

# Une formulation en dynamique explicite non régulière pour simuler la décohésion d'interface en grandes transformations

P. Larousse<sup>1,2</sup>, D. Dureisseix<sup>1</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>, J. Di Stasio<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Univ Lyon, INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France, {paul.larousse,david.dureisseix,anthony.gravouil}@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> Centre de technologie de Ladoux, Manufacture Française de Pneumatiques Michelin, Clermont-Ferrand, France

**Résumé** — L'objectif est de proposer une formulation pour la résolution en dynamique rapide non régulière de problèmes avec interface entre un corps rigide et un corps déformable sous l'hypothèse des grandes transformations. Le cadre proposé s'applique à un modèle de comportement d'interface combinant un problème de contact ou d'impact frottant avec un modèle cohésif ou d'endommagement thermodynamiquement motivé. La résolution est alors possible avec un schéma explicite symplectique nommé CD-Lagrange permettant une bonne conservation de l'énergie et une approche sans matrice.

**Mots clés** — Interface, Modèle de Zone Cohésive, Grandes transformations, Non-régulier.

## 1 Introduction

Ce projet de recherche en partenariat avec la Manufacture Française de Pneumatiques Michelin contient la proposition d'un cadre de résolution de problème mécanique avec interface de contact dans le cadre du procédé de démoulage de pneumatique. Ainsi, l'étude portera sur l'étude d'une interface entre un corps déformable et un corps rigide comme dans le contact pneumatique/moule.

L'objectif est de proposer un cadre de résolution thermodynamique et explicite (mise en jeu de phénomènes de dynamique rapide) pour des problèmes de contact non régulier. Pour ce faire le schéma numérique explicite CD-Lagrange a été choisi, notamment par son aspect symplectique qui permet une bonne conservation de l'énergie et également car il permet de résoudre des problèmes avec contact/impact frottant. En ce qui concerne le comportement de l'interface de contact, le choix a été porté sur un modèle macroscopique nommé RCCM (Raous-Cocu-Cangémi-Monerie) [9, 10] qui est un modèle de zone cohésive qui prend en compte l'endommagement. Ce modèle est composé de deux parties, une partie avec un contact normal et tangentiel et une autre composée d'un comportement élastique endommageable. Pour rentrer dans le cadre thermodynamique, cette loi doit respecter les deux premiers principes de la thermodynamique.

Pour finir, ce type de procédé peut concerner de grands déplacements ou de grandes rotations. La formulation doit ainsi prendre en compte l'hypothèse des grandes transformations. La faisabilité d'un tel schéma explicite, voire matrix-free est proposée dans cette communication.

## 2 Écriture du problème en grandes transformations

Les différentes configurations du solide déformable considérées sont présentées sur la figure 1. Soit  $\Omega_t$  la configuration déformée à l'instant  $t$  et  $\Omega_0$  la configuration initiale. La méthode du lagrangien total est utilisée pour résoudre les problèmes mécaniques avec l'utilisation de la méthode des éléments finis. Soit  $\mathbf{X}$  la position d'un point du solide déformable dans la configuration initiale et  $\mathbf{x}$  la position du même point dans la configuration déformée. On note alors  $\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{U}$ , avec  $\mathbf{U}$  le vecteur déplacement. On note également  $dv$  et  $ds$  les variations de volume et de surface élémentaire sur la configuration déformée à un instant  $t$ , et de manière analogue  $dV$  et  $dS$  sur la configuration initiale.

Les bords  $\partial_u \Omega_t$  et  $\partial_u \Omega_0$  correspondent respectivement aux bords sur lesquels le déplacement est imposé sur la configuration déformée et initiale, de la même manière  $\partial_{F_d} \Omega_t$  et  $\partial_{F_d} \Omega_0$  les bords où des forces peuvent être imposées, et  $\Gamma_t$  et  $\Gamma_0$  correspondent aux bords de l'interface de contact sur chaque configuration.

