

CutFEM pour l'optimisation de forme: implémentation et études exploratoires pour la réinitialisation des lignes de niveaux

A. El Bachari^{1,2}, S. Claus¹, J. Rannou³, V. Yastrebov², P. Kerfriden²

¹ ONERA/DTIS-Université Paris-Saclay, Palaiseau, {amina.el_bachari,susanne.claus}@onera.fr

² Centre des Matériaux, MINES Paris - PSL, {vladislav.yastrebov,pierre.kerfriden}@minesparis.psl.eu

³ ONERA/DMAS-Université Paris-Saclay, Châtillon, johann.rannou@onera.fr

Résumé — Nous présentons la mise en oeuvre d'une méthode d'optimisation de forme par lignes de niveaux avec CutFEM en FEniCSx dans le cadre de l'élasticité linéaire. Dans ce travail, la méthode CutFEM permet de ne pas remailler le domaine après son déplacement. La géométrie est définie par une fonction de distance signée. Une méthode de réinitialisation basée sur la méthode éléments finis et CutFEM est proposée. On comparera les résultats de notre implémentation avec la méthode classique du matériau fictif.

Mots clés — Optimisation de forme, Méthode CutFEM, Méthode de réinitialisation.

1 Introduction générale

L'objectif de l'optimisation de forme est de trouver la distribution optimale de matière d'une structure afin de minimiser une fonction coût avec ou sans contraintes.

La représentation du domaine à optimiser dépend des méthodes utilisées. Les plus communes reposent sur la définition d'une variable locale de densité [5]. Cette variable varie continuellement entre 0 (absence de matière) et 1 (présence de matière). L'inconvénient de ce type de méthode est de ne pas disposer de définition précise des frontières du domaine. Un autre type de méthode pallie ce problème en utilisant une définition explicite des frontières (formes paramétriques, fonctions implicites), qu'il s'agit de faire évoluer pour optimiser le domaine.

La méthode CutFEM a été proposée en 2014 [7]. Elle permet de résoudre des EDP avec la technique des éléments finis en ayant un maillage complètement indépendant de la géométrie tout en conservant la robustesse et la stabilité de la méthode éléments finis classique. La méthode CutFEM est donc très intéressante pour résoudre des EDP sur des géométries complexes nécessitant un temps de travail considérable pour générer un maillage de qualité et conforme. La méthode est aussi très utile pour résoudre des problèmes de frontières mobiles. Aucun remaillage n'est nécessaire, ce qui permet un gain de temps de calcul important.

En optimisation de forme, plusieurs approches ont été proposées pour résoudre le problème avec un maillage indépendant du domaine ([16, 17]) afin de diminuer significativement le temps d'analyse nécessaire à la création d'un maillage conforme. Ces techniques souffrent souvent d'un manque de précision, ce qui nécessite d'avoir un maillage très fin ou adaptatif ce qui augmente considérablement le coût de calcul. Par exemple, la méthode cg-FEM [16] consiste à avoir un maillage indépendant du domaine en utilisant une fonction level set pour définir la frontière. La précision des résultats dépend particulièrement du procédé d'intégration. Un raffinement de maillage adaptatif est nécessaire pour pallier le manque de précision de l'intégration le long de la frontière, ce qui accroît le coût de calcul. À l'inverse, la méthode CutFEM ne nécessite pas de procédure d'adaptation de maillage et les éléments de rigidité très faible ne posent pas de problème de conditionnement. Dans [8], la méthode CutFEM est proposée en optimisation de forme pour minimiser la compliance d'une structure dans le cadre de l'élasticité linéaire. Pour représenter la géométrie du domaine avec CutFEM, la méthode des courbes de niveaux (désignée en anglais par le terme level set) peut être utilisée ([10, 11, 3, 1]). Elle consiste à représenter la frontière du domaine par une fonction de distance signée ϕ , actualisée au fur et à mesure de l'optimisation. L'évolution du domaine est obtenue en résolvant une équation de Hamilton Jacobi suivant un champ de vitesse. Le

champ de vitesse correspond à la direction de descente de la dérivée de forme étendue et régularisée sur l'ensemble du maillage. Pour dériver la fonction coût par rapport au domaine, la méthode de dérivation rapide proposée par J. Céa ([9]) est utilisée. Lors de l'advection de la géométrie du domaine, les solutions de l'équation de Hamilton Jacobi ne préservent pas la propriété de distance signée, cruciale pour avoir une bonne approximation de la normale à la frontière du domaine. De nombreuses méthodes de réinitialisation sont proposées dans la littérature pour rétablir cette propriété ([18]). Les plus communes sont basées sur la méthode des différences finies. Néanmoins, dans le cadre de solveurs éléments finis, les méthodes basées sur les éléments finis sont privilégiées afin de faciliter la parallélisation. Par exemple, la méthode DRLSE (Distance Regularized Level Set Evolution) proposée dans [15, 4] est basée sur la résolution d'un problème elliptique non-linéaire. Dans le cadre de l'optimisation de forme, cette méthode entraîne des distorsions de la frontière du domaine.

