

Apprentissage automatique d'EDPs contraintes par la physique pour l'identification des hétérogénéités dans les structures mécaniques élastiques

R. Ferrier¹, M. L. Kadri², S. Drapier¹, P. Gosselet³

¹ Mines Saint-Etienne, Univ Lyon, CNRS, UMR 5307 LGF, {renaud.ferrier,sylvain.drapier}@emse.fr

² École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Univ Tunis El Manar, LAMSIN, mohamedlarbi.kadri@enit.utm.tn

³ Univ Lille, CNRS, UMR 9013 LaMcube, pierre.gosselet@univ-lille.fr

Résumé — On propose une méthode d'identification automatique d'EDPs hétérogènes en espace dont l'application visée est le contrôle non-destructif des structures mécaniques à partir de sollicitations en dynamique basse fréquence. Cette méthode reprend le principe d'approches récentes de construction automatique de modèles mathématiques [1, 2, 3] en introduisant la possibilité d'intégrer des hétérogénéités en espace. Le problème d'identification résultant est mal posé, il est résolu en introduisant le concept de régularisation parcimonieuse (*sparse regularization*).

Mots clés — apprentissage automatique d'EDPs, identification parcimonieuse, variation totale, optimisation, dynamique des poutres de Timoshenko, problème inverse.

Introduction

L'identification de défauts localisés est une question phare dans le domaine du contrôle des pièces mécaniques, que ce soit lors de leur élaboration ou durant leur utilisation. Dans ce contexte, la reconstruction de champs de propriétés physiques est un moyen d'imager ces défauts sous la forme de zones dans lesquelles lesdites propriétés physiques sont modifiées.

En contrôle non-destructif, on considère classiquement que la longueur d'onde du phénomène physique observé par la mesure impose l'ordre de grandeur de taille minimale du défaut que l'on peut identifier. La conséquence en est que la dynamique basse-fréquence (quelques dizaines de Hz ou moins), ou pire, la statique, ne sont pas très propices à l'identification. Pourtant, des approches mathématiques basées sur le concept de l'approximation parcimonieuse ont permis, pour certaines méthodes de contrôle existantes comme la tomographie d'impédance électrique ou l'imagerie sismique, de dépasser cette limitation liée à la longueur d'onde de l'excitation [4, 5].

Un autre obstacle à l'identification de défauts quelconques est la nécessité de choisir le ou les paramètres physiques que l'on veut imager, et dont une altération sera la signature du défaut recherché. On comprend alors que la présence dans la pièce contrôlée d'un défaut non représentable à l'aide des paramètres choisis risque de mettre en échec la procédure. C'est pour cette raison qu'on propose non pas d'identifier quelques paramètres d'un modèle connu, mais plutôt de mettre à profit des méthodes d'identification de l'ensemble de l'équation aux dérivées partielles (EDP) régissant la réponse de la pièce à la sollicitation [1, 2] ou la relation de comportement entière [3], ce qui relève du même principe. Notons qu'en pratique, l'EDP ou la relation de comportement identifiée sera définie à partir d'une bibliothèque de termes élémentaires, et qu'il s'agit en fait bien d'identifier les paramètres que sont les poids de chacun de ces termes dans le modèle. La différence avec l'identification de quelques paramètres, classique dans le domaine des problèmes inverses, réside dans le nombre de ces paramètres, qui peut être arbitrairement grand.

Il a été choisi dans cette contribution d'appliquer la procédure que nous proposons à l'identification de portions altérées d'une poutre encastree-libre sollicitée dynamiquement par un effort de flexion en son extrémité. Pour le moment, les mesures sont synthétiques et ont été obtenues en bruitant artificiellement la solution d'un calcul par éléments finis.

1 Architecture du modèle et résolution numérique

On cherche à construire un modèle capable de prévoir la réponse mécanique de tous les points matériels d'une poutre console soumise à un effort de flexion $F_L(t)$ à son extrémité libre (voir Figure 1). Les variables observables d'un tel modèle sont les champs scalaires unidimensionnels suivants : le déplacement transverse à la fibre neutre $u(x, t)$ et la rotation de la section $\theta(x, t)$. On écarte d'emblée l'utilisation de variables internes inconnues (endommagement, variables d'écouissage, etc.) en supposant que si elles existent, elles n'évolueront pas au cours de l'essai, ce qui est une hypothèse raisonnable dans le cadre du contrôle non-destructif.