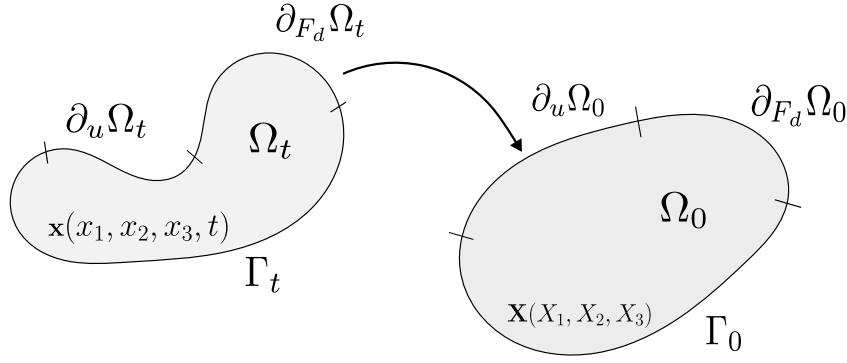


FIGURE 1 – Configuration déformée  $\Omega_t$  à la configuration non déformée  $\Omega_0$

Le schéma d'intégration temporelle considéré, le schéma CD-Lagrange [4, 5], considère des piquets de temps d'indice entier, comme  $t_n$  où les quantités dites de configuration et d'état sont exprimées, mais aussi des instants au demi-pas, comme  $t_{n+1/2}$  où les quantités en vitesse et d'évolution sont définies. Le principe des puissances virtuelles intégré en temps sur un pas de temps entre les instants  $t_{n+1/2}$  et  $t_{n+3/2}$ , de durée  $h = t_{n+3/2} - t_{n+1/2}$  supposée uniforme ici, s'écrit :

$$\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} P_{acc}^* dt = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} (P_{int}^* + P_{ext}^* + P_{\Gamma_t}^*) dt \quad (1)$$

avec  $P_{acc}^*$  la puissance des termes d'accélération,  $P_{int}^*$  la puissance des forces intérieures liée au comportement du matériau,  $P_{ext}^*$  la puissance des forces extérieures et  $P_{\Gamma_t}^*$  la puissance des forces d'interaction de l'interface de contact.

En utilisant le schéma temporel CD-Lagrange et les éléments finis en espace, l'équation (1) discrétisée en temps et en espace fait intervenir les termes suivants en Lagrangien total avec,

$$\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} P_{acc}^* dt = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{V}^* dv dt = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{V}^* dV dt = (\mathbf{V}^*)^T \mathbf{M} (\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) \quad (2)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse lumpée,  $\mathbf{V}$  le vecteur vitesse,  $\rho$  le champ de masse volumique du matériau en configuration déformée,  $J = \det \mathbf{F}$  le jacobien du gradient de la transformation  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{x}$  entre la configuration déformée  $\Omega_t$  et la configuration non déformée  $\Omega_0$  et  $\rho_0 = J\rho$ . Ensuite d'une part

$$\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} P_{int}^* dt = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dv dt = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^* dV dt = h(\mathbf{V}^*)^T \mathbf{F}_{int,n+1} \quad (3)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes,  $\mathbf{D}^*$  le tenseur des vitesses de déformations virtuelles,  $\mathbf{S}$  le second tenseur de Piola-Kirchoff et  $\dot{\mathbf{E}}$  la dérivée en temps du tenseur de Green-Lagrange en posant [6]

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \\ \mathbf{D} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \end{cases} \quad (4)$$

D'autre part,

$$\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} P_{ext}^* dt = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \left( \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{V}^* dv + \int_{\partial_{F_d} \Omega_t} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{V}^* ds \right) dt = h(\mathbf{V}^*)^T \mathbf{F}_{ext,n+1} \quad (5)$$

avec  $\mathbf{f}_d$  les forces extérieures appliquées en volume,  $\mathbf{F}_d$  les forces extérieures appliquées sur  $\partial_{F_d} \Omega$ . Suivant la nature des forces extérieures, suiventes ou non, on utilise l'intégration sur la configuration déformée ou de référence. Pour l'interface, il peut être intéressant de conserver le calcul sur la configuration déformée, le comportement nécessitant à terme des quantités locales telles que la normale et le plan tangent courants sur l'interface :