Dans ce travail, nous présentons une optimisation de forme du problème de minimisation de la compliance avec une formulation CutFEM. L'ensemble de notre optimisation est implémenté dans le code éléments finis FEniCSx. Nous proposons une amélioration de la méthode de réinitialisation DRLSE, dans le cadre de l'optimisation de forme avec CutFEM. Les résultats seront discutés et comparés à la méthode classique du matériau fictif [2].

Tout d'abord, nous présentons le problème d'optimisation de la compliance et de la méthode de dérivation rapide (section 2). Ensuite, nous introduisons la méthode CutFEM pour résoudre le problème d'élasticité linéaire (section 3). Puis, nous expliquons la méthode des courbes de niveaux, la stabilisation de l'advection et la méthode de réinitialisation (section 4). Au final, nous discutons et comparons les résultats (section 5).

2 Présentation du problème

On cherche à minimiser la compliance d'une structure. Ceci revient à résoudre le problème d'optimisation de forme suivant :

$$\Omega_{min} := \operatorname{argmin}_{\Omega \in \mathcal{O}} J_u(\Omega) = \operatorname{argmin}_{\Omega \in \mathcal{O}} \int_{\Omega} j(u) dV \quad (1)$$

\mathcal{O} est l'ensemble des ouverts admissibles de \mathbb{R}^n , où $n \in \{2, 3\}$. On note $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ le volume effectif de la structure et Γ sa frontière. Γ est soumise à des conditions de Dirichlet et de Neumann, respectivement notées Γ_D et Γ_N , telle que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ et $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, et u correspond au champ de déplacement solution du problème d'élasticité linéaire classique. On se place sous l'hypothèse des petites déformations et on considère nulles les forces volumiques. On impose des déplacements nuls sur Γ_D ($u_D = 0$) et $\operatorname{div}(\sigma) \cdot n = g$ sur Γ_N . Sous forme faible, le problème d'élasticité linéaire s'écrit :

Trouver $u_{\Omega} \in V(\Omega) = \{u \in [H^1(\Omega)]^n \mid u|_{\Gamma_D} = u_D\}$, telle que $\forall v \in V_0(\Omega) = \{u \in [H^1(\Omega)]^n \mid u|_{\Gamma_D} = 0\}$

$$a(u_{\Omega}, v) = l(v) \quad (2)$$

où pour tout $u \in V(\Omega)$ et $v \in V_0(\Omega)$:

$$a(u, v) = 2\mu(\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{L^2(\Omega)} + \lambda(\nabla \cdot u, \nabla \cdot v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{où } \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u) \quad (3)$$

$$l(v) = (g, v)_{L^2(\Gamma_N)} \quad (4)$$

La compliance correspond à l'énergie de déformation élastique :

$$J_u(\Omega) := \mu(\varepsilon(u), \varepsilon(u))_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}(\nabla \cdot u, \nabla \cdot u)_{L^2(\Omega)} \quad (5)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Alors on définit

$$j(u) := \mu \varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \frac{\lambda}{2} \nabla \cdot u \nabla \cdot u \quad (6)$$

Pour contraindre le volume de la structure, on introduit un terme de pénalisation positif ρ et on résoud le problème :

$$\Omega_{min} := \operatorname{argmin}_{\Omega \in \mathcal{O}} \left(J_u(\Omega) + \rho \int_{\Omega} dV \right) = \operatorname{argmin}_{\Omega \in \mathcal{O}} \mathcal{J}(\Omega) \quad (7)$$

En optimisation de forme, pour mettre en oeuvre une méthode de gradient sur la variable θ (introduite pour la première fois dans les travaux de J. Hadamard [12]) qui paramétrise la forme $\Omega_{n+1} = (I_d + \theta)(\Omega_n)$, il est nécessaire de calculer la dérivée de forme de J_u dans la direction θ . Pour calculer cette dérivée, nous utilisons la méthode de dérivation rapide proposée par J. C ea [9], décrite dans la section suivante.