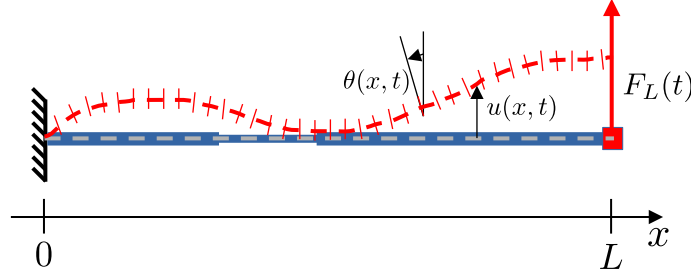


FIGURE 1 – Schéma de la poutre étudiée

On introduit les notations suivantes pour les dérivées par rapport à x et à t d'une fonction $f(x, t)$:

$$\dot{f} := \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad f' := \frac{\partial f}{\partial x}$$

1.1 Équilibre et relation de comportement

Les équations considérées comme fiables sont celles de l'équilibre dynamique de chaque point matériel de la poutre. Celles-ci prennent la forme du système (1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} T' - p = \alpha \ddot{u} \quad \text{sur } (0; L) \times (0; T] \\ M' + T = \beta \ddot{\theta} \quad \text{sur } (0; L) \times (0; T] \\ u(0, \bullet) = 0 \quad \text{sur } (0; T] \\ \theta(0, \bullet) = 0 \quad \text{sur } (0; T] \\ T(L, \bullet) = F_L \quad \text{sur } (0; T] \\ M(L, \bullet) = 0 \quad \text{sur } (0; T] \\ u(\bullet, 0) = 0 \quad \text{sur } (0; L) \\ \theta(\bullet, 0) = 0 \quad \text{sur } (0; L) \\ \dot{u}(\bullet, 0) = 0 \quad \text{sur } (0; L) \\ \dot{\theta}(\bullet, 0) = 0 \quad \text{sur } (0; L) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \text{ est l'effort linéique} \\ T \text{ est l'effort tranchant} \\ M \text{ est le moment fléchissant} \\ \alpha \text{ est l'inertie de translation} \\ \beta \text{ est l'inertie de rotation} \end{array} \right. \quad (1)$$

Ce système peut être « fermé » une fois que les fonctions p , T et M ont été réécrites en fonction de u , θ et de leurs dérivées, et que les scalaires α et β ont été imposés. Physiquement, la relation entre (T, M) et (u, θ) constitue la relation de comportement du modèle de poutres.

Comme pour les méthodes d'identification de la littérature, l'approche que l'on propose repose sur le choix a priori d'un dictionnaire le plus exhaustif possible de fonctions élémentaires qui vont permettre de construire p , T et M . Dans le cas présent, on fait des hypothèses de type viscoélasticité sur les dépendances de p , T et M , basées sur la cinématique des poutres et données dans l'équation (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x, t; \{h_{0,ij}\}) = H_0(u(x, t), \dot{u}(x, t); \{h_{0,ij}\}) \\ T(x, t; \{h_{1,ij}\}) = H_1(u'(x, t) - \theta(x, t), \dot{u}'(x, t) - \dot{\theta}(x, t); \{h_{1,ij}\}) \\ M(x, t; \{h_{2,ij}\}) = H_2(\theta'(x, t), \dot{\theta}'(x, t); \{h_{2,ij}\}) \end{array} \right. \quad (2)$$

Pour ce qui est de la forme des fonctions $\{H_k\}_{k=0,1,2}$ elles-mêmes, il a été choisi d'utiliser une bibliothèque de monômes (comme fait dans [1]) puisque les fonctions polynomiales ont la capacité théorique de converger uniformément vers n'importe quelle fonction analytique. On a alors :

$$\forall k = 0, 1, 2, \quad H_k(a, \dot{a}; \{h_{k,ij}\}) = \sum_{i=0, j=0}^{i+j \leq P} h_{k,ij} a^i \dot{a}^j \quad (3)$$

où P est l'ordre du modèle. On pourrait d'ailleurs imaginer avoir trois entiers distincts $\{P_k\}_{k=0,1,2}$.