$$\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} P_{\Gamma_t}^* dt = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \int_{\Gamma_t} \mathbf{F}_{\Gamma_t} \cdot \mathbf{V}^* ds dt = (\mathbf{V}^*)^T \mathbf{W}_{n+1} \mathbf{R}_{n+3/2} \quad (6)$$

avec  $\mathbf{W}_{n+1}$  la matrice diagonale des poids d'intégration aux noeuds de la configuration déformée à  $t_{n+1}$  et  $\mathbf{R}$  l'impulsion telle que :

$$\mathbf{R}_{n+3/2} = \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+3/2}} \mathbf{F}_{\Gamma_t} dt \quad (7)$$

avec  $\mathbf{F}_{\Gamma_t}$  les forces dûes aux interactions avec l'interface.

Ainsi, avec le schéma temporel CD-Lagrange et l'utilisation d'éléments finis en espace, l'équation (1) discrétisée en temps et en espace s'écrit :

$$(\mathbf{V}^*)^T \mathbf{M}(\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) = -h(\mathbf{V}^*)^T \mathbf{F}_{int,n+1} + h(\mathbf{V}^*)^T \mathbf{F}_{ext,n+1} + (\mathbf{V}^*)^T \mathbf{W}_{n+1} \mathbf{R}_{n+3/2} \quad (8)$$

Il est important de noter que les forces extérieures et intérieures sont calculées à l'instant  $t_{n+1}$ . Ainsi la configuration, la déformation, la contrainte, sont connues, et nous avons un problème "matrix-free", i.e. sans résolution de système d'équations. D'autre part le comportement de l'interface de contact est calculé à part lors du calcul de l'impulsion  $\mathbf{R}$ .

### 3 Comportement et thermodynamique

#### 3.1 Comportement volumique

De manière à concentrer nos travaux sur le comportement de l'interface, le comportement volumique choisi est simplement hyper-élastique : le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (ou néo-hookéen) [7] relie linéairement le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  au tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  avec

$$\mathbf{S} = \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbb{I}_3 + 2\mu\mathbf{E} = \mathbb{C}\mathbf{E} \quad (9)$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé, et  $\mathbb{C}$  l'opérateur de Hooke associé.

Ce modèle s'écrit simplement dans le cadre thermodynamique, en utilisant uniquement le potentiel d'énergie libre élastique  $\Psi_e = \frac{1}{2}\mathbf{E} : \mathbb{C}\mathbf{E}$ , pour lequel  $\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{E}}$  [7].

#### 3.2 Comportement de l'interface

Une interface dont le comportement est décrit par un modèle de zones cohésive a été retenu. Le modèle macroscopique choisit est RCCM (Raous-Cocu-Cangémi-Monerie) [2] qui peut être résumé par le modèle rhéologique présenté en figure 2.

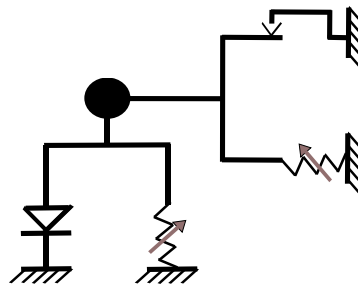


FIGURE 2 – Rhéologie du modèle RCCM en 3D

Il est composé de deux parties parallèles. Une première qui correspond au contact normal et tangentiel et une deuxième qui correspond à une partie élastique endommageable.

De manière à respecter le cahier des charges proposé par notre résolution, le modèle doit être thermodynamiquement admissible. Pour cela une condition suffisante est la définition du potentiel d'énergie libre  $\Psi$  et du potentiel de dissipation  $\Phi$  tels que

$$\begin{cases} \Psi &= \Psi_c + \Psi_d \\ \Phi &= \Phi_c + \Phi_d \end{cases} \quad (10)$$

avec  $\Psi_c$  et  $\Phi_c$  respectivement les potentiels d'énergie libre et de dissipation de la partie contact du modèle et  $\Psi_d$  et  $\Phi_d$  ceux associées à la partie endommagement du modèle RCCM. Ces potentiels sont définis positifs et convexes. Les sections suivantes proposent une formulation compacte et synthétique de ce cadre thermodynamique, proposé en partie pour différentes versions et avec différentes approches dans [8, 1].