2.1 Formulation Lagrangienne du problème de minimisation

Le problème de minimisation (1) revient à chercher l'extremum $(\Omega_{min}, u_{\Omega_{min}}, p_{\Omega_{min}})$ du Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{O} \times V \times V_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\Omega, u, p) &\rightarrow \mathcal{L}(\Omega, u, p) = J_u(\Omega) - a(u, p) + l(p) \end{aligned} \quad (8)$$

Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}$, en $u = u_{\Omega}$ (solution de l'équation (2)), on a :

$$J_u(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, p), \forall p \in V_0 \quad (9)$$

Le point scelle du Lagrangien est d etermin e par les équations suivantes :

Trouver $u_{\Omega} \in V$ telle que : $\partial_p \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, p; \varphi) = -a(u_{\Omega}, \varphi) + l(\varphi) = 0, \forall \varphi \in V_0$

Trouver $p_{\Omega} \in V_0$ telle que : $\partial_u \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, p_{\Omega}; \psi) = \partial_u J_u(\Omega; \psi) |_{u=u_{\Omega}} - a(\psi, p_{\Omega}) = 0, \forall \psi \in V$

On définit la dérivée de forme de la fonction coût dans la direction θ par :

$$J'_u(\Omega)(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_u((Id + t\theta)(\Omega)) - J_u(\Omega)}{t} \quad (10)$$

D'après (9) et avec la définition du point scelle (u_{Ω}, p_{Ω}) la dérivée de forme de la fonction coût dans la direction θ s'écrit par composition :

$$J'_u(\Omega)(\theta) = \mathcal{L}'_{\Omega}(\Omega, u_{\Omega}, p_{\Omega}; \theta) \quad (11)$$

$$= \partial_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, p_{\Omega}; \theta) + \underbrace{\partial_u \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, p_{\Omega}; u'_{\Omega, \theta})}_{=0} + \underbrace{\partial_p \mathcal{L}(\Omega, u_{\Omega}, p_{\Omega}; p'_{\Omega, \theta})}_{=0} \quad (12)$$

$$= \partial_{\Omega} J_u(\Omega) |_{u=u_{\Omega}} - \partial_{\Omega} a(u_{\Omega}, p_{\Omega}) + \partial_{\Omega} l(p_{\Omega}) \quad (13)$$

avec :

$$u'_{\Omega, \theta}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{(Id+t\theta)(\Omega)}(x) - u_{\Omega}(x)}{t} \text{ la dérivée eulérienne de } u \text{ dans la direction } \theta \quad (14)$$

$$p'_{\Omega, \theta}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{(Id+t\theta)(\Omega)}(x) - p_{\Omega}(x)}{t} \text{ la dérivée eulérienne de } p \text{ dans la direction } \theta \quad (15)$$

Le problème de minimisation de la compliance est auto-adjoint ($u_{\Omega} = p_{\Omega}$). Le terme de la dérivée de forme de la forme linéaire dans l'égalité (13) s'annule car la frontière Γ_N est considérée fixée. Finalement, en utilisant les propriétes de dérivée de forme classique nous avons :

$$j'(\Omega)(\theta) = J'_u(\Omega)(\theta) + \partial_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \rho dV \right) \quad (16)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \theta \cdot (n \tilde{v}(u_{\Omega})) ds, \text{ avec } \tilde{v}(u_{\Omega}) = -\mu \varepsilon(u_{\Omega}) : \varepsilon(u_{\Omega}) - \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot u_{\Omega})(\nabla \cdot u_{\Omega}) + \rho \quad (17)$$

où n est la normale unitaire. Nous allons utiliser la méthodes CutFEM pour intégrer sur Ω et une fonction de distance signée pour faire évoluer le domaine.

3 Méthode CutFEM

Dans ce paragraphe, nous réécrivons le problème d'élasticité linéaire dans une version discrétisée avec la méthode CutFEM. Nous commençons par introduire la méthode dans sa généralité. Ensuite, nous explicitons sa formulation à un problème d'élasticité et nous introduisons les termes de stabilisation.

3.1 Maillage et espace éléments finis

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\Omega \subset D$. Le maillage du domaine D est noté $\mathcal{K}_{h,D}$ dont les éléments sont notés K , l'ensemble des faces est noté $\mathcal{F}_{h,D}$ dont les éléments sont notés F et h est le diamètre minimal de la sphère contenant les éléments de $\mathcal{K}_{h,D}$.

