

Génération de champs aléatoires de perméabilité pour les composites par méthodes à noyaux

Sami BEN ELHAJ SALAH¹, Rodolphe LE RICHE², Julien BRUCHON³,
Nicolas MOULIN³

¹ ONERA, DMAS, MS2, Châtillon, sami.ben-elhaj-salah@onera.fr

² Mines Saint-Étienne, Univ Clermont Auvergne, INP Clermont Auvergne, CNRS UMR 6158, LIMOS, F - 42023 Saint-Étienne, France, leriche@emse.fr

³ Mines Saint-Etienne, Univ Lyon, CNRS, UMR 5307 LGF, F - 42023 Saint-Étienne, France, {bruchon,nmoulin}@emse.fr

Résumé —

L'objectif de cette étude est de proposer de nouveaux noyaux pour des composites bidimensionnels selon un processus stochastique dans le cadre d'un problème d'écoulement. Plus précisément, le Processus Gaussien (PG) défini dans [1] a été revisité dans la première partie de ce papier en tenant compte de ses propriétés pour modéliser la génération d'un champ aléatoire de perméabilité pour la fabrication de composites à l'échelle macroscopique. Donc, on s'intéresse aux écoulements décrits par la loi de Darcy dans un milieu poreux.

Mots clés — Champ de perméabilité, Processus Gaussien, Méthodes à noyaux, Matériaux composites.

1 Introduction

Les procédés de fabrication de matériaux composites par voie liquide connaissent un succès grandissant dans le milieu industriel [2]. Cependant, une des difficultés de ces procédés réside dans la maîtrise de la phase d'imprégnation des fibres par la résine liquide. Les matériaux composites étant des structures intrinsèquement multi-échelle, les modélisations associées dépendent directement de l'échelle de représentation. Les travaux présentés dans cette étude sont réalisés à l'échelle macroscopique pour laquelle le matériau fibreux /poreux est considéré comme un milieu homogène équivalent. En conséquence, l'écoulement de la résine sera décrit par la loi de Darcy :

$$V = -\frac{K}{\mu} \cdot \nabla P \quad (1)$$

où μ est la viscosité du fluide et K le tenseur de perméabilité. Ce dernier caractérise la capacité du milieu à se laisser traverser par un fluide.

Les renforts fibreux peuvent présenter une variabilité locale de l'orientation des fibres et/ou de la fraction volumique des fibres. Cela entraîne une variabilité locale de la perméabilité du milieu [3, 4], ce qui peut affecter l'écoulement de la résine et in fine, les propriétés finales de la pièce élaborée. [5, 6], plusieurs auteurs ayant signalé des changements de perméabilité de plus de 50 % lorsque les tissus sont fortement cisailés [6, 7].

Dans ce contexte, l'objectif du présent papier est de générer des expériences virtuelles simulant des variations aléatoires de perméabilité à partir de peu de données (les essais expérimentaux ne sont pas triviaux à réaliser), puis de les utiliser pour apprendre à détecter ces variations locales à partir de mesures réalisables. Pour cet article, il est pratique de considérer un modèle d'écoulement de résine comme une correspondance entre les paramètres d'intérêt (ici, la perméabilité, K) et la vitesse V , ainsi que la pression P :

$$(K) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Direct}} \\ \xleftarrow{\text{Inverse}} \end{array} (V, P) \quad (2)$$

La description générale du modèle 2D est présentée dans la Figure 1, où chaque point à l'intérieur du carré correspond à une valeur différente de perméabilité, représentant ainsi les entrées de notre modèle.

Le problème direct consiste à évaluer les observations pour des valeurs données des paramètres K en effectuant des calculs par éléments finis. Cette première étape nous permet de construire une base de données. La résolution du problème inverse vise à trouver les paramètres (en l'occurrence, la perméabilité K) en fonction des données (ici, la pression P et la vitesse V).