### 3.2.1 Comportement élastique endommageable

Pour présenter le contact élastique endommageable il est nécessaire d'introduire le saut de déplacement  $[\mathbf{u}]$  tel que

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{g}_0 + \mathbf{u} \quad (11)$$

avec  $\mathbf{g}_0$  le jeu initial entre le corps déformable et le corps rigide entre lesquels le contact a lieu et  $u$  la trace du déplacement sur l'interface au point considéré.

La partie élastique endommageable du modèle RCCM s'exprime localement de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } f = \alpha \text{ et } \alpha < u_r, \dot{\alpha} = \langle \dot{f} \rangle_+ \\ \text{sinon } \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

avec  $f$  la norme du saut de déplacement  $[\mathbf{u}]$ ,  $\dot{f}$  sa dérivée en fonction du temps,  $\alpha$  une variable quantifiant l'endommagement,  $\dot{\alpha}$  la vitesse d'endommagement qui est positive ou nulle,  $u_r$  correspond au saut de déplacement à rupture de l'interface et  $\langle \cdot \rangle_+$  à la valeur positive de son argument.

Il reste maintenant à prouver que la partie élastique endommageable du modèle RCCM est thermodynamique admissible. Pour cela l'inégalité de Clausius-Duhem [7] s'écrit :

$$D = -\beta \dot{\alpha} \geq 0 \quad (13)$$

avec  $\beta$  le flux thermodynamique associé à l'endommagement  $\alpha$ . La loi d'état s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_d \in \partial_{[\mathbf{u}]} \Psi_d \\ \beta \in \partial_{\alpha} \Psi_d \end{cases} \quad (14)$$

avec  $\mathbf{R}_d$  la distribution de la force élastique (la contrainte normale à l'interface) et

$$\Psi_d([\mathbf{u}], \alpha) = \frac{1}{2} g_N(\alpha) [\mathbf{u}]^2 \quad (15)$$

avec  $g_N$  la raideur de l'interface dépendant de l'endommagement  $\alpha$ . Il est à noter que la raideur est prise ici identique sur la composante normale et sur la composante tangentielle. Ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_d = g_N(\alpha) [\mathbf{u}] \\ \beta = \frac{1}{2} g'_N(\alpha) [\mathbf{u}]^2 \end{cases} \quad (16)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (13) est donc respectée et le modèle thermodynamique admissible à condition que la raideur de l'interface  $g_N$  soit une fonction décroissante de  $\alpha$ . Il est à noter qu'une autre loi de comportement pour l'interface aurait pu être choisie, elle doit seulement vérifier le cadre thermodynamique présenté ci-dessus.

### 3.2.2 Le contact normal et tangentiel

Dans le cadre du contact normal, la loi d'état s'écrit :

$$f_{c,N} \in \partial_{u_{c,N}} \Psi_c(u_{c,N}) \text{ ou } u_{c,N} \in \partial_{f_{c,N}} \Psi_c^*(f_{c,N}) \quad (17)$$

avec  $u_{c,N}$  la partie normale du déplacement,  $f_{c,N}$  la partie normale de la force de contact,  $\Psi_c^*$  le potentiel dual du potentiel d'énergie libre  $\Psi_c$  défini tel que

$$\begin{cases} \Psi_c(u_{c,N}) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(u_{c,N}) \\ \Psi_c^*(f_{c,N}) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(f_{c,N}) \end{cases} \quad (18)$$

avec  $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$  l'indicatrice du convexe  $\mathbb{R}^+$ . En utilisant le lemme de viabilité de Moreau, les conditions de contact peuvent être écrites localement en fonction de la vitesse normale  $v_{c,N}$  et d'une impulsion normale  $r_{c,N}$  telles que :

$$\begin{cases} \text{si } g > 0, & r_{c,N} = 0 \\ \text{sinon } g = 0, & 0 \leq v_{c,N} \perp r_{c,N} \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

avec  $g = [\mathbf{u}]_N$  le jeu normal entre le solide déformable et le corps rigide.