Dans le cas où $P > 1$, on a affaire à une réponse non-linéaire par rapport aux variables observables (mais toujours quoi qu'il arrive linéaire par rapport aux paramètres $\{h_{k,ij}\}$). Pour résoudre les équations différentielles résultantes, il a été choisi d'utiliser une discrétisation par éléments finis de Lagrange d'ordre 2 en espace pour les deux champs u et θ , associée à la méthode d'intégration temporelle de Newmark à accélération moyenne. Les non-linéarités sont résolues à l'aide d'un schéma de Newton. Notons que ces choix ont été faits car ils conduisent à une méthode robuste, même si elle est plutôt coûteuse en temps de calcul.

Tout comme celle du choix du solveur, la question de la pertinence d'utiliser un modèle non-linéaire dans le contexte du contrôle non-destructif mérite d'être posée, mais elle ne sera pas abordée dans cette contribution.

Dans le cadre non-linéaire, le nombre de paramètres à identifier peut être arbitrairement grand. C'est à ce stade qu'intervient la notion de parcimonie (*sparse*) : afin de faciliter l'interprétabilité physique du résultat, et aussi pour tout simplement faire en sorte que l'algorithme parvienne à un résultat non-aberrant, on impose que le plus grand nombre possible de termes soient nuls. Cet aspect est traité dans la section 2.3.

1.2 Représentation des inhomogénéités

En présence d'hétérogénéités, la relation de comportement (3) devient dépendante de la variable d'espace x . On se retrouve donc à devoir faire dépendre chacun des paramètres ($\{h_{k,ij}\}, \alpha, \beta$) de cette variable d'espace. Cette relation reste à préciser, on introduit tout d'abord la notation formelle suivante :

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} \{h_{k,ij}(x)\} \\ \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}$$

Une fois le problème discrétisé par éléments finis, on se retrouve avec une valeur différente de π en chacun des points de Gauss du maillage. Identifier tous ces paramètres à partir des données conduirait à un problème mathématique extraordinairement mal conditionné. Il présenterait également l'inconvénient de ne pas permettre d'identifier le défaut lui-même, mais un très grand nombre de champs de paramètres à la signification physique mal contrôlée.

Il a donc été choisi d'exprimer le champ de paramètres sous une forme séparée, qui présente deux avantages, celui du conditionnement et celui de l'interprétabilité, mais un inconvénient, à savoir devoir choisir le nombre de modes utilisés, qui définit le nombre de défauts de nature différente identifiables. Dans la contribution présente, nous allons limiter ce nombre à 1, et écrire le champ de paramètres sous la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \{h_{k,ij}\}(x) \\ \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}}_{\pi(x)} = (1 - \bar{\eta}(x)) \underbrace{\begin{pmatrix} \{h_{k,ij}\}_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}}_{\pi_0} + \bar{\eta}(x) \underbrace{\begin{pmatrix} \{h_{k,ij}\}_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}}_{\pi_1} \quad (4)$$

Dans la suite, $\bar{\eta}$ sera appelé « champ indicateur du défaut » car dans le cas d'un défaut uniforme, il prendra la valeur de 1 à l'intérieur de celui-ci, et 0 à l'extérieur. En conséquence, π_0 est l'ensemble de paramètres relatif au matériau sain et π_1 est celui relatif au défaut.

Remarque : Comme indiqué précédemment, le champ $\bar{\eta}$ est défini aux points de Gauss d'un maillage éléments finis. Dans la pratique, il paraît raisonnable de se contenter d'une représentation uniforme par élément, ce qui simplifierait certains calculs à la fois du point de vue théorique et du coût algorithmique.

Dans la contribution présente, ce champ est cependant bien défini indépendamment en chaque point de Gauss afin de garder le plus de généralité possible.