Dans le cadre de la méthode de Galerkin, on définit l'espace des éléments finis de Lagrange d'ordre k (noté \mathbb{P}_k) associé à ce maillage :

$$V_{h,k,D} := \left\{ v \in V(D) \cap [C^0(D)]^n \mid v|_K \in [\mathbb{P}_k(K)]^n \text{ pour tout } K \in \mathcal{K}_{h,D} \right\} \quad (18)$$

On définit les éléments actifs \mathcal{K}_h et les faces actives \mathcal{F}_h du maillage :

$$\mathcal{K}_h := \{ K \in \mathcal{K}_{h,D} \mid \bar{K} \cap \Omega \neq \emptyset \} \text{ et } \mathcal{F}_h = \{ F \in \mathcal{F}_{h,D} \mid F \cap \Omega \neq \emptyset \} \quad (19)$$

Ainsi, on définit la partie active du maillage :

$$\Omega_h = \cup_{K \in \mathcal{K}_h} K \quad (20)$$

et l'espace éléments finis sur la partie active du maillage :

$$V_{h,k}(\Omega_h) := V_{h,k,D} \mid_{\Omega_h} \quad (21)$$

Ω_h ne correspond pas à un maillage conforme à la structure Ω , mais plutôt au plus petit ensemble d'éléments qui contient le domaine comme illustré figure 1.

Pour stabiliser la formulation CutFEM dans le cadre de l'élasticité linéaire (voir section 3.2), on définit deux ensembles qui représentent les éléments intersectés par des frontières de Dirichet et de Neumann respectivement :

$$\mathcal{F}_{h,Dir} := \{ F \in \mathcal{F}_h \mid F \cap \bar{\Omega}_{h,D} \neq \emptyset \} \text{ où } \bar{\Omega}_{h,D} := \bigcup_{\bar{K} \cap \Gamma_D \neq \emptyset, K \in \mathcal{K}_h} K \quad (22)$$

$$\mathcal{F}_{h,N} := \{ F \in \mathcal{F}_h \mid F \cap \bar{\Omega}_{h,N} \neq \emptyset \text{ et } F \notin \mathcal{F}_{h,Dir} \} \text{ où } \bar{\Omega}_{h,N} := \bigcup_{\bar{K} \cap \Gamma_N \neq \emptyset, K \in \mathcal{K}_h} K \quad (23)$$

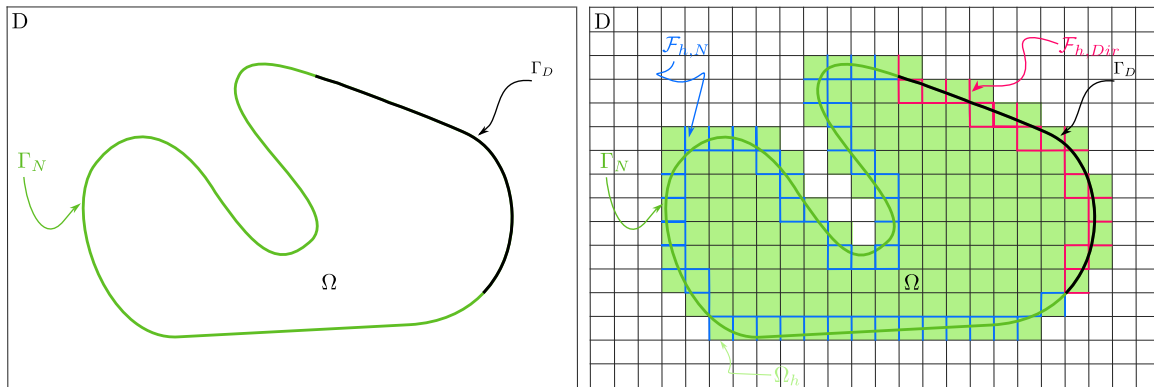


FIGURE 1 – Illustration des définitions des domaines et faces de la méthode CutFEM

Pour chaque face $F \in \mathcal{F}$, on note par K_+ et K_- les deux éléments partagés par F . Ainsi, on définit la normale à la face par $n_F = n_{\partial K_+}$. Pour un champ v suffisamment régulier dans D , on définit le saut de v sur Γ par :

$$[v] = v|_{K_+} - v|_{K_-} \quad (24)$$

L'ensemble de ces définitions permet de réécrire le problème d'élasticité linéaire avec la méthode Cut-FEM, stabilisé avec la méthode de pénalisation fantôme [6] et en imposant les conditions de Dirichlet faiblement avec la méthode de Nitsche [13].