De manière générale, le contact tangential est une loi de Coulomb non associée. Ainsi pour vérifier que sa formulation est thermodynamiquement admissible, nous utilisons la méthode du bi-potentiel qui est une généralisation de l'écriture du potentiel de dissipation [3]. En utilisant de nouveau le lemme de viabilité de Moreau, le contact tangential s'écrit localement :

$$\begin{cases} \text{si } g > 0, & \mathbf{r}_{c,T} = 0 \\ \text{si } g = 0, & 0 \leq (\mu r_{c,N} - r_{c,T}) \perp \|\mathbf{v}_{c,T}\| \\ \mathbf{r}_{c,T} = r_{c,T} \mathbf{t} \end{cases} \quad (20)$$

avec  $\mathbf{r}_{c,T}$  la partie tangentielle de l'impulsion liée au contact,  $\mathbf{v}_{c,T}$  la vitesse tangentielle,  $\mathbf{t}$  la direction de glissement tangentielle et  $\mu$  le coefficient de frottement de l'interface de contact qui évolue suivant (21) en fonction de l'endommagement de l'interface.

$$\mu(\alpha) = \mu_{\text{inf}} \left( 1 - \frac{g_N(\alpha)}{g_N(0)} \right) \quad (21)$$

avec  $\mu_{\text{inf}}$  le coefficient de frottement lorsque l'interface n'est plus cohésive.

L'impulsion globale  $\mathbf{R}$  s'écrit :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c - h\mathbf{R}_d \quad (22)$$

avec  $\mathbf{R}_c$  comprenant l'impulsion globale après résolution de chaque LCP (Linear Complementary Problem) locaux (19), (20) [4] liés à la résolution de l'impulsion de contact normale puis tangentielle et  $\mathbf{R}_d$  calculé avec (14). La partie suivante combine le cadre thermodynamique et explicite pour proposer une résolution numérique à partir du schéma explicite CD-Lagrange.

## 4 Algorithme de résolution explicite

La résolution avec le schéma explicite CD-Lagrange se base sur le cadre thermodynamique précédent. Toutes les variables relatives aux lois d'état en volume ou sur l'interface sont imposées au pas de temps d'indice entier  $t_{n+1}$ . Les variables liées aux lois d'évolution thermodynamique, donc au potentiel de dissipation  $\Phi$ , sont définies au demi pas de temps, à savoir  $t_{n+3/2}$ . Ainsi, l'algorithme de résolution suivant est proposé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrées : } \mathbf{V}_{n+1/2}, \mathbf{U}_n, \alpha_n, \dot{\alpha}_{n+1/2} \\ \text{Calcul explicite de la configuration } \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_{n+1/2} \\ \text{Calcul explicite de l'état } \alpha_{n+1} = \alpha_n + h\dot{\alpha}_{n+1/2} \\ \text{Calcul de } \mathbf{F}_{\text{ext},n+1} \text{ à partir de (5)} \\ \text{Calcul de la déformation } \mathbf{E}_{n+1} \\ \text{Calcul de } \mathbf{S}_{n+1} \text{ à partir de (9)} \\ \text{Calcul de } \mathbf{F}_{\text{int},n+1} \text{ à partir de (3)} \\ \text{Calcul de } \mathbf{R}_{n+3/2} \text{ à partir de (22)} \\ \mathbf{V}_{n+3/2} = h\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext},n+1} - \mathbf{F}_{\text{int},n+1}) + \mathbf{V}_{n+1/2} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}_{n+1}\mathbf{R}_{n+3/2} \\ \text{Calcul de } \dot{\alpha}_{n+3/2} \text{ à partir de (12)} \\ \text{Sorties : } \mathbf{V}_{n+3/2}, \mathbf{U}_{n+1}, \alpha_{n+1}, \dot{\alpha}_{n+3/2} \end{array} \right. \quad (23)$$

Le caractère "matrix-free" tient à plusieurs ingrédients :

- La matrice de masse  $\mathbf{M}$  est lumpée.
- La configuration et l'état (dont la direction de glissement  $\mathbf{t}$ ) sont connus explicitement.
- Les conditions de contact sont locales et avec une intégration nodale  $\mathbf{W}$ .

— L'évolution est calculée en post traitement de la dynamique.  
 La dernière partie sera une application de cet algorithme de résolution.