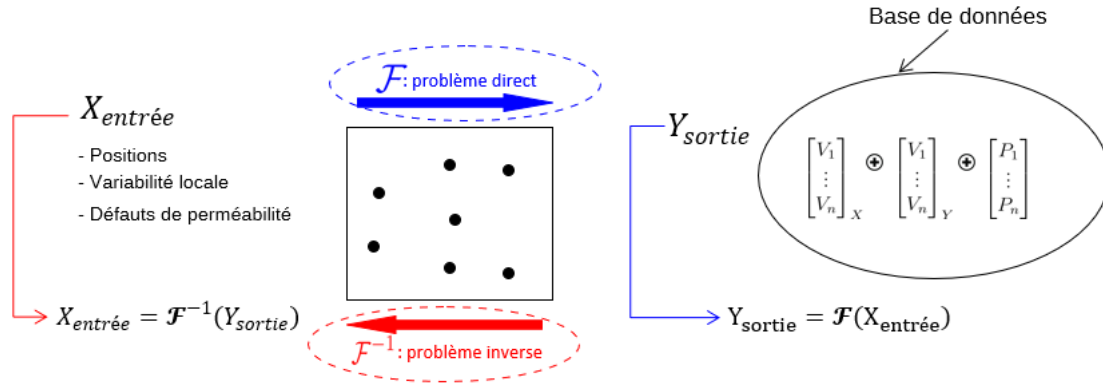


FIGURE 1 – Description générale du problème

Le PG est une approche populaire pour modéliser et paramétrer l'élaboration des matériaux composites par injection. Il a de nombreuses applications, telles que la capture d'une variation locale dans les directions de chaîne et trame. Le noyau présenté dans ce papier est basé sur une vitesse dans le cadre d'un écoulement de Darcy.

Dans ce travail, nous ne disposons pas d'une base de données contenant des milliers de champs de perméabilité expérimentaux décrits. Ensuite, nous effectuons une modélisation probabiliste du champ stochastique de perméabilité. Pour cela, on utilise une technique de **machine learning** pour les **small data**, telles que les processus gaussiens dont les noyaux sont choisis pour capturer les connaissances des experts (variabilité de perméabilité).

La première partie décrit brièvement le Processus Gaussien, ses paramètres et ses propriétés. La deuxième partie est dédiée à un noyau conçu pour la loi de Darcy.

2 Modèles d'écoulement stochastiques.

2.1 Processus Gaussien

Un Processus Gaussien (PG) est le paradigme le plus simple qui peut être utilisé pour décrire l'incertitude structurelle, avec des structures spatiales définies par des statistiques à deux points à travers des variogrammes ou des fonctions de covariance.

Un processus aléatoire $Y(x)$ sur $D \subset \mathbb{R}^d$ est dit gaussien si

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{X}^{n \times d}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} Y(x_1) \\ \dots \\ Y(x_n) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu(x), C) \quad (3)$$

Où $C_{ij} = Cov(Y(x_i), Y(x_j)) = C(x_i, x_j)$ dépend uniquement de x pour tous i et j entre 1 et n . Le nombre des points de l'espace d'entrée D (de dimension d) est représenté par n . La matrice de covariance C peut être écrite comme suit :

$$C = LL^T \quad (4)$$

L est obtenu à partir de la décomposition LU ou de Cholesky, tandis que le symbole \mathcal{N} représente la distribution normale. La distribution d'un Processus Gaussien est entièrement caractérisée par sa fonction moyenne $\mu(\cdot)$ définie sur D et sa fonction de covariance (ou noyau) $C(\cdot, \cdot)$ définie sur $D \times D$ par $C(x, x') = Cov(Y(x), Y(x'))$ où x et x' représentent deux points quelconques. Il est intéressant de noter que le noyau satisfait la propriété de symétrie $C(x, x') = C(x', x)$ et il est semi-défini positif (sdp, see Eq. (5)).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_i \in D, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j C(x_i, x_j) \geq 0 \quad (5)$$