3.2 Application à l'élasticité linéaire

La formulation du problème (2) avec la méthode éléments finis sur $\mathcal{K}_{h,D}$ non conforme à Ω n'est pas stable et le bon conditionnement du système linéaire n'est pas certain. La pénalisation fantôme [6] stabilise la formulation faible (2) en donnant plus de contrôle au domaine Ω_h afin de ne plus faire dépendre le problème de la façon dont la frontière coupe le maillage. En reprenant les résultats de [14] et [8], le problème d'élasticité linéaire avec la pénalisation fantôme est : Trouver $u_h \in V_{h,k}(\Omega_h)$ telle que pour tout $v \in V_{h,k}(\Omega_h)$

$$a(u_h, v) + j_h(\mathcal{F}_{h,Dir}; u_h, v) + h^2 j_h(\mathcal{F}_{h,N}; u_h, v) = l(v) \quad (25)$$

avec

$$j_h(\mathcal{F}_h, u, v) = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \sum_{l=1}^k \gamma_a h^{2l-1} \left(\left[\partial_{n_F}^l u \right], \left[\partial_{n_F}^l v \right] \right)_{L^2(F)} \quad \text{où } \gamma_a > 0 \quad (26)$$

On utilise la méthode de Nitsche [13] pour imposer des conditions de Dirichlet sur la frontière Γ_D maillée non explicitement tout en garantissant la consistance numérique. Le problème final est : Trouver $u_h \in V_{h,k}(\Omega_h)$ telle que pour tout $v \in V_{h,k}(\Omega_h)$

$$a(u_h, v) + j_h(\mathcal{F}_{h,D}; u_h, v) + h^2 j_h(\mathcal{F}_{h,N}; u_h, v) + N_{\Gamma_D}(u_h, v) = l(v) \quad (27)$$

avec

$$\begin{aligned} N_{\Gamma_D}(u, v) &= (\boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \boldsymbol{n}, v)_{L^2(\Gamma_D)} - (u, \boldsymbol{\sigma}(v) \cdot \boldsymbol{n})_{L^2(\Gamma_D)} \\ &\quad + \frac{\gamma_D}{h} \left[2\mu(u, v)_{L^2(\Gamma_D)} + \lambda(u \cdot \boldsymbol{n}, v \cdot \boldsymbol{n})_{L^2(\Gamma_D)} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

où $\gamma_D > 0$ est un paramètre utilisateur.

La forme stabilisée est coercive et possède les mêmes propriétés de continuité que la forme standard suivant une norme sur le domaine actif [14]. Nous allons utiliser la méthode des lignes de niveaux pour définir la frontière $\partial\Omega$. Pour faire évoluer le domaine nous allons résoudre une équation de Hamilton Jacobi.

4 Level set

4.1 Méthode des courbes de niveaux

Soit D l'encombrement maximal que peut prendre la structure. La méthode des courbes de niveaux donne une représentation implicite de la frontière du domaine Ω par une courbe de niveau 0. Soit $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$:

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in D \setminus \overline{\Omega} \end{cases} \quad (29)$$

On utilise une méthode de gradient pour minimiser le problème (7). D'après (17) on peut choisir comme direction de descente $\theta = -\gamma \tilde{v}(u_\Omega) \cdot \boldsymbol{n}$ avec $\gamma > 0$ choisi arbitrairement, et \boldsymbol{n} la normale définie par $\boldsymbol{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ (car ϕ est une fonction de distance signée).

Le choix de prendre $\theta = -\gamma \tilde{v}(u_\Omega) \cdot \boldsymbol{n}$ comme direction de descente est ambigu car d'après (17), ce champ est uniquement défini sur la frontière $\partial\Omega$. L'implémentation d'une extension de θ est nécessaire afin d'avoir un champ de vitesse défini sur l'ensemble du domaine D . De plus, la régularité du champ θ n'est pas suffisante pour assurer le cadre mathématiques de la notion de dérivée de forme au sens de Hadamard (car l'espace $L^2(\partial\Omega)$ n'est pas un sous espace de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$). Dans notre étude, l'extension et la

régularisation du champ de vitesse consistent à résoudre le problème suivant :

Trouver $\theta'_{reg} \in V$ telle que $\forall w \in V$

$$\alpha (\nabla \theta'_{reg}, \nabla w)_{L^2(D)} + (\theta'_{reg}, w)_{L^2(D)} = -\mathcal{J}'(\Omega)(w) \quad (30)$$

Le paramètre $\alpha > 0$ est une longueur interne qui indique approximativement jusqu'où le gradient régularisé est étalé de la frontière vers D . Le deuxième terme de gauche correspond à l'extension du champ de vitesse.