2 Problème d'identification et régularisation

À ce stade, on a besoin d'identifier à partir des données un certain nombre de paramètres « macroscopiques » regroupés dans π_0 et π_1 , ainsi que le vecteur η regroupant les valeurs du champ scalaire $\bar{\eta}$ aux points de Gauss d'un maillage éléments finis. Par commodité, nous allons regrouper toutes ces inconnues dans le vecteur ξ défini par l'équation 5. Pour bien marquer la dépendance de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ en certains des termes de ξ (voir équation (4)), nous noterons, au prix d'un léger abus de notation, $\alpha(\xi)$ et $\beta(\xi)$.

$$\xi = (\{h_{k,ij}\}_0 \quad \alpha_0 \quad \beta_0 \quad \{h_{k,ij}\}_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \eta^T)^T \quad (5)$$

2.1 Écart à l'équilibre

L'approche proposée par [1] et [3], mais qui est aussi celle de la méthode des champs virtuels [6] (ici, les champs virtuels en question seraient tous les champs-tests éléments finis) consiste, une fois adaptée à notre problème particulier, à chercher ξ assurant les égalités suivantes au mieux au sens de la minimisation :

$$\begin{cases} \forall u^* \in \mathcal{U}_0^h, \int_{t=0}^T \int_{x=0}^L (T_m(\xi) (u^*)' + p_m(\xi) u^* + \alpha(\xi) \ddot{u}_m u^*) dx dt = \int_{t=0}^T F_L(t) u^*(L, t) dt \\ \forall \theta^* \in \mathcal{T}_0^h, \int_{t=0}^T \int_{x=0}^L (M_m(\xi) (\theta^*)' - T_m(\xi) \theta^* + \beta(\xi) \theta^* \ddot{\theta}_m) dx dt = 0 \end{cases} \quad (6)$$

où p_m , T_m et M_m sont obtenus via l'équation (2) à partir de u_m et θ_m , qui sont les champs u et θ mesurés, sans que l'on se pose pour l'instant la question de la faisabilité de telles mesures. \mathcal{U}_0^h et \mathcal{T}_0^h sont les espaces dans lesquels u et θ sont recherchés dans la formulation éléments finis utilisée.

Cette approche présente l'avantage de la simplicité et de la faible complexité algorithmique, malgré les non-linéarités. Dans le cas qui nous occupe ici, il n'y a pas linéarité à cause des produits présents dans l'équation (4), qui multiplient certains termes de ξ entre eux. Des essais préliminaires ont montré que l'on pouvait néanmoins résoudre ce problème à l'aide d'un point fixe à trois niveaux résolvant alternativement des problèmes linéaires sur η , π_0 et π_1 .

Une limite de cette approche réside dans la nécessité de dériver les champs u_m et θ_m plusieurs fois par rapport au temps et à l'espace. Dans le cas où ces champs sont bruités, ces opérations de dérivation doivent être régularisées, ce qui cause une inévitable perte d'information qui risque d'être fatale à notre ambition d'identifier des champs avec la meilleure résolution possible.

Mais la limite principale pour notre cas est la nécessité de connaître u_m et θ_m sur l'ensemble du domaine et à tout instant. Si c'est envisageable relativement facilement pour u_m , la mesure de θ_m soulève d'autres problèmes qui peuvent être levés en recourant à de la corrélation d'images haute résolution, en utilisant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli ($\theta_m = u_m'$), etc. Ceci sort du cadre de cette contribution.

2.2 Écart à la mesure

Pour contourner ces limitations, on s'intéresse à une autre approche, elle aussi très populaire, utilisée par [2] et plus classiquement dans le cadre de la méthode FEMU [7]. Il s'agit de minimiser l'écart aux mesures en norme euclidienne sous la contrainte du respect de l'équation aux dérivées partielles :

$$\min_{\substack{u, \theta, \xi \\ (u, \theta) \text{ respecte (1)}}} \frac{1}{2} \|\Pi u - u_m\|_2^2$$

où Π est le projecteur qui extrait le champ u uniquement aux points de mesure (ou bien qui effectue les opérations de moyenne lorsqu'il s'agit d'une mesure non-ponctuelle).

