume 5, Pages 695-704, 2010. DOI 10.1115/DETC2010-28737
- [2] L. Rouleau, O. De Smet, J.-F. Deü. *Vibration prediction of rotating composite fan blades comprising viscoelastic damping treatments*, Journal of Sound and Vibration, Volume 536, Pages 117-135, 2022. DOI 10.1016/j.jsv.2022.117135
- [3] K.J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall international series in civil engineering and engineering mechanics, 1982. ISBN 0-13-317305-4
- [4] L.R.G. Treloar. *Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation*, Trans. Faraday Soc., Volume 40, Pages 59-70, 1944. DOI 10.1039/TF9444000059
- [5] M. Kaliske, H. Rothert. *On the Finite Element Implementation of Rubber-like Materials at Finite Strains*, Engineering Computations, Volume 14, Pages 216-232, 1997. DOI 10.1108/02644409710166190
- [6] C.R. Rao. *Linear Statistical Inference and Its Applications*, Wiley, 1973. ISBN 9780471708230
- [7] E.M. Arruda, M.C. Boyce. *A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 41.2, Pages 389-412, 1993. DOI 10.1016/0022-5096(93)90013-6
- [8] A. Berthet, E. Perrey-Debain, J.-D. Chazot, S. Germès. *Réduction de modèle des structures viscoélastiques par Balanced POD pour la vibro-acoustique*, 15ème colloque national en calcul des structures, 2022. hal-03717690
- [9] L. Rouleau, J.-F. Deü, A. Legay. *A comparison of model reduction techniques based on modal projection for structures with frequency-dependent damping*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 90, Pages 110-125, 2017. DOI 10.1016/j.ymssp.2016.12.013
- [10] R.L. Bagley, P.J. Torvik. *Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures*, AIAA Journal, Volume 21.5, Pages 741-748, 1983. DOI 10.2514/3.8142
- [11] A.C. Galucio, J.-F. Deü, R. Ohayon. *Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators*, Computational Mechanics, Volume 33, Pages 282-291, 2004. DOI 10.1007/s00466-003-0529-x