Puis, on définit le champ de vitesse normalisé :

$$\theta_{reg} = \frac{\theta'_{reg}}{\sqrt{\alpha \|\nabla \theta'_{reg}\|_{L^2(D)} + \|\theta'_{reg}\|_{L^2(D)}}} \quad (31)$$

Pour advecter ϕ suivant le champ de vitesse $\theta_{reg} = v_{reg}n$ (étendue sur l'ensemble D), on résout l'équation de Hamilton Jacobi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \theta_{reg} \cdot \nabla \phi = 0, \forall t \in [0; T] \quad (32)$$

Dans le contexte de l'optimisation de forme, $T > 0$ correspond à un pseudo-temps, paramètre de descente dans la minimisation de la fonction objectif. On résout l'équation de Hamilton Jacobi avec un schéma Euler explicite entre 0 et T (en un nombre de pas de temps arbitraire). A chaque itération n , on impose ϕ_n comme condition initiale, où ϕ_n est la level set qui paramétrise Ω_n . Nous résolvons (7), alors le pas de descente T de l'algorithme à gradient est choisi pour vérifier :

$$\mathcal{J}(\Omega_{n+1}) < \mathcal{J}(\Omega_n) \quad (33)$$

Les solutions de cette équation ne préservent pas la propriété de distance signée de ϕ :

$$\forall x \in D, |\nabla \phi(x)| = 1 \quad (34)$$

Cette propriété est cruciale pour garantir une bonne approximation de la normale le long de laquelle est advectée la level set. Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature pour réinitialiser la solution de (32). Dans le cadre de cette étude, nous avons mis en place une méthode basée sur la technique des éléments finis et CutFEM, plus facilement parallélisable dans un code éléments finis par rapport aux méthodes classiques basées sur les différences finies.

4.2 Stabilisation de l'advection

Pour stabiliser l'équation de Hamilton Jacobi, nous introduisons un paramètre de stabilisation $\gamma_{HJ} > 0$, et nous utilisons la stabilisation intérieure proposée dans [8] :

$$(\partial_t \phi, v)_{L^2(D)} + (\theta_{reg} \cdot \nabla \phi, v)_{L^2(D)} + \gamma_{HJ} \sum_{F \in \mathcal{F}_h} h^2 ([\partial_{n_F} \phi], [\partial_{n_F} v])_{L^2(F)} = 0 \quad (35)$$

4.3 CutFEM pour la réinitialisation

Pour réinitialiser la fonction ϕ , nous implémentons une nouvelle approche s'appuyant sur les précédents travaux [15] et [4].

Les auteurs proposent une formulation conduisant à la résolution d'un problème elliptique non linéaire, discrétisé puis résolu de manière itérative avec la méthode des éléments finis, c'est à dire :

$$\int_D \nabla \phi^{n+1} \nabla v \, dV + \gamma \int_{\partial \Omega} \phi^{n+1} v \, ds = \int_D \frac{\nabla \phi^n}{|\nabla \phi^n|} \cdot \nabla v \, dV, \forall v \quad (36)$$

où $\gamma > 0$ est un terme de pénalisation qui assure la conservation de l'interface $\partial \Omega$ lors de la réinitialisation.

Dans notre étude, la frontière du domaine Ω n'est pas maillée explicitement. Pour garantir la conservation de l'interface, on utilise la méthode CutFEM et la méthode de Nitsche [13]. La méthode de Nitsche

permet d'imposer faiblement des conditions de Dirichlet sur une frontière non maillée explicitement. Finalement, nous réécrivons le schéma itératif comme suit :

$$\int_D \nabla \phi^{n+1} \cdot \nabla v \, dV - \int_{\Gamma} \nabla \phi^{n+1} \cdot n v \, ds - \int_{\Gamma} \nabla v \cdot n \phi^{n+1} \, ds + \gamma \int h^{-1} \phi^{n+1} v \, ds = \int_D \frac{\nabla \phi^n}{|\nabla \phi^n|} \cdot \nabla v \, dV, \forall v \quad (37)$$

La méthode proposée par [15] n'est pas bien définie si $|\nabla \phi| \approx 0$. La divergence du terme droit de (36) entraîne des problèmes numériques qui distordent la frontière du domaine.

Le schéma proposé (37) conserve ce défaut.