Ce problème se résout en recherchant les points stationnaires d'un Lagrangien à l'aide d'une méthode de descente de gradient (ou dérivée, comme BFGS ou le Gradient Conjugué). Ceci conduit à devoir résoudre le système différentiel (1) (dynamique non-linéaire) ainsi qu'un système différentiel adjoint (dynamique linéaire en temps inversé) à chaque pas. L'inconvénient principal de cette approche est son coût en ressources de calcul. En revanche, imposer que u et θ respectent le système différentiel ajoute un caractère régularisant qui fait défaut au problème (6).

Ici, la précision de la méthode peut être compromise lorsque les conditions aux limites de Dirichlet sont mal connues (encastrement de la poutre non-total). Ceci a été mis en évidence notamment dans [8]. Pour surmonter cette difficulté, certains auteurs [9, 10, 8] se sont intéressés à des méthodes à équations d'état et adjointe couplées (comme l'Erreur en Relation de Comportement modifiée). Cet aspect, même s'il est primordial en pratique, sera ignoré dans cette contribution car, dans le cadre des problèmes dynamiques, la résolution d'une équation directe (en temps direct) et adjointe (en temps inverse) couplées est en soi un problème loin d'être trivial [9].

2.3 Régularisation

Le problème d'identification de coefficients d'une EDP à partir des champs obéissant à cette EDP est connu pour être bien souvent mal posé. De surcroît, dans le cas présent, le nombre d'inconnues que l'on cherche à identifier peut être supérieur à celui des données dont on dispose. La conséquence est qu'il est nécessaire de contraindre la forme de la solution pour que celle-ci soit unique si elle existe.

L'idée est de pénaliser les écarts de π_0 et π_1 à une valeur de référence plausible π_r obtenue à partir de la relation de comportement théorique du matériau sain. Ces écarts seront mesurés au sens d'une distance notée d_π , et pondérés par un paramètre positif μ_π . On fait de même pour le champ indicateur η , comparé à un champ de référence η_r (nul dans notre cas).

$$\min_{\substack{u, \theta, \xi \\ (u, \theta) \text{ respecte (1)}}} \frac{1}{2} \|\Pi u - u_m\|_2^2 + \mu_\pi (d_\pi(\pi_0, \pi_r) + d_\pi(\pi_1, \pi_r)) + \mu_\eta d_\eta(\eta, \eta_r) \quad (7)$$

Dans cette contribution, on explorera deux choix pour d_π et d_η . Le premier choix consiste à construire ces distances à partir de la norme Euclidienne (quadratique), et le second choix se base sur une norme 1 (somme des valeurs absolues des termes du vecteur).

$$\begin{cases} d_{\pi,2}(\pi, \pi_r) &= \frac{1}{2} \|\pi - \pi_r\|_2^2 \\ d_{\eta,2}(\eta, \eta_r) &= \frac{1}{2} \|G(\eta - \eta_r)\|_2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} d_{\pi,1}(\pi, \pi_r) &= \|\pi - \pi_r\|_1 \\ d_{\eta,1}(\eta, \eta_r) &= \|G(\eta - \eta_r)\|_1 \end{cases}$$

G est l'opérateur calculant le gradient d'un champ scalaire discret.

Le terme $d_{\eta,2}$ est l'équivalent discret de la norme L_2 du gradient. On le qualifiera dans la suite de terme de régularisation H^1 . Le terme $d_{\eta,1}$ quant à lui est l'équivalent discret de la norme L_1 du gradient. On le qualifiera de terme de régularisation de Variation Totale (TV).

Les termes basés sur la norme 1 sont connus pour favoriser le caractère creux (ou sparse) du vecteur solution [11]. En revanche, la minimisation d'une fonction-coût comprenant un tel terme demande un soin particulier en raison du caractère non-dérivable de la valeur absolue. Ce point sera discuté lors du colloque.

Remarquons enfin que l'identification conjointe de paramètres macroscopiques π et de champs η , même si elle peut paraître complexe au premier abord, ne pose pas de problème particulier lorsque l'on utilise une méthode de régularisation adaptée, et une fois que l'on a équilibré le poids des contributions des différents termes dans le gradient [12].