De plus, toute fonction symétrique semi-définie positive peut être considérée comme la covariance d'un processus gaussien. Cette équivalence est connue sous le nom de théorème de Loeve. De nombreuses fonctions semi-définies positives sont données par Le Riche et al. dans [1]. Dans le présent travail, le noyau gaussien donné par l'équation (6) est d'abord présenté dans le contexte de la transformation du noyau, puis appliqué dans tous les modèles en raison des faibles variations de perméabilité. Cependant, le raisonnement s'applique à tous les noyaux qui dépendent d'une distance, tels que Matern (3/2 et 5/2) et Exponential.

$$C(x, x') = \sigma^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \|x - x'\|_{\theta}^2\right) \quad (6)$$

Où

$$\|x - x'\|_{\theta} = \left(\sum_{i=1}^d \frac{(x_i - x'_i)^2}{\theta_i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Le paramètre σ^2 est appelé la **variance** et θ_i est la **longueur d'échelle**. La forme factorisée générale du noyau est donnée par :

$$C(x, x') = \sigma^2 r(x, x'), \quad r(\cdot, \cdot) : \text{fonction de corrélation} \quad (8)$$

2.2 Méthodes à noyaux

Diverses opérations peuvent être appliquées au noyau tout en maintenant sa propriété semi-définie positive, telles que l'addition, la multiplication et la composition avec une fonction. Ces propriétés sont présentées ci-dessous :

— Addition

a) Sur le même espace $C(x, x') = C_1(x, x') + C_2(x, x')$

b) Sur l'espace tensoriel $C(x, x') = C_1(x_1, x'_1) + C_2(x_2, x'_2)$

— Multiplication

a) Sur le même espace $C(x, x') = C_1(x, x') \times C_2(x, x')$

b) Sur l'espace tensoriel $C(x, x') = C_1(x_1, x'_1) \times C_2(x_2, x'_2)$

— Composition avec une fonction

Soit C_1 un noyau sur $D_1 \times D_1$ et f une fonction arbitraire de $D \rightarrow D_1$, alors

$$C(x, x') = C_1(f(x), f(x')) \quad (9)$$

est un noyau sur $D \times D$ et C correspond à la covariance de $C(x) = C_1(f(x))$. Cela peut être vu comme une mise à l'échelle (non linéaire) de l'espace d'entrée.

Le noyau donné par l'équation (10) est valide et peut être vu comme $C_1(\cdot, \cdot) \times$ une composition d'une fonction et un noyau linéaire. On peut le considérer comme la covariance de $Y(x) = f(x)Y_1(x)$.

$$C(x, x') = f(x)f(x')C_1(x, x') \quad (10)$$

3 Noyau pour l'écoulement de Darcy

3.1 Noyau basé sur la vitesse

En ce qui concerne la loi de Darcy (équation (1)), nous notons que le champ de vitesse est associé aux gradients de pression (c'est-à-dire à la variation locale de pression), ce qui est la cause du changement

d'une résistance locale, comme le déplacement des fibres. Pour cette raison, on s'attend à une grande variabilité de la perméabilité dans les régions exposées à des valeurs élevées de vitesse. Dans cette section, en combinant la loi de Darcy et la propriété de transformation citée ci-dessus, équation (10), un nouveau noyau est proposé en considérant $f(x) = \|V(x)\|$ et $f(x') = \|V(x')\|$. Cela suggère que :

$$C(x, x') = \|V(x)\| \|V(x')\| \widetilde{C}_1(x, x') \quad (11)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Le symbole $\widetilde{\cdot}$ représente la version mise à l'échelle. Le choix de ce noyau composé est basé sur la loi de Darcy (voir l'équation (1)). Dans cette section, nous considérons une modélisation 2D. Ensuite, θ_i présenté dans l'équation (7) $\in \{\theta_x, \theta_y\}$. Le triplet $(\sigma, \theta_x, \theta_y)$ est égal à $1e05, 0.5$ et 0.5 , respectivement. Ce choix peut s'expliquer par le fait que ces valeurs nous permettent d'obtenir une valeur de perméabilité standard qui sera utilisée dans les simulations numériques présentées dans la sous-section suivante.