Pour pallier ce problème, nous avons implémenté le problème prédicteur suivant :

Trouver $\tilde{\phi} \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$:

$$a(\tilde{\phi}, v) = l(v) \quad (38)$$

avec :

$$a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dV - \int_{\Gamma} \nabla u \cdot n v \, ds - \int_{\Gamma} \nabla v \cdot n u \, ds + \gamma \int_{\Gamma} h^{-1} u v \, ds \quad (39)$$

$$l(v) = \int_D \zeta^2 \text{sign}(\phi) \cdot v \, dV \quad (40)$$

où $\gamma > 0$ est un terme de pénalisation positif et ζ un paramètre de l'ordre de la taille de la structure

Ce pré-problème permet de diffuser les valeurs de la level set à partir de la level set de niveau 0 pour corriger les normes de gradient nul. Le sens de diffusion dépend du signe de ϕ , ce qui permet de conserver la définition (29).

L'étude de la méthode sur des exemples nous a permis de valider son utilisation dans le cadre de l'optimisation de forme. Néanmoins, la solution $\tilde{\phi}$ de (38) ne vérifie pas toujours :

$$\forall x \in D, |\nabla \tilde{\phi}(x)| \neq 0 \quad (41)$$

En effet, s'il existe un élément $K \in \mathcal{K}_b$, telle que la ligne de niveau 0 coupe parfaitement K en deux sous éléments égaux, la solution $\tilde{\phi}$ dans cet élément ne vérifiera pas (41).

En optimisation de forme, ce cas pathologique est sans conséquence car la level set évolue au cours des itérations. Cette restriction n'influence pas le résultat final. De plus, nous utilisons un maillage triangulaire ce qui réduit considérablement les chances d'observer une telle situation.

5 Résultats

Pour valider notre implémentation, nous étudions le cas classique d'une poutre en acier encastree de $1\text{m} \times 2\text{m}$ soumise à une charge de traction répartie uniformément à $\pm 0.5\text{m}$ telle que $g = -0.01e_y$ GPa. On initialise le domaine de la structure Ω et D comme illustré par la figure 2.

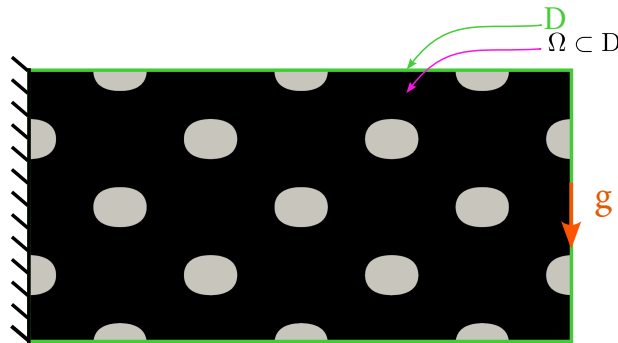


FIGURE 2 – Initialisation de $\Omega \subset D$

On compare les résultats de la minimisation de la compliance avec CutFEM pour différentes tailles de mailles. On compare aussi ces résultats à notre implémentation FEniCSx de la méthode classique du matériau fictif. Comme observé sur les figures 4 et 6, pour une taille de maille suffisamment fine on observe des géométries très similaires pour la méthode CutFEM et la méthode du matériau fictif. Le principal avantage de CutFEM est que pour une taille de maille fine, on réussit à obtenir une géométrie très similaire à celle obtenue pour un maillage plus raffiné. Par exemple, la géométrie observée figure 3 est comparable à la figure 4. A l'inverse, la méthode du matériau fictif ne permet pas d'observer des géométries similaires entre un maillage grossier et un maillage raffiné. On observe sur la figure 5 que pour une taille de maille grossière la méthode du matériau fictif ne permet pas d'avoir une frontière régulière.

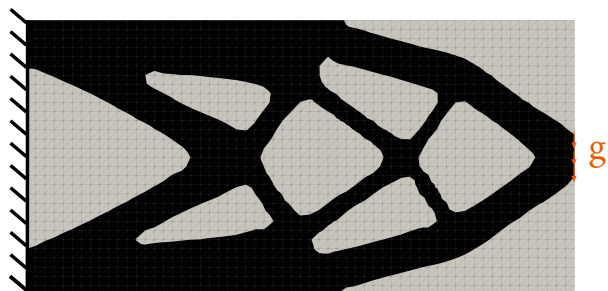


FIGURE 3 – Géométrie optimale de $\Omega \subset D$ avec CutFEM pour $h = \frac{1}{30}$ m et $k = 1$, compliance finale 0.172 kJ, volume final 0.829 m²



FIGURE 4 – Géométrie optimale de $\Omega \subset D$ avec CutFEM pour $h = \frac{1}{100}$ m et $k = 1$, compliance finale 0.246 kJ, volume final 1.145 m²