3 Exemple de résultat d'identification

Pour illustrer le fonctionnement de la méthode, on va identifier une réduction locale de la section (représentée sur la figure 1) d'une poutre dans le cadre linéaire ($P = 1$). Les mesures sont générées par un calcul éléments finis et bruitées artificiellement. En raison du nombre raisonnable de paramètres

macroscopiques π à identifier, et afin de simplifier l'exemple proposé, il a été choisi de ne pas régulariser ces paramètres, c'est-à-dire de fixer $\mu_\pi = 0$ dans l'équation (7).

La poutre étudiée est de longueur 300 mm , sa section est rectangulaire, de hauteur 4 mm et de largeur 30 mm . Le matériau a un module d'Young de 2500 MPa , un coefficient de Poisson de 0.3 et une masse volumique de $1450 \cdot 10^{-9}\text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3}$ (polystyrène). Le coefficient de frottement fluide de l'air sur la poutre est pris égal à $1 \cdot 10^{-4}\text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{mm}^{-3}$. Entre les abscisses 90 et 150 mm , la poutre a une restriction d'épaisseur dans laquelle la hauteur de sa section vaut 3.1748 mm (ce qui conduit à une raideur de flexion divisée par 2). Cette restriction de section est le défaut que l'on cherche à identifier. La sollicitation est un effort sinusoïdal d'amplitude 1 N et de période 0.5 s .

On suppose que l'on est capable de mesurer la flèche $u(x, t)$ en chacun des 100 pas de temps du calcul direct et en 60 points équi-répartis le long de la poutre, avec un bruit blanc gaussien de 10% . Une fois la procédure mise en œuvre, on identifie le champ indicateur de défaut η et les paramètres π_0 et π_1 . Les champs η obtenus en utilisant la régularisation H^1 ou TV sont comparés à la forme de référence sur la figure 2.

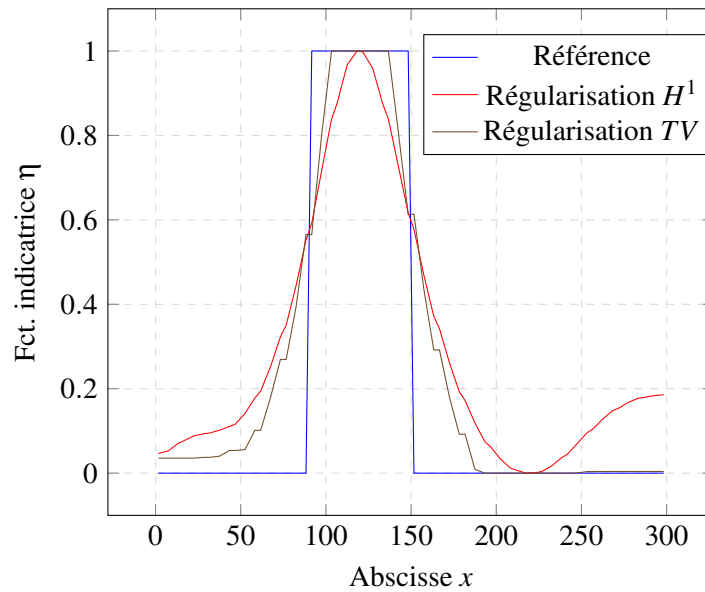


FIGURE 2 – Identification des fonctions indicatrices de défaut dans le cas où les mesures ont été bruitées avec un bruit blanc gaussien synthétique d'amplitude 10%

On observe que la régularisation TV autorise les discontinuités du gradient de la fonction indicatrice, et tend même à permettre des sauts. À l'inverse, la régularisation H^1 lisse bien plus le champ solution, ce qui, dans le cas présent, l'éloigne de la solution de référence. Notons que le cas-test choisi est favorable à la régularisation par Variation Totale puisque le champ de référence lui-même est discontinu.

Le tableau 1 compare pour les deux variantes (H^1 et TV) la raideur de flexion identifiée. Bien évidemment, les autres paramètres (10 dans le cas linéaire) sont également identifiés, mais il a été choisi de ne pas les afficher ici afin de ne pas surcharger le tableau.