3.2 Application et résultats

Considérons maintenant le cas d'un écoulement purement radial, réduit à un quart de la structure sur la Figure 2 du fait de l'axi-symétrie du problème. Compte-tenu des conditions de symétrie, les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

$$V(x=0).n = V(y=0).n = 0 \quad (12)$$

Elles sont complétées par des conditions sur la pression. Une pression extérieure $P_e = 0$ tandis que la pression intérieure $P_i = 1 \text{ bar}$ (voir Figure 2 (a)).

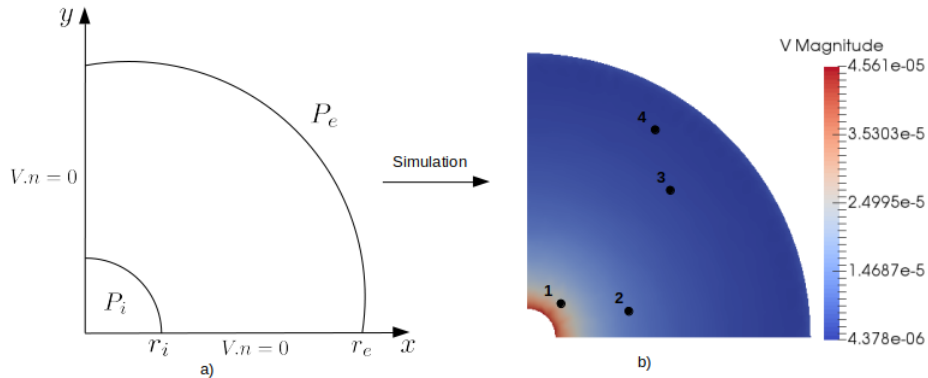


Fig. 2 – a) : Géométrie et conditions aux limites d'un écoulement radial, b) : Simulation de l'écoulement de Darcy.

Dans cette sous-section, nous simulons une trajectoire d'un échantillon du champ de perméabilité en utilisant l'équation (11). Nous choisissons quatre points (voir Figure 2 (b)). Ensuite, nous étudions leurs corrélations et covariances correspondantes.

La Figure 3 (a) montre que le point 1 et 2, respectivement 3 et 4 sont très corrélés avec deux coefficients de corrélation $R_1 = 0.83$ et $R_2 = 0.94$, respectivement. Cela signifie que la perméabilité dans les zones 1 et 2, respectivement 3 et 4, varie de la même manière. Les corrélations entre tous les autres couples de points sont présentées dans la matrice de corrélation. Par exemple, nous notons par R_3 le coefficient de corrélation entre 1 et 4. Il est égal à 0.5 . Cette valeur plus faible s'explique par la distance significative entre les deux points. La Figure 3 (b) montre que les points 1 et 4 correspondent respectivement à la valeur maximale et minimale de la variance (13 et 1.9). Ensuite, nous pouvons remarquer que lorsque la vitesse de l'écoulement est élevée, cela correspond à des zones de gradient de pression élevé. Ces régions se caractérisent par une variabilité locale élevée de la perméabilité et la présence de défauts macroscopiques dans la structure de renforcement.