## 5 Cas tests

Pour illustrer le cadre thermodynamique et explicite proposé pour la résolution de problème de contact décohésif avec endommagement, le cas test suivant a été mis en place comme le montre la figure 3.

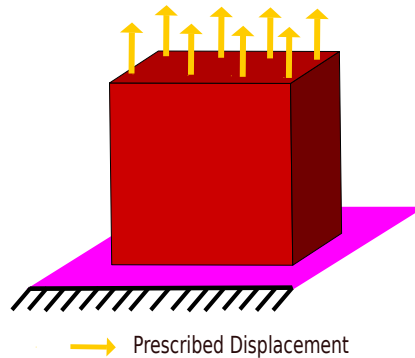


FIGURE 3 – Cas Test : Arrachement de l'interface de contact

La résolution est réalisée avec la méthode des éléments finis, le cube est de dimension 1\*1\*1 m, discrétisé en 7\*7\*7 éléments cubique de 8 noeuds. Le déplacement imposé correspond à la figure 4. Dans un premier temps, le cube est soumis à une traction vers le haut jusqu'à atteindre un déplacement limite. Cette limite est calculée de manière à observer un arrachement du cube de l'interface.

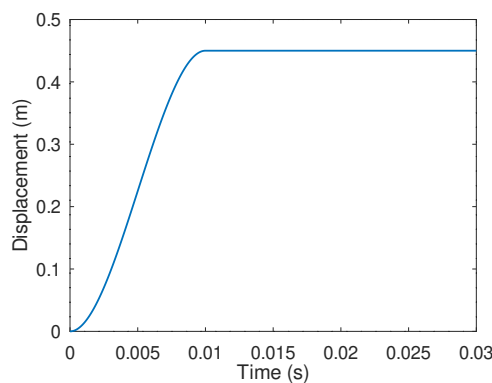


FIGURE 4 – Déplacement imposé sur la face supérieure du cube en fonction du temps

De manière à respecter le cadre thermodynamique imposé par notre résolution, il a été énoncé précédemment que pour que l'inégalité de Clausius Duhem soit respectée, il est nécessaire que la dérivée de la fonction de la raideur de l'interface soit négative ou nulle. Ainsi, la figure 5 montre l'évolution de la raideur choisie. On note  $\alpha_e$  la limite élastique de notre interface et  $u_r$  la limite de rupture de l'interface.

Sur la figure 6 nous pouvons observer les résultats obtenus avec à gauche l'évolution de l'endommagement de chaque noeud de l'interface en fonction du temps. A environ 1 tier du temps totale de la simulation, nous pouvons observer que l'ensemble de l'interface est endommagée. Ce résultat est confirmé par la figure de droite qui catégorise en 3 états l'interface, à savoir, un état élastique, lorsque la raideur de l'interface est inférieur à  $\alpha_e$ , un état de transition, et l'état de rupture lorsque que la limite  $u_r$  a été dépassé. Ainsi, au bout de 1 tier de la simulation nous pouvons de nouveau observer que l'ensemble de l'interface a été endommagé, ce qui signifie notamment que le gap entre le solide déformable et le corps rigide dans le cadre de ce test avec uniquement une traction, est positif.

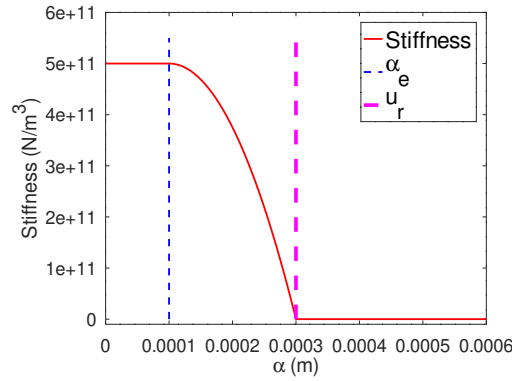


FIGURE 5 – Évolution de la rigidité de l'interface  $g_N$  en fonction de l'endommagement  $\alpha$