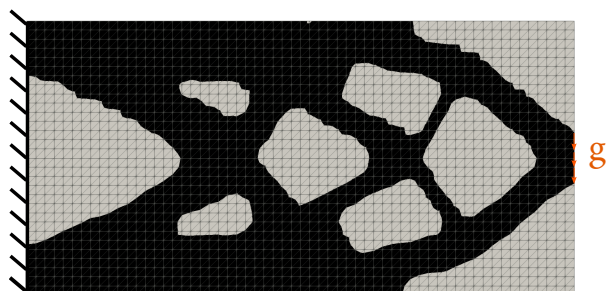


FIGURE 5 – Géométrie optimale de $\Omega \subset D$ avec la méthode du matériau fictif pour $h = \frac{1}{30}$ m, compliance finale 0.208 kJ, volume final 1.109 m²



FIGURE 6 – Géométrie optimale de $\Omega \subset D$ avec la méthode du matériau fictif pour $h = \frac{1}{100}$ m, compliance finale 0.255 kJ, volume final 1.211 m²

6 Conclusion et perspectives

Notre étude donne lieu à la mise en oeuvre d'un algorithme d'optimisation de forme par la méthode des lignes de niveau et CutFEM en FEniCSx. La méthode de réinitialisation CutFEM basée sur la méthode éléments finis permet de réinitialiser la level set de garantir une bonne approximation de la normale, utilisée ensuite pour advecter la frontière du domaine. Cette méthode possède l'avantage d'être facilement parallélisable et implémentable à l'inverse des schémas classiques basés sur la méthode des différences finies. La minimisation de la compliance, problème récurrent en optimisation de forme, nous donne d'excellents résultats. L'objectif est ensuite d'utiliser la différenciation automatique de FEniCSx pour résoudre des problèmes non auto-adjoints.

Remerciements

Nous tenons à remercier l'ONERA, qui assure le financement de la thèse dans laquelle ces travaux ont été réalisés.

Références

- [1] G. Allaire, C. Dapogny, F. Jouve. *Shape and topology optimization*, Elsevier, Andrea Bonito and Ricardo H. Nochetto, 2021.
- [2] G. Allaire, F. De Gournay, F. Jouve, A.-M. Toader. *Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method*, Control and Cybernetics, 20005.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, A.-M. Toader. *A level-set method for shape optimization*, Springer, 2004.
- [4] C. Basting, D. Kuzmin. *A minimization-based-finite element formulation for interface-preserving level set reinitialization*, Springer, 2012.
- [5] M. Bendsøe, O. Sigmund. *Topology Optimization : Theory, Methods, and Applications*, Springer, 2004.
- [6] E. Burman . *Ghost penalty*, Comptes Rendus Mathématique, 2010.
- [7] E. Burman, S. Claus, P. Hansbo, M. Larson, A. Massing. *CutFEM : Discretizing geometry and partial differential equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, 2014.
- [8] E. Burman, D. Elferson, P. Hansbo, M.G Larson, K. Larsson. *Shape optimization using the cut finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018.
- [9] J. Cea. *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*, M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, Gauthier-Villars, 371-402, 1986.
- [10] S. Claus, P. Kerfriden. *A CutFEM method for two-phase flow problem*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019.
- [11] S. Claus, S. Bigot, P. Kerfriden. *A CutFEM method for Stefan-Signorini problems with applications in pulsed laser ablation*, SIAM Journal on Scientific Computing, B1444-B1469, 2018.
- [12] J. Hadamard. *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, Imprimerie nationale, 1908.
- [13] P. Hansbo. *Nitsche's method for interface problems in computational mechanics*, GAMM Mitteilungen, 2005.
- [14] P. Hansbo, M. G. Larson, K. Larsson. *Cut finite element methods for linear elasticity problems*, Mathematics and Mathematical Statistics, 2016.
- [15] C. Li, C. Xu, C. Gui, M. D. Fox. *Distance Regularized Level Set Evolution and Its Application to Image Segmentation*, IEEE Transactions on Image Processing, 3243-3254, 2010.
- [16] E. Nadal, J. Ródenas, J. Albela, M. Tur, J. Tarancón, F. Fuenmayor. *Efficient Finite Element Methodology Based on Cartesian Grids : Application to Structural Shape Optimization*, Hindawi Publishing Corporation, 2013.
- [17] J. Parvizian, E. Rank, A. Duster. *Topology optimization using the finite cell method*, Optimization and Engineering, 2012.
- [18] M. Sussman, E. Fatemi . *An Efficient, Interface Preserving Level Set Re-Distancing Algorithm And Its Application To Interfacial Incompressible Fluid Flow*, SIAM Journal on Scientific Computing, 1999.