TABLE 1 – Raideur de flexion $h_{2,10}$ identifiée

	$\pi_0^{H^1}$	$\pi_1^{H^1}$	π_0^{TV}	π_1^{TV}	π_0^{ref}	π_1^{ref}
Raideur de flexion (Nmm^2)	4.290e5	1.732e5	3.998e5	2.060e5	4e5	2e5

On observe à nouveau que la régularisation TV permet d'obtenir de meilleurs résultats (alors qu'elle ne porte pas directement sur π). Ceci est une conséquence de la meilleure reconstruction du champ η .

Conclusion

On a proposé une approche combinant des concepts et algorithmes issus des domaines des problèmes inverses, de la représentation parcimonieuse (*sparse representation*) et de l'apprentissage automatique de modèles. On a montré, à partir d'un exemple numérique, que cette approche permettait d'identifier une zone défectueuse dans une structure élancée à partir de mesures cinématiques sous un chargement dynamique connu.

Lors du colloque, davantage d'éléments seront donnés sur deux aspects notamment. D'abord, on traitera de considérations théoriques et techniques indispensables à la mise en œuvre pratique de la méthode (convexité, non-unicité de la solution, définie-positivité du comportement tangent, solveur direct, méthode d'optimisation etc.). Ensuite, on présentera davantage de résultats numériques permettant d'évaluer le comportement de la méthode vis-à-vis de la quantité de données à disposition, du bruit ou de la présence de non-linéarités.

Notons que cette contribution ouvre de nombreuses perspectives. La première d'entre elles est la confrontation à des mesures réelles, qui est envisageable relativement facilement dans le cadre des poutres, et qui est d'ailleurs en cours de mise au point. Des travaux ultérieurs devront également s'attacher aux limites de la méthode, notamment à son fort coût en temps de calcul et à sa sensibilité vis-à-vis des conditions aux limites. Il faudra d'autre part s'intéresser en profondeur aux heuristiques de régularisation et d'optimisation permettant d'avoir une identification robuste, efficace et rigoureuse.

Références

- [1] S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the national academy of sciences*, 113(15) :3932–3937, 2016.
- [2] M. Raissi and G. E. Karniadakis. Hidden physics models : Machine learning of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 357 :125–141, 2018.
- [3] M. Flaschel, S. Kumar, and L. De Lorenzis. Automated discovery of generalized standard material models with EUCLID. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 405 :115867, 2023.
- [4] S. Ma, W. Yin, Y. Zhang, and A. Chakraborty. An efficient algorithm for compressed mr imaging using total variation and wavelets. In *2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1–8. IEEE, 2008.
- [5] A. Y. Anagaw and M. D. Sacchi. Edge-preserving seismic imaging using the total variation method. *Journal of Geophysics and Engineering*, 9(2) :138–146, 2012.
- [6] M. Grediac, F. Pierron, S. Avril, and E. Toussaint. The virtual fields method for extracting constitutive parameters from full-field measurements : a review. *Strain*, 42(4) :233–253, 2006.
- [7] P. Ienny, A.-S. Caro-Bretelle, and E. Pagnacco. Identification from measurements of mechanical fields by finite element model updating strategies : a review. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 18(3-4) :353–376, 2009.
- [8] D. T. Seidl, A. A. Oberai, and P. E. Barbone. The Coupled Adjoint-State Equation in forward and inverse linear elasticity : Incompressible plane stress. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357 :112588, 2019.
- [9] P. Feissel and O. Allix. Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(13-16) :1968–1983, 2007.
- [10] M. Ben Azzouna, P. Feissel, and P. Villon. Robust identification of elastic properties using the modified constitutive relation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295 :196–218, 2015.
- [11] Z. Zhang, Y. Xu, J. Yang, X. Li, and D. Zhang. A survey of sparse representation : algorithms and applications. *IEEE access*, 3 :490–530, 2015.
- [12] R. Ferrier, A. Cocchi, and C. Hochard. Modified Constitutive Relation Error for field identification : theoretical and experimental assessments on fiber orientation identification in a composite material. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(24) :7553–7580, 2021.