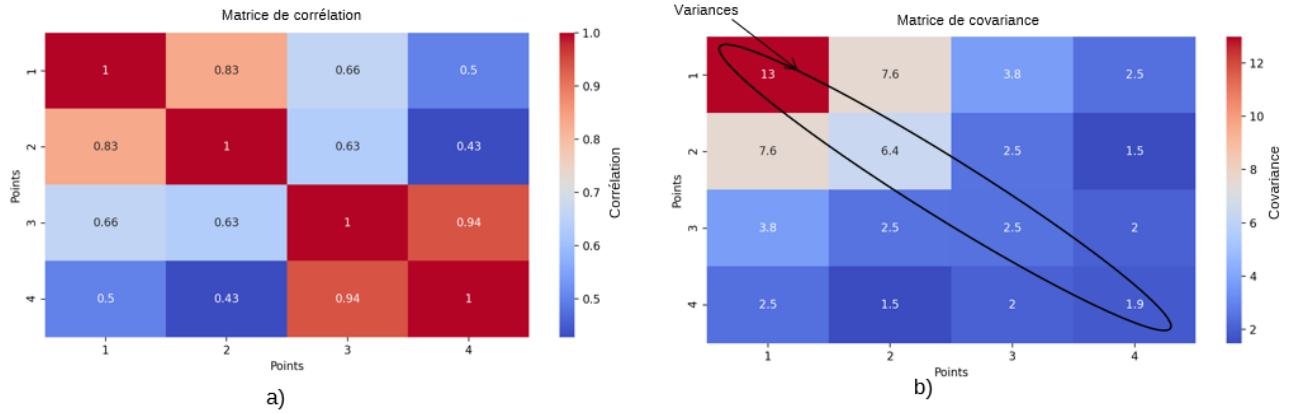


Fig. 3 – a) : Matrice de corrélation, b) : Matrice de covariance.

Nous notons par $Y(x) = \mu(x) + L\varepsilon$ la trajectoire du Processus Gaussien qui présente un échantillon d'un champ de perméabilité. La Figure 4 montre quelques exemples de la distribution de champ de perméabilité gaussien et leurs positions respectives du fronts de fluide à un instant donné (pour la définition du front de fluide, voir thèse [8]). Toutes les simulations présentées ci-dessous sont réalisées par **Coeur** : librairie de simulation par éléments finis, développée en C++ dans un environnement parallèle à l'École des Mines de Saint-Étienne.