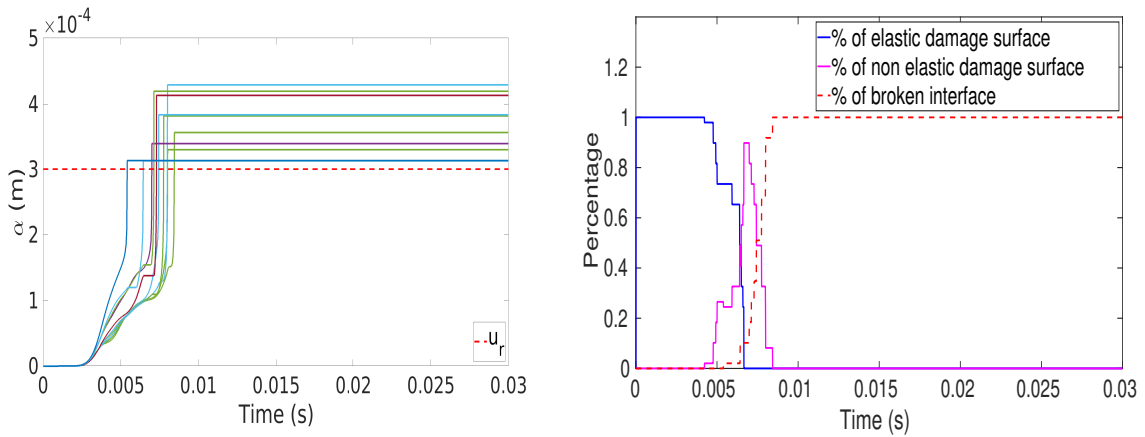


FIGURE 6 – Évolution de l'endommagement  $\alpha$  (à gauche) et de l'état de l'interface (à droite) en fonction du temps

## 6 Conclusion

Dans ce projet de recherche, un cadre pour résoudre des problèmes non régulier en dynamique transitoire couplant du contact, de l'endommagement, de la décohésion est présenté en grandes transformations. Ce cadre est composé en deux parties. Une première qui est l'utilisation du schéma explicite symplectique CD-Lagrange qui permet de résoudre du contact unilatéral et du contact frottant tangentiel. Et une deuxième partie qui met en avant le cadre thermodynamique des modèles utilisés en respectant les deux premiers principes de la thermodynamique. C'est pourquoi le modèle RCCM a été utilisé. Il est important de noter qu'une autre loi de comportement pour l'interface peut fonctionner, à condition qu'elle respecte les deux premiers principes de la thermodynamique et qu'ensuite le cadre explicite y soit appliqué.

En perspective il peut être intéressant d'utiliser d'autres modèles de comportement pour l'interface, notamment des modèles à effets retard pour maîtriser la vitesse d'endommagement.

## Références

- [1] N.A. Collins-Craft, F. Bourrier, V. Acary. *On the formulation and implementation of extrinsic cohesive zone models with contact.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022.
- [2] G. Del Piero, M. Raous. *unified model for adhesive interfaces with damage, viscosity, and friction.*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 496–507, 2010.
- [3] G. De Saxcé, Z.-Q. Feng. *The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms.*, Mathematical and Computer Modelling, 225–245, 1998.
- [4] J. Di Statio. *The CD Lagrange scheme, a robust explicit time-integrator for impact dynamics : a new singular mass formulation, and an extension to deformable- deformable contact.*, Phd Thesis, INSA Lyon, 2021.

- [5] F.-E. Fekak. *Étude de la réponse dynamique des ponts roulants soumis à des chocs multiples pendant un séisme : co-simulation implicite / explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact.*, PhD thesis, Université de Lyon, 2017.
- [6] A. Fortin. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, GIREF, 2020.
- [7] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials.*, Cambridge, 1994.
- [8] Y. Monerie, V. Acary. *Dynamical formulation of three-dimensional cohesive zone model coupling damage and friction.*, Revue Européenne des Éléments Finis, 489-503, 2001.
- [9] M. Raous, Y. Monerie. *Unilateral contact, friction and adhesion : 3D cracks in composite materials*, Contact Mechanics, In J.A.C. Martins and M.D.P. Monteiro Marques editors, 333-346, 2002.
- [10] M. Raous, M. Ali Karray. *odel coupling friction and adhesion for steel concrete interfaces.*, International Journal of Computer Applications in Technology, 42-51, 2009