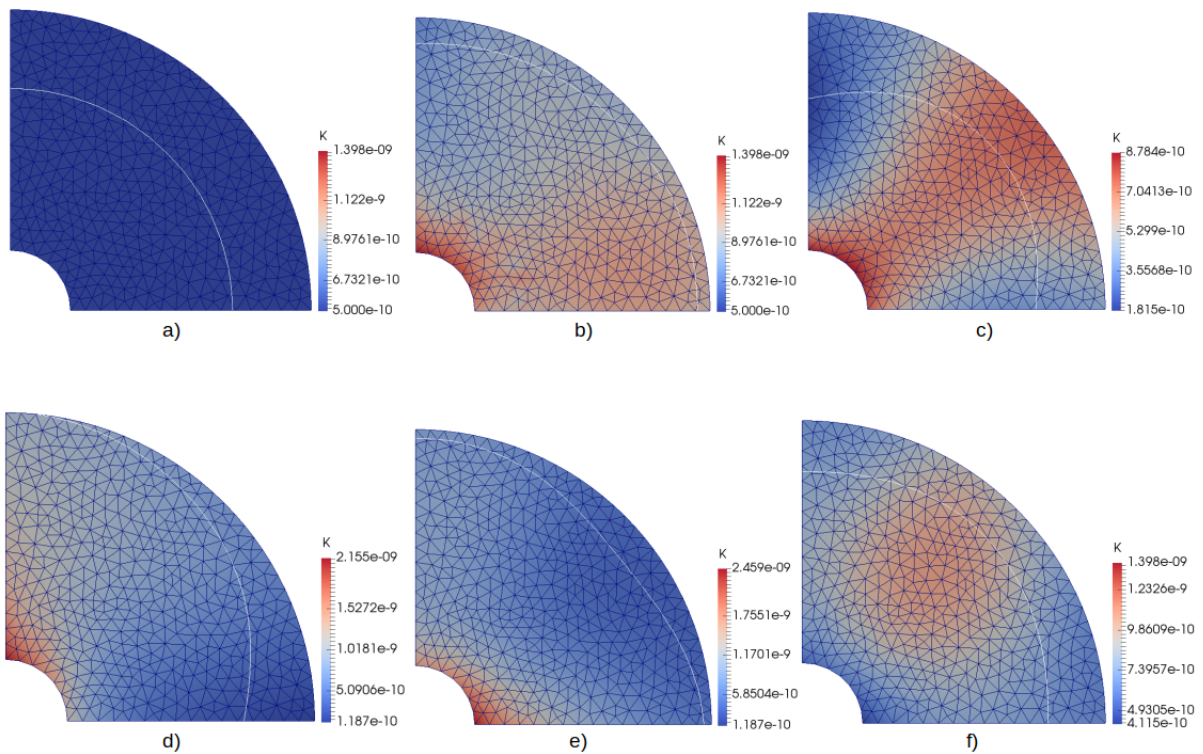


Fig. 4 – Simulation de l'écoulement radial et positions du front de fluide a :) Champ de perméabilité constant, b) à f) : Distribution Gaussienne du champ de perméabilité.

4 Conclusions

Dans cet article, nous avons introduit un nouveau noyau pour les composites bidimensionnels à l'échelle macroscopique et pour les structures aléatoires. Plus précisément, nous avons développé une méthode de génération de champs aléatoires de perméabilité. Nous avons débuté par une exposition générale du Processus Gaussien, en mettant en avant certaines de ses propriétés fondamentales. Ensuite, nous avons appliqué ce processus au contexte de l'écoulement de Darcy.

Ce modèle nous permet non seulement de capturer les variabilités locales de perméabilité, mais ouvre également des perspectives. Le problème direct nous permet de constituer une base de données robuste, jetant ainsi les bases pour des études futures visant à prédire le champ de perméabilité. De plus, dans le cadre de nos futures recherches, nous prévoyons de modéliser une perturbation locale de la préforme α . La résolution du problème inverse (comme illustré dans la Figure 1) offre de nouvelles opportunités pour aborder des questions liées à l'amélioration et l'optimisation du processus de fabrication des pièces en composite fibreux par injection.

Références

- [1] R. Le Riche, N. Durrande. *An overview of kriging for researchers*, Doctoral. Porquerolles, France, 2009.
- [2] M. Blais, N. Moulin, P.-J. Liotier, S. Drapier. *Resin infusion-based processes simulation : coupled Stokes-Darcy flows in orthotropic preforms undergoing finite strain*, International Journal of Material Forming, Springer, 43-54, 2017.
- [3] A. Endruweit, A. C. Long. *Influence of stochastic variations in the fibre spacing on the permeability of bi-directional textile fabrics*, Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, Elsevier, 679-694, 2006.
- [4] M. Y. Matveev, F. G. Ball, I. A. Jones, A. C. Long, P. J. Schubel, M. Tretyakov *Uncertainty in geometry of fibre preforms manufactured with automated dry fibre placement and its effects on permeability*, Journal of Composite Materials, SAGE Publications Sage UK : London, England, 2255-2269, 2018.
- [5] H.-y. Zhu, D.-H. Li, D.-X. Zhang, B.-C. Wu, Y.-y. Chen. *Influence of voids on interlaminar shear strength of carbon/epoxy fabric laminates*, Transactions of Nonferrous Metals Society of China, Elsevier, s470-s475, 2009.
- [6] S. Mukhopadhyay, M. I. Jones, S. R. Hallett. *Compressive failure of laminates containing an embedded wrinkle; experimental and numerical study*, Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, Elsevier, 132-142, 2015.
- [7] C. Wong, A. Long, M. Sherburn, F. Robitaille, P. Harrison, C. Rudd *Comparisons of novel and efficient approaches for permeability prediction based on the fabric architecture*, Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, Elsevier, 847-857, 2006.
- [8] M. Blais. *Modélisation et suivi du procédé par infusion de résine sur une nouvelle génération de renforts structuraux pour l'aéronautique*, Thèse de doctorat. Lyon, 2016.